Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для учащихся 8 класса
общеобразовательной школы

+CD

Рекомендовано Министерством образования и науки
Республики Казахстан

KELESHEK
2030
КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
С60

Солтан Г. Н. и др.

С60 **Геометрия:** учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 208 с.: ил.

ISBN 978-601-317-335-1

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/geomr.php

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

ISBN 978-601-317-335-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие восьмиклассники! В этом учебном году вы продолжите изучать предмет «Геометрия». В предлагаемом учебнике отражено содержание курса геометрии для 8 класса. Вы изучите многие новые геометрические понятия и их свойства, узнаете, что такое тригонометрические функции угла, значительно расширите свои знания о видах и свойствах четырехугольников и их площадях, изучите новый раздел, связанный с координатами. Кроме того, больше внимания будете уделять применению алгебры в геометрии.

В данном учебнике подробно изложена теория, приведены примеры решений задач. После объяснения нового материала к каждой теме даются вопросы (1), которые помогут вам проверить, как вы усвоили знания. Также имеются разнообразные упражнения, которые разделены на три уровня сложности: A, B, C (2), для формирования практических умений и навыков. Для подготовки к изучению нового материала в конце некоторых пунктов предлагаются практические задания (3).

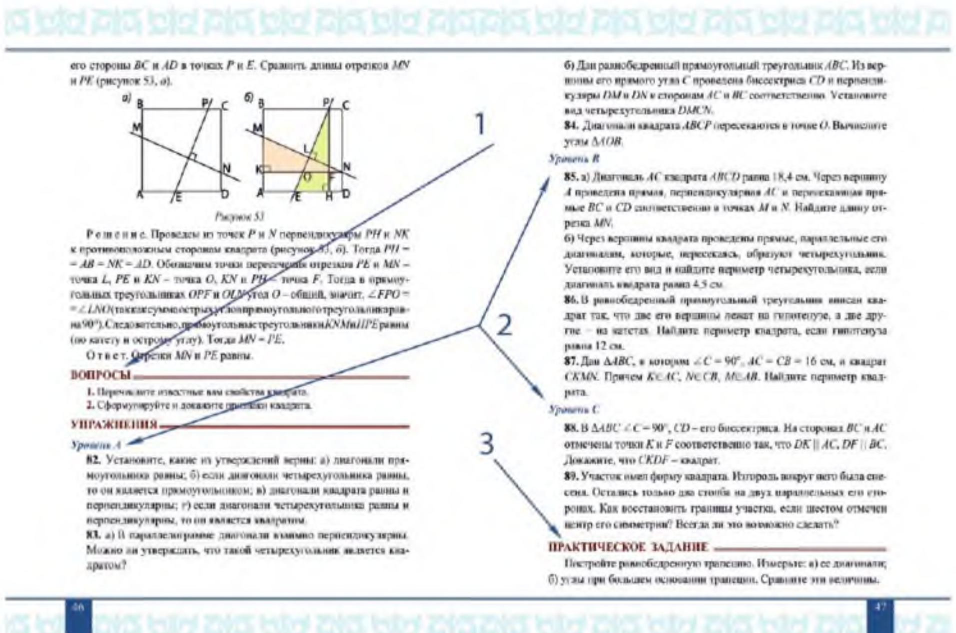

его стороны BC и AD в точках P и E. Сравнить длины отрезков MN и PE (рисунок 53, а).

Рисунок 53

Решение. Проведем из точек P и N перпендикуляры PH и NK к противоположным сторонам квадрата (рисунок 53, б). Тогда $PH = AB = NK = AD$. Обозначим точки пересечения отрезков PE и MN – точка L, PE и KN – точка O, KN и PH – точка F. Тогда в прямоугольных треугольниках OPF и OLN угол O – общий, значит, $\angle FPO = \angle LNO$ (так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°). Следовательно, прямоугольные треугольники KNM и HPE равны (по катету и острому углу). Тогда $MN = PE$.

Ответ. Отрезки MN и PE равны.

ВОПРОСЫ

1. Перечислите известные вам свойства квадрата.
2. Сформулируйте и докажите признаки квадрата.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

82. Установите, какие из утверждений верны: а) диагонали прямоугольника равны; б) если диагонали четырехугольника равны, то он является прямоугольником; в) диагонали квадрата равны и перпендикулярны; г) если диагонали четырехугольника равны и перпендикулярны, то он является квадратом.

83. а) В параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны. Можно ли утверждать, что такой четырехугольник является квадратом?

б) Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Из вершины его прямого угла C проведена биссектриса CD и перпендикуляры DM и DN к сторонам AC и BC соответственно. Установите вид четырехугольника $DMCN$.

84. Диагонали квадрата $ABCP$ пересекаются в точке O. Вычислите углы ΔAOB.

Уровень B

85. а) Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная AC и пересекающая прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.

б) Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям, которые, пересекаясь, образуют четырехугольник. Установите его вид и найдите периметр четырехугольника, если диагональ квадрата равна 4,5 см.

86. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найдите периметр квадрата, если гипотенуза равна 12 см.

87. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = CB = 16$ см, и квадрат $CKMN$. Причем $K \in AC$, $N \in CB$, $M \in AB$. Найдите периметр квадрата.

Уровень C

88. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD – его биссектриса. На сторонах BC и AC отмечены точки K и F соответственно так, что $DK \parallel AC$, $DF \parallel BC$. Докажите, что $CKDF$ – квадрат.

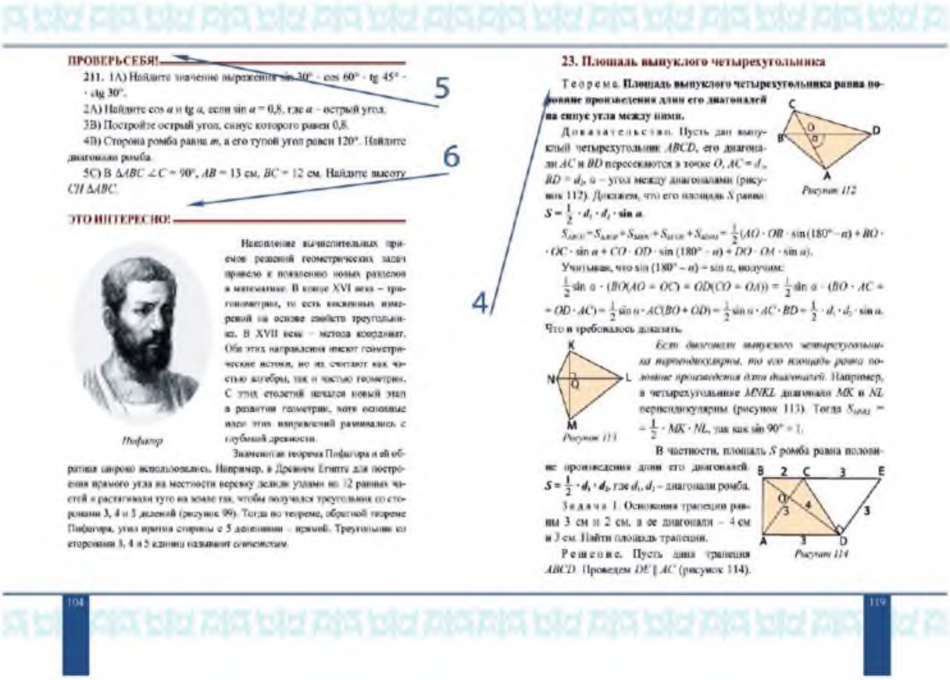
89. Участок имел форму квадрата. Изгородь вокруг него была снесена. Остались только два столба на двух параллельных его сторонах. Как восстановить границы участка, если шестом отмечен центр его симметрии? Всегда ли это возможно сделать?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте равнобедренную трапецию. Измерьте: а) ее диагонали; б) углы при большем основании трапеции. Сравните эти величины.

46 47

Определения, аксиомы и теоремы, формулы обозначены специальными шрифтами (4). Для систематизации знаний по разделам и подготовки к суммативному оцениванию выделены отдельные пункты, в которых предлагаются задания под рубрикой «Проверь себя!» (5). К упражнениям даются ответы, а к поиску решения более трудных из них – указания. В конце каждого раздела имеются исторические сведения под рубрикой «Это интересно!» (6).



В учебнике используются также материалы о заповедниках Казахстана, его достопримечательностях, знания о которых вы можете расширить, используя Интернет.

Надеемся, что учебник, который вы держите в руках, будет вам верным помощником в изучении геометрии.

Желаем успехов!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 7 КЛАССА

Геометрические фигуры, их признаки и свойства

Смежные углы

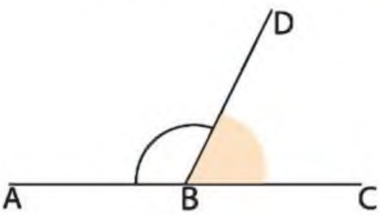


Рисунок 1

$\angle ABD + \angle DBC = 180°$

$\angle ABC$ – развернутый

Вертикальные углы

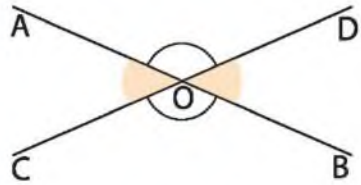


Рисунок 2

$\angle AOC = \angle DOB$

$\angle AOD = \angle COB$

Параллельные прямые и секущая

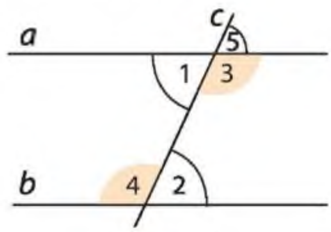


Рисунок 3

$\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – ***внутренние накрест лежащие углы***

$\angle 3$ и $\angle 2$, $\angle 1$ и $\angle 4$ – ***внутренние односторонние углы***

$\angle 5$ и $\angle 2$ – ***соответственные углы***

Признаки параллельных прямых

Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Если $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, то $a \parallel b$.

Если $\angle 5 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Свойства параллельных прямых

Если $a \parallel b$, то $\angle 3 = \angle 4$.

Если $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

Если $a \parallel b$, то $\angle 5 = \angle 2$.

Треугольник

$AC < AB + BC$

$BC < AB + AC$

$AB < BC + AC$

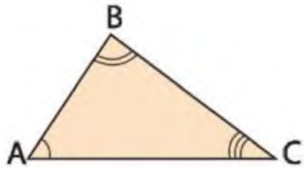


Рисунок 4

Сумма углов треугольника

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Соотношение между сторонами и углами треугольника: против большего угла лежит большая сторона и, *обратно*, против большей стороны лежит больший угол.

Медиана треугольника

Биссектриса треугольника

Высота треугольника

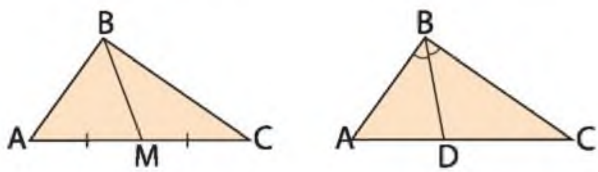


Рисунок 5

Равные треугольники

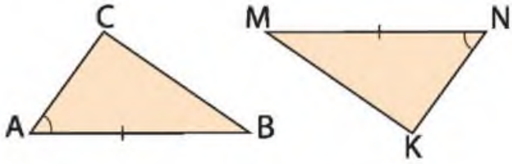


Рисунок 6

В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны и, *обратно*, против равных сторон лежат равные углы.

Если $\Delta ABC = \Delta NMK$, то $\angle A = \angle N$, $\angle C = \angle K$, $\angle B = \angle M$, $CB = MK$, $AB = MN$, $AC = KN$.

Признаки **равенства треугольников:**

- по двум сторонам и углу между ними;
- по стороне и двум прилежащим к ней углам;
- по трем сторонам.

Признаки равенства ***прямоугольных*** треугольников:

1) по двум катетам;
2) по катету и острому углу;
3) по катету и гипотенузе;
4) по гипотенузе и острому углу.

Внешний угол *BCD* треугольника *ABC*

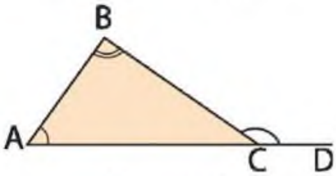


Рисунок 7

Свойство: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

$$\angle BCD = \angle A + \angle B$$

Равнобедренный треугольник

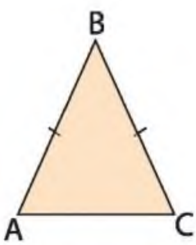


Рисунок 8

$AB = BC$ – боковые стороны, AC – основание

Равносторонний треугольник

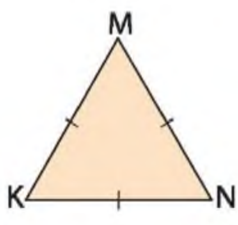


Рисунок 9

$KM = MN = KN$
$\angle K = \angle M = \angle N = 60°$

Прямоугольный треугольник

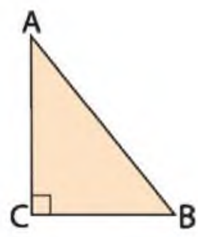
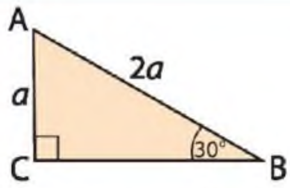
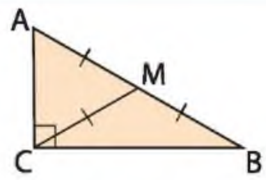


Рисунок 10

CB, AC – катеты
AB – гипотенуза

Признаки *равнобедренного треугольника*	*Свойства* *равнобедренного треугольника*
• Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный. • Если в треугольнике совпадают биссектриса и высота; *или* высота и медиана; *или* биссектриса и медиана, то он равнобедренный.	• В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. • В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.
 *Рисунок 11* Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, и *обратно*, если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30°.	 *Рисунок 12* Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, и *обратно*, если медиана, проведенная к одной из сторон треугольника, равна половине этой стороны, то треугольник – прямоугольный.

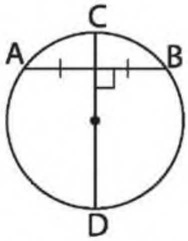


Рисунок 13

AB – хорда, CD – диаметр. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Если диаметр проходит через середину хорды, не являющейся диаметром, то он перпендикулярен ей.

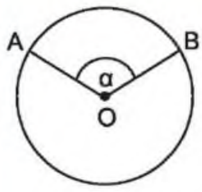


Рисунок 14

Градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего ей центрального угла: $\smile AB = \angle AOB$.

Равные дуги имеют равные градусные меры.

Равные хорды стягивают равные дуги, и обратно, если дуги равны, то равны и хорды, на которые они опираются.

Касательная к окружности

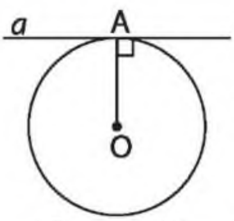


Рисунок 15

Свойство касательной: если прямая касается окружности, то она перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.

Признак касательной: если прямая проходит через конец радиуса, принадлежащий окружности, и перпендикулярна ему, то она является касательной к окружности.

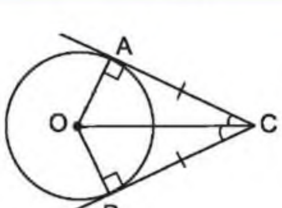


Рисунок 16

Если через точку C, не лежащую на окружности, провести две касательные к ней, то отрезки касательных CA и CB равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла ACB.

Серединный перпендикуляр
к отрезку

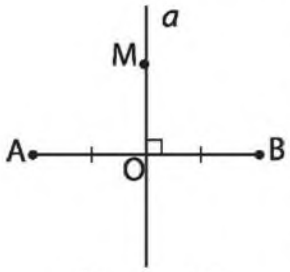


Рисунок 17

Если точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку, то она равноудалена от его концов, и *обратно*, если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.

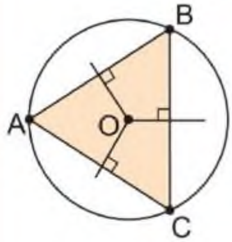


Рисунок 18

Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является ***центром окружности, описанной*** около этого треугольника.

Свойство точек
биссектрисы угла

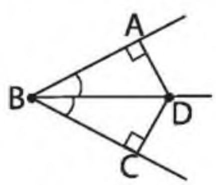


Рисунок 19

Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от его сторон, и *обратно*, если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

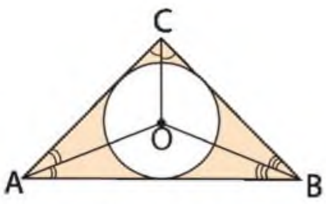


Рисунок 20

Точка пересечения биссектрис треугольника является ***центром окружности, вписанной*** в этот треугольник.

ВОПРОСЫ

1. Какие углы называются смежными? Каким свойством они обладают?

2. Какие углы называются вертикальными? Каким свойством они обладают?

3. Какой треугольник называется: а) равнобедренным; б) прямоугольным? Как называются их стороны?

4. Может ли прямоугольный треугольник быть: а) равнобедренным; б) равносторонним?

5. Что такое высота, медиана, биссектриса треугольника?

6. Может ли высота треугольника равняться его стороне?

7. Могут ли медиана, высота и биссектриса треугольника, проведенные из одной вершины, совпадать?

8. Перечислите свойства равнобедренного треугольника.

9. По каким признакам можно установить, что треугольник равнобедренный?

10. По каким признакам можно установить, что два треугольника равны?

11. Перечислите признаки равенства прямоугольных треугольников.

12. Чему равна сумма углов треугольника?

13. Чему равна сумма двух острых углов прямоугольного треугольника? Если один из них равен α, чему равен другой?

14. Что такое внешний угол треугольника? Каким свойством он обладает?

15. Каким свойством должны обладать три отрезка a, b, c, чтобы существовал треугольник, стороны которого равны этим отрезкам?

16. Какие прямые называются: а) параллельными; б) перпендикулярными?

17. Что такое накрест лежащие и односторонние углы?

18. По каким признакам можно установить, что прямые параллельны?

19. Перечислите свойства параллельных прямых.

20. Как могут быть расположены прямая и окружность?

21. Сколько общих точек имеет прямая и окружность, если радиус окружности 4 см, а расстояние от ее центра до этой прямой равно: а) 3 см; б) 4 см; в) 5 см?

22. По какому признаку можно установить, что прямая является касательной к окружности?

23. Сколько касательных к окружности можно провести через точку, лежащую на ней? Ответ объясните.

24. Какими свойствами обладают две касательные к окружности, проведенные через одну точку?

25. Что такое хорда окружности? Каким свойством обладает хорда, перпендикулярная радиусу? Сформулируйте утверждение, обратное этому свойству. Верно ли оно?

26. Чем измеряются дуги окружности? Какую градусную меру имеет полуокружность?

27. Чему равна градусная мера дуги, опирающейся на хорду, равную радиусу окружности?

28. Какие две окружности называются касательными? Сколько общих касательных могут иметь такие окружности?

29. Чем является геометрическое место точек, равноудаленных от: а) данной точки; б) концов отрезка; в) сторон угла?

30. Какая точка является центром окружности: а) описанной около треугольника; б) вписанной в треугольник?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

1. Один из углов, полученных при пересечении двух прямых, равен 48°. Найдите остальные углы.

2. Углы ABD и DBC – смежные, луч BM – биссектриса угла ABD, причем $\angle ABM$ на 30° меньше $\angle DBC$. Найдите $\angle ABD$.

3. Две параллельные прямые AB и CD пересечены прямой MN, $M \in AB$, $N \in CD$, $\angle AMN = 55°$. Чему равны $\angle CNM$ и $\angle DNM$?

4. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой, при этом получилось 8 углов и односторонние углы относятся как 4 : 8. Найдите полученные углы.

Уровень B

5. Через точку пересечения биссектрис ΔMNK проведена прямая, параллельная стороне MK и пересекающая сторону MN в точке A, а сторону NK в точке B. Докажите, что $AB = MA + KB$.

6. Найдите основание и боковую сторону равнобедренного треугольника, если две его стороны равны 5 см и 11 см.

7. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если: а) его периметр равен 36 см и основание составляет 1,6 боковой стороны; б) его периметр равен 40 см, а одна из сторон – 12 см.

8. Найдите углы при основании AC равнобедренного треугольника ABC, если его внешний угол при вершине B равен $112°$.

9. В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM к его основанию AC, причем $\angle MBC = 40°$. Найдите углы треугольника ABC.

10. В треугольнике ABC $\angle C = 30°$, а внешний угол при вершине A равен $120°$. Найдите неизвестные углы треугольника.

11. В треугольнике ABC проведена медиана BM, причем $AB = BM$ и $\angle ABM = 70°$. Найдите угол BMC.

12. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B$, а высота AM делит сторону BC пополам. Найдите AB, если $CM = 3{,}5$ см.

13. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Найдите MB, если $AM = 4{,}5$ см.

14. В равнобедренном ΔABC с основанием BC $\angle A = 50°$. К его стороне AC проведен серединный перпендикуляр, пересекающий сторону AB в точке D. Найдите $\angle DCA$.

15. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание. Отрезки CD и AB пересекаются в точке O. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle CBD$; б) $AO = OB$.

16. а) Докажите, что в равнобедренном треугольнике имеются две равные медианы.

б) Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведенные из вершин соответственно равных углов, равны.

17. Салтанат получила задание разделить данный угол A пополам. Она выполнила его так. Отложила на одной стороне угла отрезки AB и AD ($AD > AB$), а на другой стороне – соответственно равные им отрезки AC и AK. Построила отрезки BK и DC, отметила точку O их пересечения и провела луч AO. Является ли этот луч искомым?

18. а) Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них на 50 % больше второго. б) В прямоугольном треугольнике ABC, $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 18$ см. Найдите AC.

19. В Улытауском национальном природном парке Казахстана растут необычные леса. Решите задачу и вы узнаете по ее числовому ответу, какой высоты достигает ель Шренка (а) и сколько лет она способна жить (б). Найдите: а) угол при основании равнобедренного треугольника, если он составляет 62,5 % угла при его вершине; б) гипотенузу прямоугольного треугольника с углом 60°, если сумма гипотенузы и катета, прилежащего к этому углу, равна 900 мм.

Ель Шренка

20. В равнобедренном треугольнике один из углов 120°, а его основание равно 16 см. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины его острого угла.

21. Из точки A, удаленной от прямой b на расстояние 7 см, проведены к ней перпендикуляр AB и наклонная AC (B и C принадлежат прямой b). Найдите BC, если $\angle CAB = 45°$.

22. Медиана CM прямоугольного ΔABC с прямым углом C равна 4 см. Найдите AB.

23. В ΔABC медиана CM вдвое меньше стороны AB. Найдите угол C.

24. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

25. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле: $r = \frac{a + b - c}{2}$, где a и b его катеты, c – гипотенуза.

26. Чему равен радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если его гипотенуза равна 8 см, а сумма катетов – 11 см?

27. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника 20 см, а радиус вписанной в него окружности 4 см. Найдите длины катетов, если больший из них равен среднему арифметическому длин меньшего катета и гипотенузы.

28. Чему равен радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 2 см?

29. В треугольнике ABC $\angle B = 40°$. Найдите $\angle AOC$, где O – центр окружности, вписанной в треугольник.

30. Докажите, что если точка лежит внутри угла и равноудалена от его сторон, то она принадлежит биссектрисе этого угла. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

31. Через точку C окружности с центром O проведены касательная CB и хорда CA, $\angle ACB = 48°$. Найдите $\angle AOC$.

32. Из точки M к окружности с центром O проведены две касательные MA и MB (A и B – точки касания). Найдите $\angle AOB$, если: а) $OM = 8$ см и радиус окружности равен 4 см; б) $\angle AMB = 84°$.

33. а) Найдите угол между хордой AB и диаметром AC, если эта хорда стягивает дугу в $62°$.

б) Две точки окружности разделили ее на две дуги. Найдите их градусные меры, если угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен $110°$.

Уровень C

34. Какова градусная мера дуги, которую описывает: а) ежеминутно конец часовой стрелки; б) ежесекундно окружность махового колеса, делающего 45 оборотов в минуту; в) ежеминутно каждая точка экватора Земли при ее вращении вокруг оси?

35. Из точки M к окружности с центром O и радиусом 5 см проведены две касательные MA и MB (A и B – точки касания). На большей из дуг AB отмечена точка C. Найдите градусные меры дуг AB и ACB, если $AM = 5$ см.

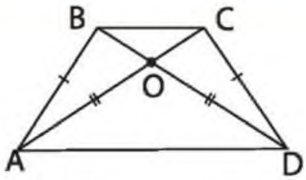


Рисунок 21

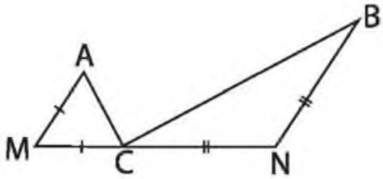


Рисунок 22

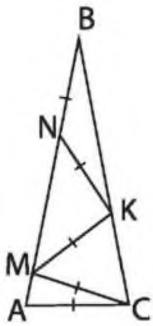


Рисунок 23

36. В треугольник с углами 40° и 50° вписана окружность. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность разделилась точками касания.

37. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по его гипотенузе.

38. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD его высота. Докажите, что треугольники ACD и CDB имеют соответственно равные углы.

39. На рисунке 21 $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что: а) треугольники AOD и BOC имеют соответственно равные углы; б) $BC \parallel AD$.

40. На рисунке 22 $AM \parallel BN$, $AM = MC$, $CN = NB$. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

41. На боковых сторонах равнобедренного ΔABC отмечены точки M, N и K так, что $BN = NK = KM = MC = AC$ (рисунок 23). Найдите угол B.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Представьте себе земельный участок в форме пятиугольника, между любыми двумя пунктами которого можно пройти по прямой дорожке, не пересекающей его границу. Постройте примерный план этого участка в тетради. Измерьте транспортиром все углы полученного пятиугольника и найдите их сумму.

I. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

В результате изучения раздела надо

знать

• определения: многоугольника и его внешнего угла, параллелограмма, прямоугольника, квадрата, ромба, трапеции и их элементов, средней линии треугольника и трапеции;

• классификацию четырехугольников;

• формулу суммы углов многоугольника;

• свойства и признаки: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, средних линий треугольника и трапеции;

• теоремы: Фалеса, о пропорциональных отрезках;

• четыре замечательные точки треугольника и их свойства.

уметь

• изображать многоугольники и их элементы;

• выводить формулу суммы углов многоугольника;

• доказывать свойства и признаки: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, средних линий треугольника и трапеции;

• применять свойства и признаки: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, средних линий треугольника и трапеции, теоремы Фалеса и о пропорциональных отрезках для решения задач на доказательство, вычисление и построение.

1. Многоугольник. Сумма углов многоугольника

Напомним, что *ломаной* $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и отрезков $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots, A_{n-1} A_n$, которые их соединяют (рисунок 24, *а*). Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются *вершинами* ломаной, а отрезки $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots, A_{n-1} A_n$ – *звеньями* ломаной. Точки A_1 и A_n – *концы* ломаной; два звена, например $A_1 A_2$ и $A_2 A_3$, – *соседние* звенья ломаной.

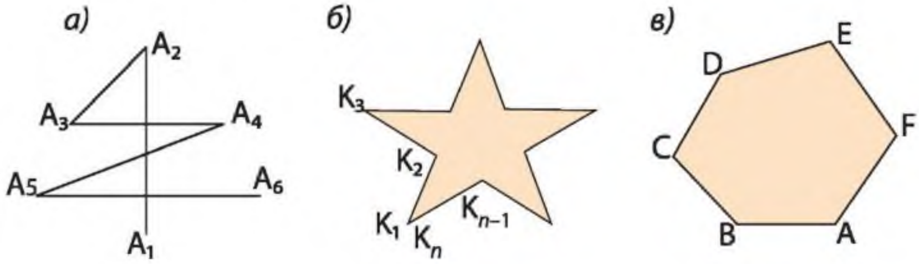


Рисунок 24

Если никакие два соседних звена ломаной не лежат на одной прямой, любые ее два несоседних звена не имеют общих точек, а концы ломаной совпадают, то она называется *простой замкнутой ломаной* (рисунок 24, *б*). Простая замкнутая ломаная разделяет плоскость на две части, одна из которых (на рисунке 24, *б* она закрашена) называется *внутренней областью*, а другая – *внешней областью*.

Многоугольником называется простая замкнутая ломаная вместе с образованной ею внутренней областью (рисунок 24, *б*, *в*). При этом внутренняя область называется *внутренней областью многоугольника*, а вершины ломаной – вершинами многоугольника.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону (рисунок 24, *в*). Выпуклый многоугольник содержит любой отрезок, соединяющий две его различные точки.

Многоугольник называется *невыпуклым*, если существуют его точки, принадлежащие разным полуплоскостям с границей, содержащей какую-нибудь его сторону (рисунок 24, *б*). Для невыпуклого многоугольника всегда найдется отрезок, соединяющий две его различные точки, который не содержится в нем.

В школьном курсе геометрии изучаются в основном свойства выпуклых многоугольников. Если слово «выпуклый» в тексте не используется, то предполагается, что речь идет о выпуклом многоугольнике.

Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами называется n-угольником. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины выпуклого многоугольника, называется его *диагональю*. Сумма длин всех сторон многоугольника называется его *периметром*. *Углом* выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол со сторонами, исходящими из этой вершины, на которых лежат две его соседние стороны.

Многоугольник, имеющий четыре стороны, называется ***четырехугольником***. Несоседние стороны AB и CD, BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ называются *противоположными* (*или противолежащими*) (рисунок 25). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C, B и D называются противоположными (или противолежащими).

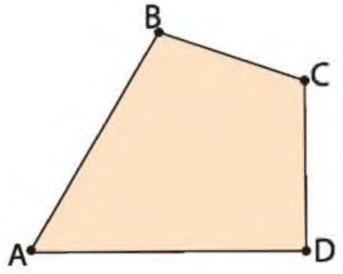


Рисунок 25

Т е о р е м а. **Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.**

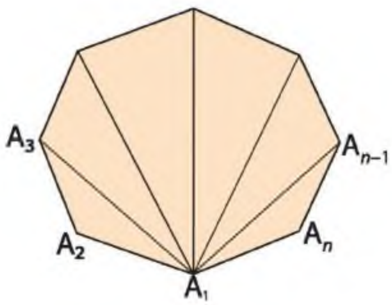


Рисунок 26

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим n-угольник $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_n$ (рисунок 26). Углы $A_n\ A_1\ A_2$, $A_1\ A_2\ A_3$, …, $A_{n-1}\ A_n\ A_1$ являются углами этого многоугольника. Найдем их сумму. Для этого, соединив диагоналями вершину A_1 с другими вершинами, получим $n-2$ треугольника, сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180°$. Теорема доказана.

Эту теорему можно доказать другим способом, соединив отрезками какую-либо внутреннюю точку многоугольника с его вершинами (сделайте это самостоятельно).

Угол, смежный с углом многоугольника, называют его *внешним углом* (рисунок 27, *а*). Из доказанной теоремы следует, что **сумма внешних углов многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°:** $180° \cdot n-(n-2) \cdot 180° = 360°$ (рисунок 27, *б*).

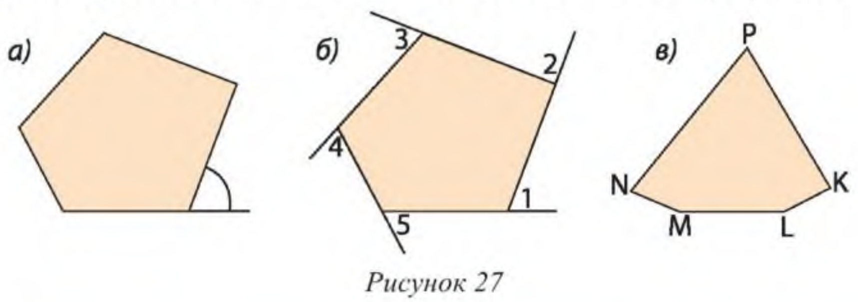


Рисунок 27

З а д а ч а 1. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый n-угольник?

Р е ш е н и е. Пусть n-угольник имеет k острых углов, тогда сумма k смежных с ними его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, меньше 360°. Так как каждый из этих внешних углов больше 90°, то $k \leq 3$. Пример такого многоугольника показан на рисунке 27, *в*.

О т в е т. 3.

З а д а ч а 2. Доказать, что в пятиугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин остальных его сторон.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан выпуклый пятиугольник $ABCDK$, например, и AB – его сторона, не меньшая каждой из остальных (рисунок 28, *а*). Проведем диагонали BK и BD пятиугольника. Тогда по неравенству треугольника $AB < AK + BK$, $BK < KD + DB$, $DB < DC + CB$.

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим $AB < AK + KD + DC + CB$.

Следовательно, длина каждой стороны выпуклого пятиугольника меньше суммы длин остальных его сторон.

Аналогично доказывается это утверждение для любого выпуклого n-угольника. Из утверждения этой задачи следует, что *длина незамкнутой ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы*.

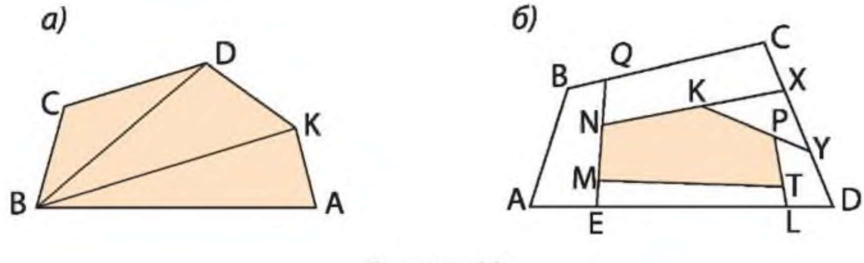


Рисунок 28

З а д а ч а 3. Доказать, что периметр четырехугольника больше периметра выпуклого пятиугольника, содержащегося в нем.

Доказательство. Пусть, например, в четырехугольнике $ABCD$ содержится пятиугольник $MNKPT$ (рисунок 28, *б*). Проведем прямую MN и лучи NK, KP, PT. Обозначим точки их пересечения со сторонами четырехугольника, как показано на рисунке 28, *б*. Так как длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы, то:

$$EA + AB + BQ > \underline{EM} + MN + \underline{NQ},\ \underline{NQ} + QC + CX > NK + \underline{KX},$$

$$\underline{KX} + XY > KP + \underline{PY},\ \underline{PY} + YD + DL > PT + \underline{TL},\ \underline{TL} + LE + \underline{EM} > TM.$$

Сложив левые и правые части этих неравенств и вычтя из сумм одинаковые слагаемые (они в неравенствах подчеркнуты), получим:
$AB+(BQ+QC)+(CX+XY+YD)+(DL+LE+EA)>MN+NK+KP+PT+MT$, то есть $AB + BC + CD + DA > MN + NK + KP + PT + TM$.

Таким же способом можно доказать, что периметр многоугольника больше периметра многоугольника, содержащегося в нем.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение простой замкнутой ломаной.

2. Какая фигура называется многоугольником?

3. Какой многоугольник называется выпуклым? Приведите пример.

4. Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.

5. Какая фигура называется четырехугольником?

6. Что такое вершины, стороны, периметр четырехугольника?

7. Объясните, какие углы называются углами выпуклого четырехугольника.

8. Постройте четырехугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные углы.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

42. а) Докажите, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

б) Могут ли быть все углы выпуклого четырехугольника тупыми? Ответ объясните.

в) Верно ли утверждение: 1) сумма углов выпуклого многоугольника не зависит от числа его сторон; 2) сумма углов выпуклого пятиугольника равна 720°?

г) На сколько градусов увеличится сумма углов выпуклого многоугольника, если число его сторон увеличить на: 1) 3; 2) 8?

д) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна: 1) 900°; 2) 5400°?

43. а) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: 1) 60°; 2) 90°?

б) Найдите углы B и D выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle C = 60°$, а $\angle B = 1{,}4 \cdot \angle D$.

в) Найдите наибольший и наименьший углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам: 1) 2 : 4 : 5 : 7; 2) 3 : 7 : 4 : 6.

г) Найдите сумму углов выпуклого: 1) семиугольника; 2) десятиугольника.

д) Существует ли выпуклый пятиугольник, градусные меры углов которого пропорциональны числам: 1) 1, 1, 2, 2, 3; 2) 1, 2, 2, 2, 6? Если существует, то найдите эти углы.

Уровень B

44. Узнайте, сколько видов животных (а), птиц (б) обитает в Баянаульском национальном природном парке Казахстана, найдя числовые ответы в задаче. Найдите: а) наименьший угол четырехугольника, если один из его углов равен 160°, а остальные относятся как 2 : 3 : 5; б) меньший из противоположных углов четырехугольника, если он составляет $\frac{5}{13}$ другого из них, а сумма остальных его углов равна 180°.

Баянаульский парк

45. а) Докажите, что в выпуклом четырехугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин остальных его сторон.

б) Существует ли четырехугольник со сторонами, равными: 1) 5 см, 7 см, 8 см и 20 см; 2) 3 дм, 4 дм, 5 дм и 10 дм; 3) 6 м, 8 м, 20 м и 20 дм? Ответ объясните.

в) Существует ли пятиугольник, стороны которого пропорциональны числам: 1) 1, 2, 3, 4, 5; 2) 3, 4, 7, 10, 24?

46. а) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый внешний угол которого равен: 1) 72°; 2) 60°; 3) 45°?

б) В каком многоугольнике сумма углов равна сумме его внешних углов?

Уровень С

47. а) Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 23 см, а одна его сторона больше каждой из других соответственно на 2 см, 3 см, 4 см.

б) В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делит угол A пополам, $\angle B = \angle D = 90°$. Найдите $\angle C$ и длины сторон CB и CD, если: 1) $\angle A = 60°$, $AC = 16$ см; 2) $\angle BAC = 45°$, $AB = 5$ см.

48. а) Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

б) Можно ли простую замкнутую ломаную длиной 4 см поместить в круг радиуса 1 см?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте четырехугольник, в котором: а) стороны попарно параллельны; б) все стороны равны; в) две стороны параллельны, а две другие – не параллельны.

2. Виды четырехугольников. Параллелограмм и его свойства

Четырехугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом** (рисунок 29, *а, б, в, г*).

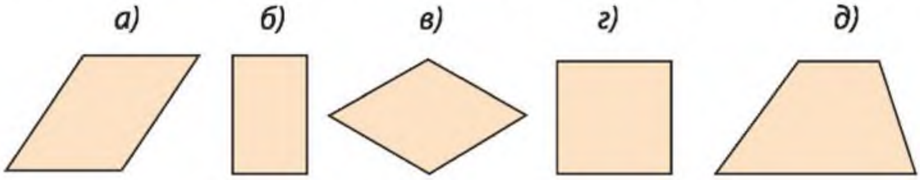


Рисунок 29

Параллелограмм, все углы которого прямые, называется ***прямоугольником*** (рисунок 29, *б*).

Параллелограмм, в котором все стороны равны, называется ***ромбом*** (рисунок 29, *в*).

Прямоугольник, в котором все стороны равны, называется ***квадратом*** (рисунок 29, *г*).

Четырехугольник, в котором две стороны параллельны, а другие – не параллельны, называется ***трапецией*** (рисунок 29, *д*). Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны – *боковыми сторонами*.

Рисунок 30

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рисунок 30, *а*). Трапеция, имеющая прямой угол, называется *прямоугольной* (рисунок 30, *б*).

Теорема (*свойство углов и сторон параллелограмма*).

В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

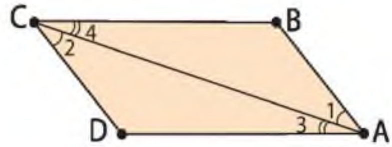


Рисунок 31

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рисунок 31). Диагональ AC делит его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle B = \angle D$. Получаем $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. Что и требовалось доказать.

Теорема (*свойство диагоналей параллелограмма*). **Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

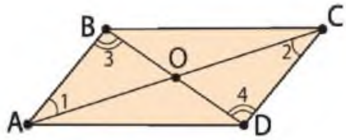


Рисунок 32

Доказательство. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, а его диагонали AC и BD пересекаются (объясните почему) в точке O (рисунок 32). $AB = CD$ (как противоположные стороны параллелограмма); $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и соответствующих секущих). Следовательно $\Delta AOB = \Delta COD$ (по второму признаку равенства треугольников). В равных треугольниках соответственные стороны равны, поэтому $AO = OC$, $BO = OD$, что и требовалось доказать.

Напомним, что *фигура* называется *симметричной относительно точки O* (или центрально-симметричной), если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется *центром симметрии фигуры*. На рисунке 33, *а*, *б*, *в* приведены примеры центрально-симметричных фигур. Параллелограмм – центрально-симметричная фигура, его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (рисунок 33, *в*). Докажите это самостоятельно.

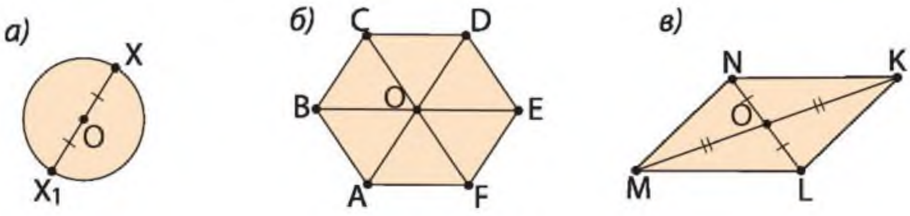


Рисунок 33

З а д а ч а. Найти периметр параллелограмма $ABCD$, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки: 1) $AF = 14$ см и $FD = 7$ см; 2) $BK = 7$ см, $KC = 14$ см (рисунок 34, *а*, *б*).

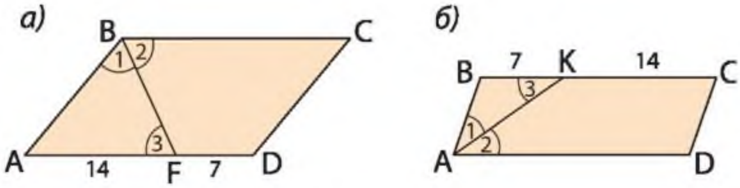


Рисунок 34

Р е ш е н и е. 1) Пусть проведена биссектриса BF, $AF = 14$ см, $FD = 7$ см (рисунок 34, *а*). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ (так как BF – биссектриса). $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей BF). Получили, что в ΔABF два угла равны ($\angle 1 = \angle 3$), значит он равнобедренный. Следовательно, $AB = AF = 14$ см. В параллелограмме $AB = CD = 14$ см, $BC = AD = 14 + 7 = 21$ (см). Тогда $P_{ABCD} = 2(14 + 21) = 70$ (см).

2) Если проведена биссектриса AK и $BK = 7$ см, $KC = 14$ см (рисунок 34, *б*), то, рассуждая аналогично, получим в ΔABK $AB = BK = 7$ см. Тогда в параллелограмме $AB = CD = 7$ см, а $P_{ABCD} = 2(7 + 21) = 56$ (см).

О т в е т. 1) 70 см; 2) 56 см.

ВОПРОСЫ

1. Что называется параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом?

2. Что называется трапецией? Какая трапеция называется равнобедренной, прямоугольной?

3. Докажите, что у параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

4. Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

49. а) В прямоугольнике $ABCE$ проведена диагональ AC. Известно, что $\angle CAB = 2 \cdot \angle ACB$. Найдите периметр прямоугольника, если $AC = 10$ см, $BC = a$ см.

б) Постройте квадрат $PEFL$ со стороной 3 см и его диагональ PF. Найдите углы EPF, EFP и FPL.

в) Периметр ромба $MNPK$ равен 12 дм. Найдите его углы M и N, если диагональ NK равна стороне MK.

г) В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD $\angle A = 55°$, $\angle C = 140°$. Найдите два других угла этой трапеции.

д) Дан параллелограмм $EFGH$. Биссектрисы его углов E и F пересекаются в точке K. Найдите $\angle EKF$.

50. По данным на рисунке 35, *а*, *б* найдите: а) углы параллелограмма $RFQP$; б) углы параллелограмма $ABCD$ и докажите, что он является ромбом.

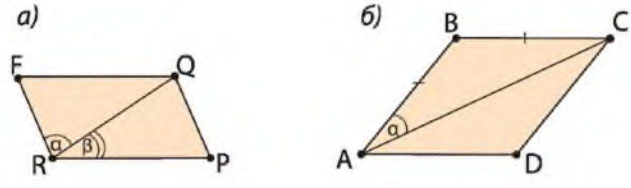


Рисунок 35

Уровень B

51. а) Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются на стороне AD. Докажите, что $AD = 2AB$.

б) Биссектриса угла M параллелограмма $LMNP$ пересекает сторону LP в ее середине K. Найдите периметр параллелограмма, если $NP = 25$ мм и $\angle N = 60°$.

52. Найдите углы параллелограмма, если: а) сумма двух его противоположных углов равна 94°; б) разность двух из них равна 70°.

53. В параллелограмме $ABCD$ $BC : AB = 1 : 2$. Середина M стороны AB соединена отрезками с вершинами C и D. Докажите, что $\angle CMD$ равен 90°.

54. $ABCD$ – параллелограмм, отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 лежат на биссектрисах его углов (рисунок 36). Установите вид четырехугольника $MNKL$.

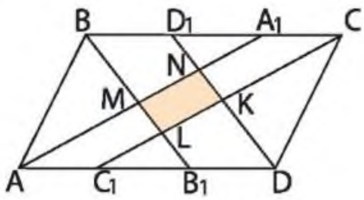


Рисунок 36

55. По данным на рисунке 37, *а*, *б*, *в* найдите: а) периметр параллелограмма $ABCD$; б) углы параллелограмма $EKMP$; в) углы и периметр параллелограмма $QRST$.

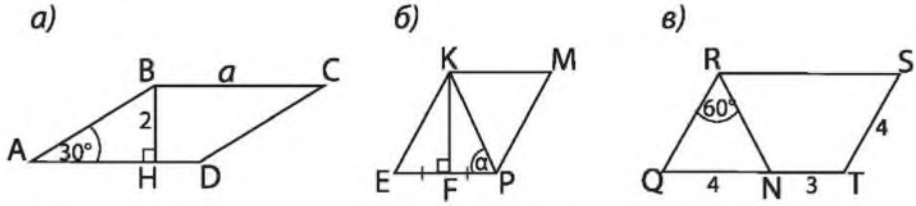


Рисунок 37

56. а) В параллелограмме $ABCM$ $AB = 6$ см, диагонали $AC = 5$ см, $BM = 9$ см. Найдите $P_{\Delta AOB}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

б) Докажите, что отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей параллелограмма, концы которого принадлежат его противоположным сторонам, делится этой точкой пополам.

57. Найдите углы параллелограмма, если: а) один из углов параллелограмма в 3 раза больше другого его угла; б) один из его углов составляет 25 % другого угла параллелограмма.

58. а) Биссектриса одного из углов параллелограмма делит его сторону на отрезки 3 см и 4 см. Найдите периметр параллелограмма.

б) На отрезки какой длины делит сторону биссектриса одного из углов параллелограмма, если его периметр 28 см, а одна из сторон 5 см?

в) Стороны параллелограмма равны a и b ($a > b$). Найдите отрезки, на которые биссектриса угла параллелограмма делит его большую сторону.

59. а) Дан параллелограмм $MNPK$, в котором $\angle P = 60°$. Перпендикуляр ND, проведенный к стороне MK, делит ее на отрезки, равные 3 см и 5 см. Найдите стороны и углы параллелограмма.

б) Постройте параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ см и $BC = 8$ см, если перпендикуляр BH, проведенный к стороне AD, делит ее пополам.

Уровень С

60. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведена биссектриса этого угла, которая пересекает сторону CD в точке F, а продолжение стороны BC – в точке E. Докажите, что треугольник CEF равнобедренный.

61. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ делят сторону CD на три отрезка. Найдите длину каждого отрезка, если стороны параллелограмма равны 5 см и 12 см.

3. Признаки параллелограмма

Т е о р е м а (*первый признак параллелограмма*). **Четырехугольник является параллелограммом, если две его стороны равны и параллельны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$ и $BC = AD$. Проведем диагональ AC четырехугольника (рисунок 38). Тогда $\Delta BCA = \Delta DAC$ по первому признаку равенства треугольников ($BC = AD$ по условию, CA – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC). Из равенства треугольников следует, что $\angle 3 = \angle 4$.

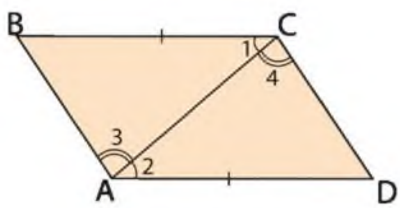


Рисунок 38

Значит прямые AB и CD параллельны по первому признаку параллельности прямых. Получили, что в четырехугольнике противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, он является параллелограммом.

Т е о р е м а (*второй признак параллелограмма*). **Четырехугольник является параллелограммом, если противоположные стороны его попарно равны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = DC$, $BC = AD$ (рисунок 39). Проведем диагональ AC четырехугольника $ABCD$. Тогда:

1) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по третьему признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$;

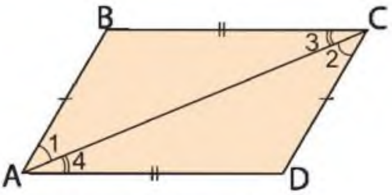


Рисунок 39

2) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ по первому признаку параллельности прямых;

3) четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (по определению параллелограмма). Теорема доказана.

Т е о р е м а (*третий признак параллелограмма*). **Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник является параллелограммом.**

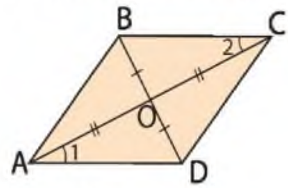


Рисунок 40

Д о к а з а т е л ь с т в о (рисунок 40).

1) $\Delta AOD = \Delta BOC$ (по первому признаку равенства треугольников).

2) $BC = AD$ (как соответственные стороны равных треугольников).

3) $\angle 1 = \angle 2$ (как соответственные углы равных треугольников).

4) $BC \parallel AD$ (по первому признаку параллельности прямых).

5) $ABCD$ – параллелограмм (по первому признаку параллелограмма). Теорема доказана.

З а д а ч а. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Известно, что периметры треугольников ABO, BCO, CDO и ADO равны. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – ромб.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что в точке O диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся пополам. Используем метод от противного. Допустим, что $OC \geq OA$, а $OD \geq OB$. Отложим на отрезке OC отрезок OM, равный отрезку OA, а на отрезке OD отрезок OK, равный отрезку OB (рисунок 41). Тогда четырехугольник

$ABMK$ – параллелограмм. Следовательно, периметры треугольников AOB и OMK равны. Учитывая условие задачи, получили $P_{\Delta OMK} = P_{\Delta OCD}$, чего быть не может, т. к. $KM < MC + CD + DK$. Значит, допущение неверно, а верно, что $OC = OA$ и $OD = OB$. Поэтому, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Поскольку периметры треугольников ABO и BOC равны по условию и $AO = OC$, а сторона OB у них общая, то $AB = BC$. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ – ромб.

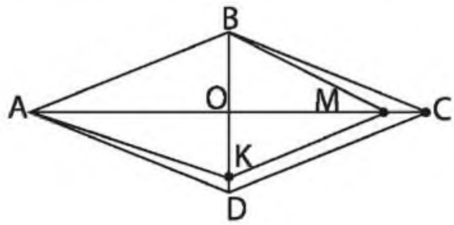


Рисунок 41

ВОПРОСЫ

Сформулируйте и докажите признаки параллелограмма.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

62. Из предложенных утверждений выберите и докажите теорему, которая является обратной к теореме – противоположные стороны параллелограмма равны: а) если противоположные стороны четырехугольника равны, то он является параллелограммом; б) если хотя бы две стороны четырехугольника равны, то это параллелограмм; в) если в четырехугольнике противоположные стороны не равны, то он не является параллелограммом.

63. а) Дано: $ABFG$ и $DCFG$ – параллелограммы (рисунок 42, *а*). Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

б) Дано: $MNKL$ – параллелограмм, $NE \perp MK$; $LH \perp MK$ (рисунок 42, *б*). Докажите, что $NE \parallel LH$ и $NE = LH$.

в) Дано: $OPQR$ – параллелограмм, $OS = QT$ (рисунок 42, *в*). Докажите, что $SPTR$ – параллелограмм.

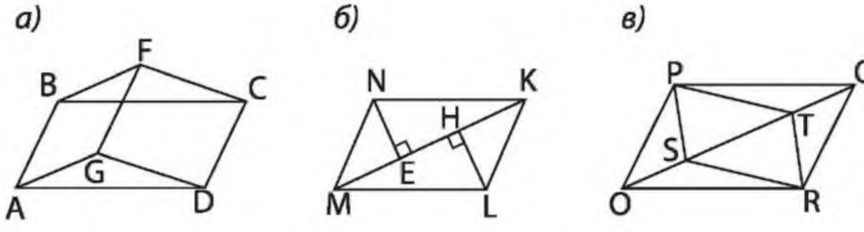


Рисунок 42

Уровень B

64. а) Как, используя признаки параллелограмма, можно: 1) установить, параллельны ли края прямой дороги; 2) имеет ли форму параллелограмма четырехугольная пластинка?

б) Является ли параллелограммом четырехугольник: 1) имеющий две пары равных противоположных углов; 2) две стороны которого не равны, а две другие параллельны?

65. а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ параллелограмм, если его вершины являются серединами сторон: 1) прямоугольника; 2) ромба.

б) В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD = 2BC$, точка M – середина AD. Докажите, что четырехугольники $ABCM$ и $MBCD$ параллелограммы.

66. а) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является параллелограммом.

б) Дан параллелограмм $MNPK$. На лучах MN, NP, PK и KM отложены соответственно равные отрезки NA, PB, KC и MD. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

в) Даны две окружности с общим центром и проведены их пересекающиеся диаметры. Докажите, что концы этих диаметров являются вершинами параллелограмма.

Уровень C

67. а) В прямоугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов A и C, которые пересекают стороны BC и AD в точках M и N соответственно. Установите вид четырехугольника $AMCN$.

б) Дан параллелограмм $KBFD$. На его сторонах BF и KD отмечены соответственно точки C и A такие, что $\angle ABK = \angle CDF$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

в) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на его ребрах BC и DA отложены равные отрезки BM и DK. Докажите, что четырехугольник $AMCK$ – параллелограмм.

68. Дана окружность с центром O. Через некоторую точку A к окружности проведены две касательные, угол между которыми равен 120°. Через точку B, симметричную точке A относительно центра O, проведены еще две касательные к данной окружности. Докажите, что четырехугольник, образованный касательными, является параллелограммом и найдите его периметр, если $AO = 3$ см.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Проведите две пересекающиеся прямые и от их общей точки отложите на этих прямых четыре равных отрезка. Постройте четырехугольник, соединив последовательно концы этих отрезков. Измерьте его углы и сравните их.

4. Свойства и признаки прямоугольника

Так как каждый прямоугольник является параллелограммом, то он обладает свойствами параллелограмма. Например: 1) противоположные стороны прямоугольника параллельны и равны; 2) диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.

Теорема (*свойство прямоугольника*). **Диагонали прямоугольника равны.**

Доказательство. $\Delta ADC = \Delta DAB$ (рисунок 43) как прямоугольные по двум катетам (AD – общий, $AB = DC$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$). Поэтому $AC = BD$.

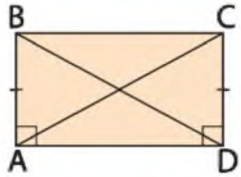


Рисунок 43

Теорема (*первый признак прямоугольника*). **Если два угла параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равны, то он является прямоугольником.**

Доказательство. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°. Так как по условию эти углы равны, то каждый из них прямой. Следовательно, и два других угла – прямые. Параллелограмм, все углы которого прямые, – прямоугольник.

Теорема (*второй признак прямоугольника*). **Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.**

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ (рисунок 44) диагонали AC и BD равны. Как известно, диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Поэтому имеем $AO = OB = OC$. Следовательно, треугольники AOB и BOC – равнобедренные; $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Поскольку $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, то $\angle 2 + \angle 3 = 90° = \angle ABC$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником, так как и остальные его углы прямые.

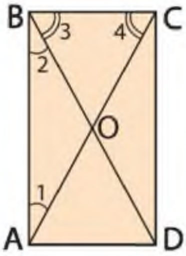


Рисунок 44

З а д а ч а. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, если его вершины имеют следующие координаты: $A(-3; -3)$, $B(-3; 1)$, $C(3; 1)$, $D(3; -3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим четырехугольник $ABCD$ в координатной плоскости (рисунок 45). Так как точки A и B и точки D и C имеют одинаковые абсциссы, то точки A и B, D и C лежат на прямых, параллельных оси Oy. Следовательно, $AB \parallel DC$. Так как точки A и D и точки B и C имеют одинаковые ординаты, то точки A и D, B и C лежат на прямых, параллельных оси Ox. Следовательно, $AD \parallel BC$. Оси Ox и Oy взаимно перпендикулярны, следовательно, $AD \perp DC$, $AD \perp AB$, значит, $ABCD$ – прямоугольник.

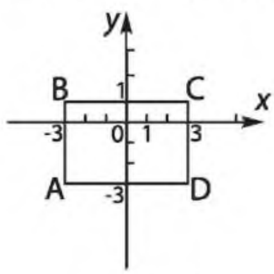


Рисунок 45

ВОПРОСЫ

1. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

2. Сформулируйте и докажите признаки прямоугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

69. Докажите, что: а) выпуклый четырехугольник, все углы которого равны, есть прямоугольник; б) выпуклый четырехугольник является прямоугольником, если все отрезки, на которые разбиваются его диагонали их точкой пересечения, равны.

70. Два угла четырехугольника прямые. Является ли он прямоугольником? Ответ объясните.

71. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOD – равнобедренный.

Уровень B

72. а) Периметр прямоугольника равен 48 см. Найдите его стороны, если они относятся как 1 : 2.

б) Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит сторону BC на части 2 см и 6 см. Найдите периметр прямоугольника.

в) Найдите меньший из углов между диагоналями прямоугольника, если его меньшая сторона относится к диагонали как 1 : 2.

73. а) Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 60°. Найдите его диагонали, если меньшая сторона прямоугольника равна 17 см.

б) Диагональ прямоугольника делит его угол в отношении 1 : 2. Найдите ее длину, если сумма обеих диагоналей и двух меньших сторон равна 24 см.

Уровень C

74. а) Сколько кафельных плиток размером 30 см × 20 см понадобится, чтобы выложить пол в комнате длиной 2,4 м и шириной 1,8 м?

б) Как нужно укладывать доски ламината размером 80 см × 20 см, чтобы 77 досок хватило для покрытия пола в комнате длиной 4 м и шириной 3 м?

75. а) В прямоугольнике $ABCD$ проведен перпендикуляр BH к диагонали AC, который делит угол B в отношении 4 : 5. Найдите угол HBD.

б) Дан прямоугольник со сторонами 6 см и 2 см. Биссектрисы его углов, пересекаясь, образуют четырехугольник $MNPK$. Установите его вид и найдите диагонали.

5. Свойства и признаки ромба

Так как ромб – это параллелограмм, в котором все стороны равны, то он обладает свойствами параллелограмма. Например: 1) диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам; 2) противоположные углы ромба равны.

Т е о р е м а (*свойства ромба*). **Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ – ромб и M – точка пересечения его диагоналей AC и BD (рисунок 46). Тогда по свойству параллелограмма $BM = MD$. Медиана CM равнобедренного треугольника BCD является его высотой и биссектрисой. Поэтому $CA \perp BD$, а диагональ CA – биссектриса угла BCD, значит, делит его пополам. Для диагонали BD доказательство аналогичное. (Проведите его самостоятельно.)

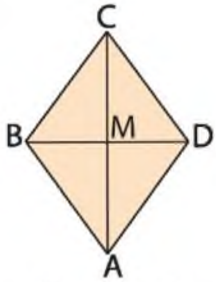


Рисунок 46

Т е о р е м ы (*признаки ромба*). 1) **Если в параллелограмме диагональ делит его угол пополам, то он является ромбом.** 2) **Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть AC – биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ (рисунок 47). Так как $\angle 1 = \angle 2$ (по условию) и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AC), то $\angle 1 = \angle 3$. Поэтому треугольник ABC равнобедренный и $AB = BC$. Следовательно, в параллелограмме $ABCD$ все четыре стороны равны. Значит, он является ромбом.

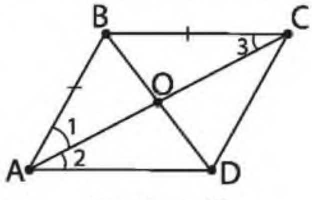


Рисунок 47

2) Докажите самостоятельно.

Напомним некоторые понятия, связанные с осевой симметрией. Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно прямой* l, если эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку

AA_1, $AA_1 \perp l$ и $AM = MA_1$ (рисунок 48). Каждая точка прямой l симметрична самой себе.

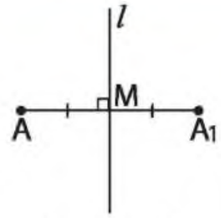


Рисунок 48

Фигура называется *симметричной относительно прямой l*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно l также принадлежит этой фигуре. Прямая l называется *осью симметрии фигуры*.

Рисунок 49

Рассмотрим примеры фигур, которые имеют ось симметрии (рисунки 49, 50). Для угла осью симметрии является прямая, на которой лежит его биссектриса (рисунок 50, *а*). Докажите это самостоятельно, проведя прямые, перпендикулярные биссектрисе BF и пересекающие стороны угла. Прямая, на которой лежит медиана (высота, биссектриса) равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является осью симметрии этого треугольника (рисунок 50, *б*).

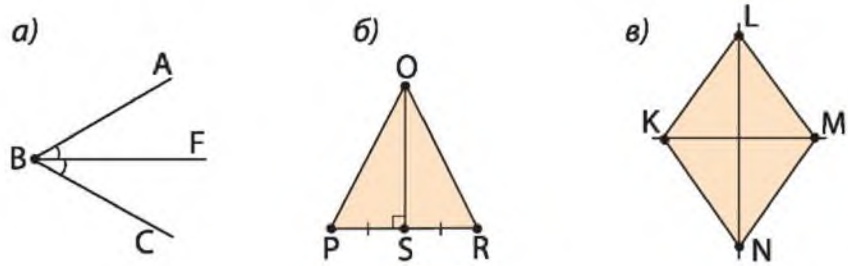


Рисунок 50

З а д а ч а. Доказать, что осями симметрии ромба являются прямые, на которых лежат его диагонали.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть *KM* и *LN* – диагонали ромба *KLMN* (рисунок 50, *в*). Тогда биссектриса *LN* является осью симметрии угла *KLM*, а биссектриса *NL* – осью симметрии угла *KNM*. Значит, прямая *LN* является осью симметрии ромба *KLMN*. Докажите самостоятельно, что и прямая *KM* является осью симметрии ромба *KLMN*.

ВОПРОСЫ

1. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

2. Сформулируйте и докажите один из признаков ромба.

3. Приведите примеры фигур, имеющих: а) одну; б) две; в) три; г) четыре оси симметрии; д) бесконечно много осей симметрии.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

76. Установите, какие из утверждений верны: а) любой параллелограмм является ромбом; б) любой ромб является параллелограммом; в) квадрат – это прямоугольник.

77. Диагональ ромба образует с одной из его сторон угол 40°. Найдите углы ромба.

78. В ромбе *ABCD* диагональ *BD* равна его стороне. Найдите: а) углы ромба; б) $\angle BAC$, $\angle CBD$.

Уровень В

79. а) Сторона *DC* ромба *ABCD* образует с продолжениями его диагоналей *BD* и *AC* за точки *D* и *C* углы *FDC* и *ECD* соответственно, которые относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

б) В ромбе *MNPK* проведены перпендикуляры *NF* и *NH* к сторонам *MK* и *KP* соответственно. Найдите углы ромба, если $\angle FNH =$ $= 54°$.

80. а) Докажите, что четырехугольник *ABCD*, для которого прямые *AC* и *BD* являются осями симметрии, есть ромб.

б) Треугольник ANK – равносторонний. Точки B, C и D – середины его сторон AN, NK и AK соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – ромб.

Уровень С

81. а) Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC. Докажите, что четырехугольник $ABCB_1$ – ромб.
б) Четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой AC. Найдите стороны BC и AD, если $AB = 1$ дм, $CD = 2$ дм.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Проведите две пересекающиеся перпендикулярные прямые и от их общей точки отложите на этих прямых четыре равных отрезка. Постройте четырехугольник, соединив последовательно концы этих отрезков. Измерьте: а) длины его сторон; б) углы. Сравните эти величины.

6. Свойства и признаки квадрата

Квадрат – прямоугольник, все стороны которого равны.

Диагонали квадрата: 1) равны; 2) точкой пересечения делятся пополам; 3) взаимно перпендикулярны; 4) лежат на биссектрисах его углов (рисунок 51, *а*). Квадрат имеет четыре оси симметрии (рисунок 51, *б*).

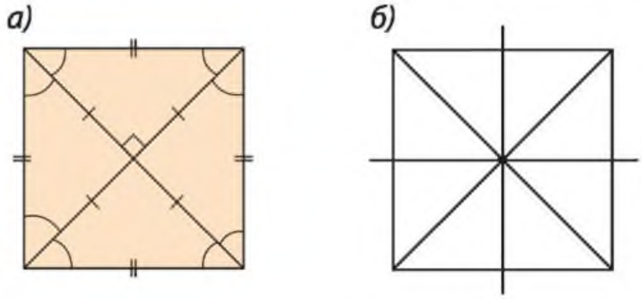


Рисунок 51

Т е о р е м ы (*признаки квадрата*). 1) **Если в прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является квадратом.** 2) **Если в ромбе диагонали равны, то он является квадратом.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $ABCD$ – прямоугольник, диагонали AC и BD которого взаимно перпендикулярны (рисунок 52). Всякий прямоугольник является параллелограммом. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то он является ромбом. Получаем $AB = BC = CD = DA$.

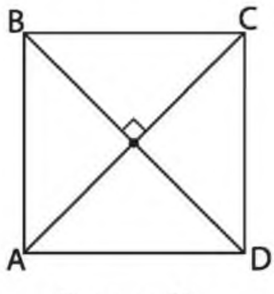


Рисунок 52

Таким образом, в прямоугольнике $ABCD$ все стороны равны. Значит, он является квадратом.

2) Докажите самостоятельно.

З а д а ч а. Прямая MN пересекает стороны AB и CD квадрата $ABCD$ в точках M и N, а перпендикулярная ей прямая PE пересекает его стороны BC и AD в точках P и E. Сравнить длины отрезков MN и PE (рисунок 53, *а*).

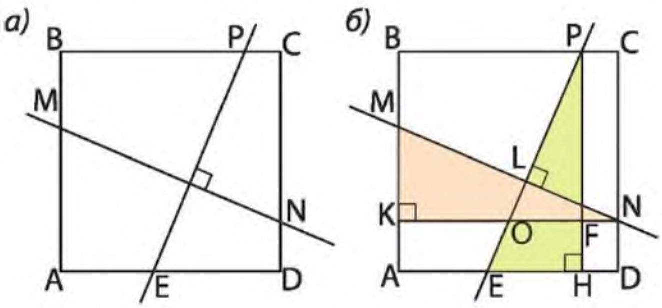


Рисунок 53

Р е ш е н и е. Проведем из точек P и N перпендикуляры PH и NK к противоположным сторонам квадрата (рисунок 53, *б*). Тогда $PH = AB = NK = AD$. Обозначим точки пересечения отрезков PE и MN – точка L, PE и KN – точка O, KN и PH – точка F. Тогда в прямоугольных треугольниках OPF и OLN угол O – общий, значит, $\angle FPO = \angle LNO$ (так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°). Следовательно, прямоугольные треугольники KNM и HPE равны (по катету и острому углу). Тогда $MN = PE$.

О т в е т. Отрезки MN и PE равны.

ВОПРОСЫ

1. Перечислите известные вам свойства квадрата.

2. Сформулируйте и докажите признаки квадрата.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

82. Установите, какие из утверждений верны: а) диагонали прямоугольника равны; б) если диагонали четырехугольника равны, то он является прямоугольником; в) диагонали квадрата равны и перпендикулярны; г) если диагонали четырехугольника равны и перпендикулярны, то он является квадратом.

83. а) В параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны. Можно ли утверждать, что такой четырехугольник является квадратом?

б) Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Из вершины его прямого угла C проведена биссектриса CD и перпендикуляры DM и DN к сторонам AC и BC соответственно. Установите вид четырехугольника $DMCN$.

84. Диагонали квадрата $ABCP$ пересекаются в точке O. Вычислите углы ΔAOB.

Уровень В

85. а) Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная AC и пересекающая прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.

б) Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям, которые, пересекаясь, образуют четырехугольник. Установите его вид и найдите периметр четырехугольника, если диагональ квадрата равна 4,5 см.

86. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найдите периметр квадрата, если гипотенуза равна 12 см.

87. Дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = CB = 16$ см, и квадрат $CKMN$. Причем $K \in AC$, $N \in CB$, $M \in AB$. Найдите периметр квадрата.

Уровень С

88. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD – его биссектриса. На сторонах BC и AC отмечены точки K и F соответственно так, что $DK \parallel AC$, $DF \parallel BC$. Докажите, что $CKDF$ – квадрат.

89. Участок имел форму квадрата. Изгородь вокруг него была снесена. Остались только два столба на двух параллельных его сторонах. Как восстановить границы участка, если шестом отмечен центр его симметрии? Всегда ли это возможно сделать?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте равнобедренную трапецию. Измерьте: а) ее диагонали; б) углы при большем основании трапеции. Сравните эти величины.

7. Свойства и признаки трапеции

Т е о р е м а (*свойство трапеции*). **В трапеции сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180°, а сумма углов, прилежащих к основанию, не равна 180°.**

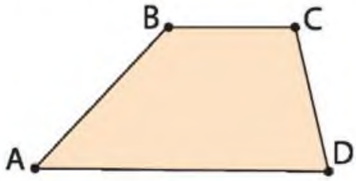


Рисунок 54

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC (рисунок 54). Тогда $AD \parallel BC$, а $\angle A + \angle B = 180°$ по свойству односторонних углов при параллельных прямых AD и BC и секущей AB. Сумма углов трапеции, прилежащих к основанию, не может быть равна 180°. Если бы она была равна 180°, то четырехугольник $ABCD$ был бы параллелограммом, а это противоречит условию, что $ABCD$ – трапеция.

Т е о р е м а (*признак трапеции*). **Если в четырехугольнике сумма углов, прилежащих к какой-либо стороне, равна 180°, а сумма его углов, прилежащих к соседней стороне, не равна 180°, то такой четырехугольник является трапецией.**

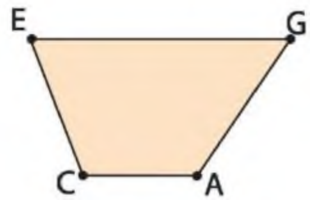


Рисунок 55

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в четырехугольнике $AGEC$ сумма углов C и E, прилежащих к стороне CE, равна 180° (рисунок 55), а сумма углов A и C не равна 180°. Углы C и E являются односторонними при прямых AC и GE и секущей CE. По признаку параллельности прямых стороны AC и GE параллельны. Две другие стороны четырехугольника AG и CE не параллельны, так как по условию $\angle A + \angle C \neq 180°$. Следовательно, четырехугольник $AGEC$ – трапеция.

Докажите самостоятельно следующие свойства (1) и признаки (2) равнобедренной трапеции:

1) в равнобедренной трапеции углы при основании и диагонали равны;

2) если в трапеции равны углы при основании либо равны диагонали, то она является равнобедренной.

ВОПРОСЫ

1. Чему равна сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции?

2. Докажите, что углы при основании неравнобедренной трапеции не равны.

3. Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

90. а) Докажите, что диагонали трапеции в точке пересечения не делятся пополам.

б) Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон равнобедренной трапеции, параллелограмм.

91. Диагональ AC трапеции $ABCD$ перпендикулярна ее боковой стороне CD. Основание BC равно боковой стороне AB, $\angle ADC = 55°$. Найдите остальные углы этой трапеции.

Уровень B

92. DM и CK – биссектрисы углов D и C трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Найдите угол между этими биссектрисами.

93. Найдите углы равнобедренной трапеции $ABCD$ с большим основанием AD, если $\angle C - \angle A = 80°$.

94. Периметр трапеции равен 40 см, меньшее основание – 10 см. Через конец меньшего основания проведена прямая, параллельная боковой стороне трапеции. Найдите периметр полученного треугольника.

95. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с большим основанием AD перпендикуляр BH делит основание AD на отрезки 3,5 см и 8,5 см. Найдите основания этой трапеции.

96. В равнобедренной трапеции большее основание 7,5 см, боковая сторона 2 см, а ее острый угол 60°. Найдите периметр этой трапеции.

Уровень C

97. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC делит угол A пополам и $AC \perp CD$. Найдите стороны этой трапеции, если ее периметр 25 см, а $\angle D = 60°$.

98. Докажите, что если трапеция имеет ось симметрии, то она равнобедренная.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Даны два отрезка 6 см и 4 см. Постройте, используя циркуль и линейку: а) ромб, диагонали которого равны данным отрезкам; б) параллелограмм с диагоналями 4 см и 6 см, отличный от ромба.

8. Построение четырехугольников циркулем и линейкой

З а д а ч а. Построить ромб с помощью циркуля и линейки по двум данным отрезкам, равным его диагоналям.

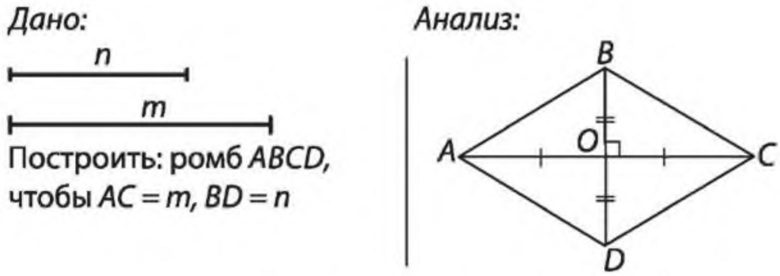


Рисунок 56

Р е ш е н и е. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Используем это свойство для построения ромба (рисунок 56).

1) Разделим отрезок n пополам (рисунок 57, *а*).

2) Построим серединный перпендикуляр к отрезку $AC = m$ и обозначим буквой O точку пересечения его с этим отрезком (рисунок 57, *б*).

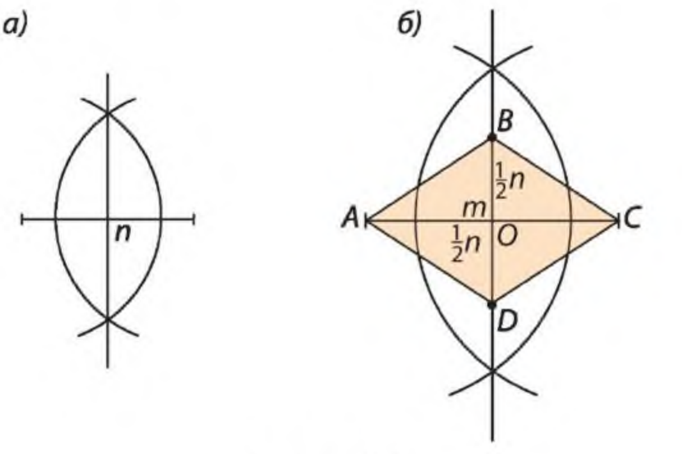


Рисунок 57

3) Отложим на серединном перпендикуляре от точки O по обе стороны относительно прямой AC отрезки $OB = OD = \frac{1}{2}n$. Проведем отрезки AB, BC, CD и DA. Тогда четырехугольник $ABCD$ – ромб, так как по построению его диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Задача имеет единственное решение, так как к отрезку можно провести только один серединный перпендикуляр и на луче от его начала можно отложить только один отрезок данной длины.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

99. Постройте с помощью циркуля и линейки параллелограмм: а) по двум соседним сторонам и углу между ними; б) по данным диагоналям и углу между ними.

Уровень В

100. Постройте с помощью циркуля и линейки: а) квадрат по его диагонали; б) ромб по его диагонали и углу между стороной и второй диагональю.

Уровень С

101. Постройте квадрат, если дан отрезок, равный сумме диагонали с его стороной.

102. а) Постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольную трапецию, если даны ее большее основание и боковые стороны.

б) Используя признаки параллелограмма, постройте: 1) отрезок, параллельный данной прямой; 2) параллелограмм, если даны три точки, являющиеся его вершинами.

9. Теорема Фалеса

Теорема (*теорема Фалеса, древнегреческого ученого VI в. до н. э.*). **Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на этой прямой равные между собой отрезки.**

Доказательство. Пусть на прямой a отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую b в точках B_1, B_2, B_3, … (рисунок 58). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

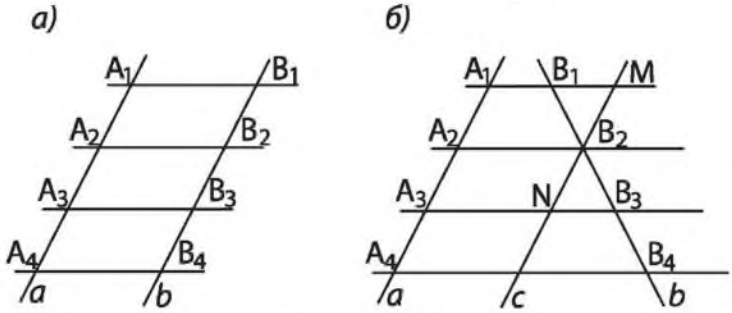


Рисунок 58

Рассмотрим сначала случай, когда прямые a и b параллельны (рисунок 58, *а*). Тогда $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$.

Если прямые a и b не параллельны, то через точку B_2 проведем прямую c, параллельную прямой a (рисунок 58, *б*). Она пересечет прямые A_1B_1 и A_3B_3 в некоторых точках M и N. Так как $B_2M = B_2N$ (по доказанному выше), то $\Delta B_1MB_2 = \Delta B_2NB_3$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($\angle NB_2B_3 = \angle MB_2B_1$ как вертикальные, $\angle B_1MB_2 = \angle B_3NB_2$ как накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей c). Отсюда следует, что $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

Задача 1. Разделить данный отрезок AB на n равных частей.

Р е ш е н и е. 1. Проведем луч AC, не лежащий на прямой AB.

2. Отложим на нем от точки A последовательно столько равных отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (например, на рисунке 59 $n = 5$).

3. Проведем прямую через конец последнего отрезка и точку B.

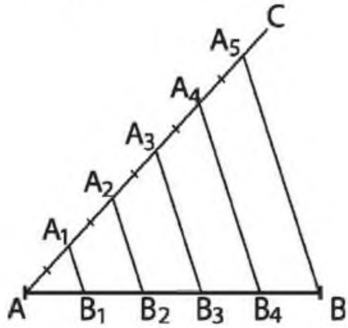


Рисунок 59

4. Построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, …, A_{n-1} и параллельные этой прямой.

5. Точки B_1, B_2, …, B_{n-1}, пересечения этих прямых с отрезком AB, по теореме Фалеса разделят его на n равных частей.

Отметим, например, что $\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$, так как каждое из этих отношений равно $\frac{1}{2}$.

Если отношение длин двух отрезков $\frac{AB}{A_1B_1}$ равно отношению длин отрезков $\frac{CD}{C_1D_1}$, то отрезки AB и CD называются *пропорциональными* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1. Например, если $AB = 15$ см, $A_1B_1 = 20$ см, $CD =$ $= 12$ см, $C_1D_1 = 16$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{3}{4}$, отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1. Понятие пропорциональности отрезков рассматривается и для большего их числа. Например, три отрезка AB, CD и MK пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и M_1K_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MK}{M_1K_1}$.

Т е о р е м а (*о пропорциональных отрезках*). **Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть параллельные прямые HM и H_1M_1 пересекают стороны угла BAC (рисунок 60, *а*). Докажем, что $\frac{AH_1}{AM_1} =$ $= \frac{AH}{AM}$.

Рассмотрим сначала случай, когда можно выбрать такой отрезок a, который укладывается целое число n раз на отрезке AH_1 и целое число m раз на отрезке AH. Тогда $AH_1 = na$ и $AH = ma$. По теореме Фалеса отрезок AM_1 разделится на n равных отрезков, а отрезок AM на m равных отрезков. Обозначим длину одного из таких отрезков b, тогда $AM_1 = nb$, $AM = mb$. Получим: $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$, $\frac{AH}{AM} = \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$. Следовательно, $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$.

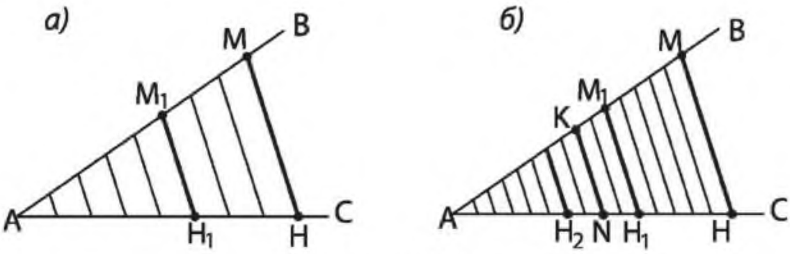


Рисунок 60

Пусть отрезок a указанным образом выбрать нельзя. Докажем способом от противного, что и в этом случае $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$. Допустим, что $\frac{AH_1}{AM_1} \neq \frac{AH}{AM}$, например, $\frac{AH_1}{AM_1} > \frac{AH}{AM}$. Возьмем отрезок $AH_2 < AH_1$ такой, что $\frac{AH_2}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$. Разделим отрезок AH на большое число равных отрезков так, чтобы на отрезке H_2H_1 были точки деления (рисунок 60, *б*). Обозначим одну из них через N и проведем $NK \parallel HM$. Тогда, как доказано выше, $\frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AM}$. Так как $AN > AH_2$, а $AK < AM_1$, то $\frac{AH_2}{AM_1} < \frac{AN}{AK}$, следовательно, $\frac{AH_2}{AM_1} < \frac{AH}{AM}$. Но это противоречит равенству $\frac{AH_2}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$, значит, допущение неверно, а верно равенство $\frac{AH_1}{AM_1} = \frac{AH}{AM}$. Теорема доказана.

З а д а ч а 2. Разделить отрезок AB на два отрезка AX и XB так, чтобы $\frac{AX}{XB} = \frac{2}{3}$.

Р е ш е н и е. Проведем луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно 5 равных отрезков (рисунок 61, *а*). Затем конец D последнего отрезка соединим отрезком с точкой B. Через конец C второго отрезка проведем прямую CX, параллельную прямой BD. Она пересечет отрезок AB в искомой точке X, такой что $\frac{AX}{XB} = \frac{2}{3}$, это следует из теоремы о пропорциональных отрезках.

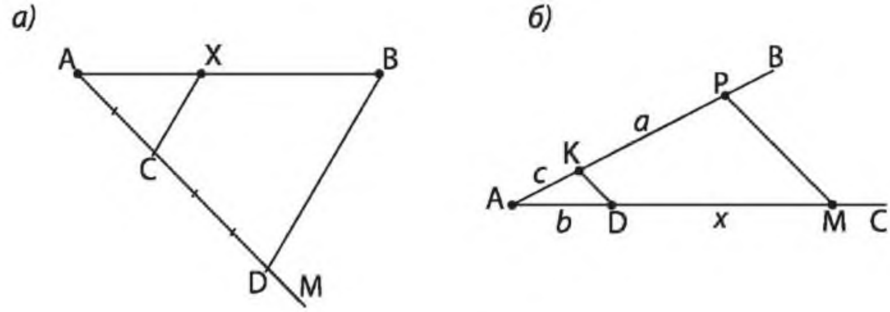


Рисунок 61

З а д а ч а 3. Даны три отрезка: a, b, c. Построить *четвертый пропорциональный отрезок* x, такой, что $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Р е ш е н и е. Данную пропорцию запишем в виде $\frac{c}{b} = \frac{a}{x}$. Построим произвольный угол BAC и от его вершины на одной стороне отложим отрезки $AK = c$ и $KP = a$, а на другой стороне – отрезок $AD = b$ (рисунок 61, *б*). Проведем отрезок KD и построим прямую PM, ему параллельную. Тогда отрезок $DM = x$, что следует из теоремы о пропорциональных отрезках (объясните это самостоятельно).

З а д а ч а 4. Доказать, что *биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть CD – биссектриса ΔABC, в котором $BC = a$, $AC = b$, $DB = n$, $AD = m$ (рисунок 62). Докажем, что $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$.

Через точку A проведем прямую, параллельную биссектрисе CD, и обозначим точку M ее пересечения с лучом BC. Тогда BCA – внешний угол ΔACM. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то $\angle BCA = \angle CAM + \angle M$. Отсюда $\angle M = \angle BCA - \angle CAM$. Поскольку $\angle CAM = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCA$ (по свойству накрест лежащих углов при $CD \parallel AM$ и секущей AC), то $\angle M = \frac{1}{2}\angle BCA = \angle CAM$. Следовательно, ΔACM – равнобедренный и $AC = CM = b$. Значит, по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$, что и требовалось доказать.

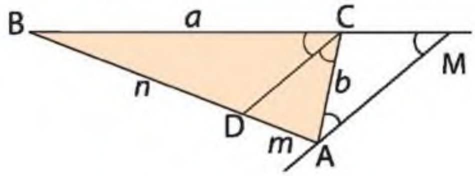


Рисунок 62

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.

2. Какие отрезки называются пропорциональными?

3. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

103. а) Найдите пропорциональные отрезки (рисунок 59), отношение которых равно: 1; $\frac{2}{3}$. б) Пропорциональны ли отрезки AB и CD отрезкам MN и PK, если: 1) $AB = 0{,}8$ см, $CD = 4$ см, $MN = 0{,}3$ см, $PK = 1{,}5$ см; 2) $AB = 7$ м, $CD = 2$ м, $MN = 3$ м, $PK = 10{,}5$ м? Если пропорциональны, то составьте пропорцию.

в) Найдите неизвестное значение x из пропорции: 1) $5 : x = 4 : 7$; 2) $5 : 4 = 2x : 13$; 3) $2 : 3 = 11 : (x + 3)$.

104. а) Разделите данный отрезок при помощи циркуля и линейки на указанное число равных частей: 1) 3; 2) 5.

б) На отрезке AB найдите точку C такую, чтобы $AC : CB = 2 : 3$.

в) На прямой AB найдите точку D такую, чтобы $AD : DB = 4 : 3$. Рассмотрите все возможные случаи расположения точек A, B и D.

Уровень B

105. а) Отрезок AB, равный 98 см, разделен на три отрезка, пропорциональных числам: 1) 2; 4; 8; 2) 3; 4; 5. Найдите длину каждого отрезка.

б) На отрезке $AC = d$ отмечена точка B такая, что $AB : BC = x : y$. Выразите длины отрезков AB и BC через d, x и y.

в) Отрезок AN – биссектриса ΔABC со сторонами $AB = 12$ см, $BC = 22$ см, $AC = 21$ см. Найдите BN и NC.

106. а) В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины E и F его сторон AD и BC соответственно. Проведены отрезки BE и DF. Докажите, что эти отрезки делят диагональ AC на три равные части.

б) В параллелограмме $ABCD$ $AC = 15$ см. Середина M стороны AB соединена отрезком с вершиной D. Найдите отрезки, на которые DM делит диагональ AC.

107. а) Через середину M стороны BC треугольника ABC проведена прямая MN, параллельная BA и пересекающая сторону AC в точке N. На ней отложен отрезок $NK = MN$. Докажите, что $ABMK$ – параллелограмм.

б) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM : MC = 4 : 5$. Построен отрезок $MN \parallel AB$, $N \in BC$. Найдите длину отрезка NB, если $CB = 4{,}5$ см.

Уровень C

108. а) Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей равнобедренной трапеции, образует с равными сторонами равные углы.

б) Даны три отрезка: a, b, c. Постройте четвертый пропорциональный отрезок x такой, что: 1) $\frac{x}{a} = \frac{a+b}{b}$; 2) $\frac{x}{a+b} = \frac{a+c}{c}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте треугольник ABC и отметьте середины M и N его сторон AB и BC соответственно. Измерьте отрезки MN и AC и сравните их.

10. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Треугольник имеет три средние линии (рисунок 63).

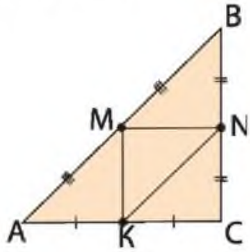


Рисунок 63

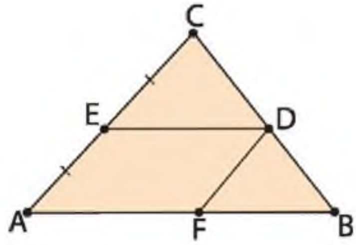


Рисунок 64

Теорема (*свойство средней линии треугольника*). **Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине**.

Доказательство. Через середину E отрезка AC проведем $ED \parallel AB$. Тогда по теореме Фалеса $CD = DB$ (рисунок 64). Таким образом, средняя линия ED треугольника ACB параллельна стороне AB. Проведем еще одну среднюю линию DF треугольника, $DF \parallel AC$. Четырехугольник $AEDF$ – параллелограмм. По свойству параллелограмма $ED = AF$, а так как $AF = FB$ по теореме Фалеса, то $ED = \frac{1}{2}AB$. Теорема доказана.

Из теоремы Фалеса следует, *что если отрезок, концы которого принадлежат двум сторонам треугольника, параллелен третьей стороне и один из его концов – середина стороны, то он является средней линией треугольника.*

Задача 1. Через середину M стороны AB ΔABC проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке N (рисунок 65). На этой прямой отложен отрезок $ND = MN$. Докажите, что $ND = \frac{1}{2} BC$, $\angle NAM = \angle DCN$, $\angle AMN = \angle NDC$.

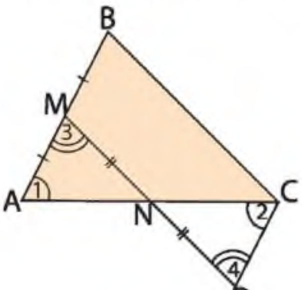


Рисунок 65

Д о к а з а т е л ь с т в о. $AN = NC$ (по теореме Фалеса). Следовательно, MN – средняя линия ΔABC и $MN = \frac{1}{2}BC = ND$. $\Delta AMN = \Delta CDN$ по первому признаку равенства треугольников ($MN = ND$, $AN = NC$, $\angle ANM = \angle CND$). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 3 = \angle 4$.

З а д а ч а 2. Дан выпуклый четырехугольник, диагонали которого равны a и b. Установить вид и найти периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AC = a$, $BD = b$, точки E, F, G, H – середины его сторон (рисунок 66). Проведем отрезок EF – реднюю линию ΔABC. Тогда $EF \parallel AC$ и $EF = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2}a$. Проведем отрезок GH – среднюю линию ΔADC. Тогда $GH \parallel AC$ и $GH = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2}a$. Получили $EF \parallel GH$ и $EF = GH$. Следовательно, четырехугольник $EFGH$ – параллелограмм (по признаку параллелограмма). Аналогично получаем $FG = EH = \frac{1}{2}b$. Тогда периметр параллелограмма $EFGH$ равен $a + b$.

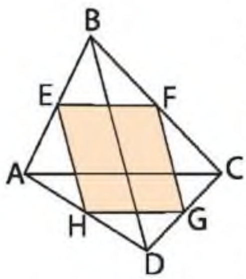


Рисунок 66

О т в е т. Параллелограмм с периметром, равным $a + b$.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение средней линии треугольника.

2. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

3. Докажите, что прямая, проведенная через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

109. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до большей стороны равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

110. Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см, 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Уровень B

111. Найдите периметр прямоугольника, вписанного в равнобедренный прямоугольный треугольник, если: а) катет треугольника 6 см (рисунок 67, *а*); б) гипотенуза треугольника равна 45 см (рисунок 67, *б*).

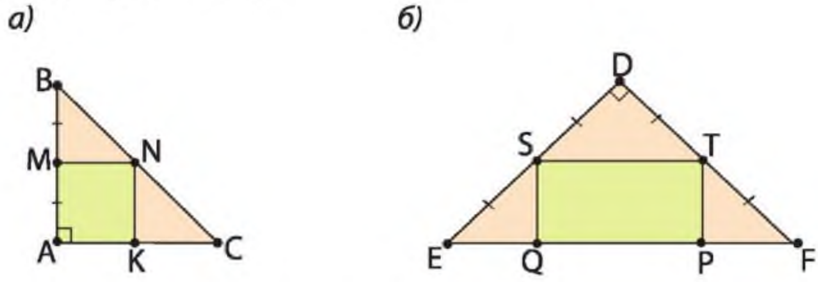


Рисунок 67

112. В равнобедренном треугольнике *ABC* стороны *AB* и *BC* равны, *ED* – средняя линия, параллельная *AC*, *DF* – средняя линия, параллельная *AB*. Докажите, что треугольники *BED* и *DFC* равны.

113. Докажите, что: а) середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба; б) середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Уровень C

114. а) На школьной доске отмечены три точки *A*, *B*, *C*, не лежащие на одной прямой. Проведите через точку *A*, с помощью циркуля и линейки прямую, параллельную прямой *BC*, используя свойство средней линии треугольника.

б) С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если данные три точки – середины его сторон.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте трапецию и отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон. Измерьте этот отрезок и основания трапеции. Сравните длину этого отрезка с суммой длин оснований трапеции.

11. Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Т е о р е м а. **Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть четырехугольник $ABCD$ – трапеция, в которой $AB \parallel DC$ и MK – средняя линия (рисунок 68). Проведем луч DK, который пересекает луч AB в точке X. Тогда $\Delta DCK = \Delta XBK$ по второму признаку равенства треугольников ($CK = KB$ по условию, $\angle CKD = \angle BKX$ как вертикальные, $\angle DCK = \angle KBX$ как накрест лежащие при $DC \parallel AB$ и секущей CB). Отсюда $DK = KX$.

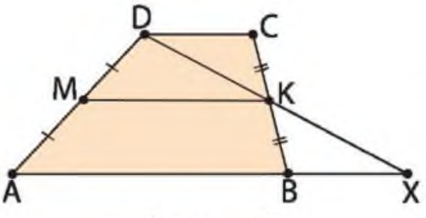


Рисунок 68

Получили, что MK – средняя линия ΔADX. По свойству средней линии треугольника $MK \parallel AX$. Так как $AX \parallel DC$, то $MK \parallel DC$ (две прямые MK и DC, параллельные третьей прямой AX, параллельны). По свойству средней линии треугольника $MK = \frac{1}{2}AX = \frac{1}{2}(AB + BX)$. Заменив отрезок BX на равный ему отрезок DC, получим $MK = \frac{1}{2} \cdot (AB + DC)$. Теорема доказана.

З а д а ч а 1. Доказать, что если биссектрисы углов при меньшем основании трапеции пересекаются на большем ее основании, то длина большего основания равна сумме длин боковых сторон трапеции.

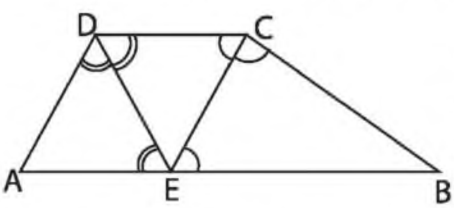


Рисунок 69

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана трапеция $ABCD$, DE и CE – биссектрисы углов D и C, E – точка пересечения этих биссектрис: E лежит на основании AB (рисунок 69). Докажем, что $AB = AD + BC$.

1) $DC \parallel AB$, DE – секущая, поэтому $\angle CDE = \angle AED$, так как эти углы – накрест лежащие. ΔDAE – равнобедренный, так как $\angle ADE = \angle AED$. Отсюда следует, что $AE = AD$.

2) $DC \parallel AB$, CE – секущая, поэтому $\angle DCE = \angle BEC$, так как эти углы – накрест лежащие. ΔCBE – равнобедренный, так как $\angle BCE = \angle BEC$. Отсюда следует, что $BE = BC$.

3) $AB = AE + EB = AD + BC$, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 2. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности длин ее оснований.

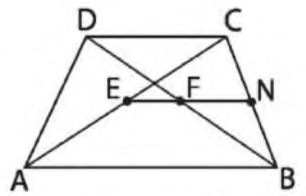


Рисунок 70

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана трапеция $ABCD$, AC и BD – ее диагонали, а E и F – их середины (рисунок 70). Докажем, что $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$.

1) Середину боковой стороны CB обозначим буквой N и проведем отрезок FN. Так как $CE = EA$, отрезок EN является средней линией ΔACB, поэтому $EN = \frac{1}{2} AB$.

2) Так как $BF = FD$, $BN = NC$, то отрезок FN является средней линией ΔDBC, поэтому $FN = \frac{1}{2} DC$.

3) Точка F лежит на отрезке EN, так как EN параллелен AB и EN параллелен DC, а N – середина BC, то по теореме Фалеса NE отсекает на прямой BD равные отрезки, т. е. проходит через середину BD, точку F.

4) $EF = EN - FN = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB - DC)$, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 3. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 112 см, а основания относятся как 3 : 5. Найти длину средней линии трапеции.

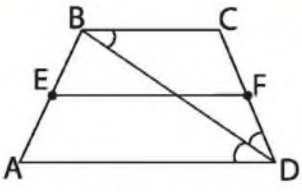


Рисунок 71

Р е ш е н и е. Пусть дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AB = DC$, DB – ее диагональ, $\angle ADB = \angle CDB$, EF – средняя линия. $\frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}$ (рисунок 71). Обозначим длину одной части x см, тогда $BC = 3x$ см, $AD = 5x$ см. $BC \parallel AD$, BD – секущая, $\angle ADB = \angle CBD$, так как эти углы – накрест лежащие. ΔCBD – равнобедренный, так как $\angle CDB = \angle CBD$. Отсюда следует, что $BC = DC = 3x$ см, значит, $AB = 3x$ см. По условию задачи $AB + BC + CD + AD = 112$ см.

Составим и решим уравнение:

$3x + 3x + 3x + 5x = 112$,

$14x = 112$, $x = 8$.

Тогда $BC = 3 \cdot 8 = 24$ (см),

$AD = 5 \cdot 8 = 40$ (см).

$EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(40 + 24) = 32$ (см).

О т в е т. 32 см.

ВОПРОСЫ

1. Что называют средней линией трапеции?

2. Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

115. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от прямой, удалены от нее на расстояния 6 см и 10 см. На каком расстоянии от этой прямой находится середина этого отрезка?

116. а) Докажите, что средняя линия трапеции делит каждую ее диагональ пополам.

б) Большее основание трапеции имеет длину 14 см. Найдите длину ее меньшего основания, если расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 3 см.

Уровень В

117. Дана трапеция с основаниями 5 см и 14 см. Разделите одну из боковых сторон на 3 равные части и из точек деления проведите к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию. Найдите длины этих отрезков.

118. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 16 см и делится диагональю на части, разность которых равна 6 см.

119. Найдите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, если она равна ее средней линии, а периметр трапеции равен 24 см.

120. Прямоугольная трапеция делится диагональю на прямоугольный и равносторонний треугольники. Найдите среднюю линию трапеции, если периметр равностороннего треугольника равен 27 дм.

121. а) Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, а расстояние между ее основаниями равно 1 дм.

б) Средняя линия трапеции делится ее диагональю на части, равные 2 см и 5 см. Вычислите углы трапеции, если каждая из ее боковых сторон равна 6 см.

Уровень C

122. а) Одна из диагоналей трапеции делит ее среднюю линию на части 5 см и 10 см. Найдите периметр трапеции, если ее диагонали лежат на биссектрисах острых углов.

б) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle D = 30°$, $BC = 10$ см. Прямые AB и DC пересекаются под прямым углом. Найдите длину боковой стороны AB трапеции, если ее средняя линия равна 16 см.

123. Верно ли, что, если отрезок, концы которого принадлежат боковым сторонам трапеции, равен полусумме ее оснований, то он является ее средней линией? Ответ объясните.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте тупоугольный треугольник и все его высоты. Что вы можете сказать о взаимном расположении прямых, содержащих эти высоты?

12. Замечательные точки треугольника

В 7 классе в процессе доказательства теоремы об окружности, описанной около треугольника, было установлено, что *серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около него*. А при доказательстве теоремы об окружности, вписанной в треугольник, установлено, что *биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, вписанной в него*.

Теорема. **Три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.**

Доказательство. Пусть дан произвольный треугольник ABC и AK, BH, CP – его высоты. Проведем через вершины A, B, C треугольника прямые, параллельные противолежащим сторонам, и обозначим точки их пересечения A_1, B_1, C_1 (рисунок 72). В параллелограммах AB_1CB и ACA_1B равны противоположные стороны: $AB = B_1C = CA_1$. Следовательно, C – середина стороны B_1A_1.

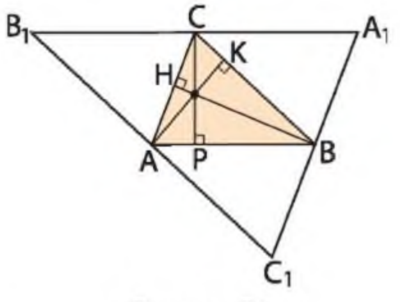


Рисунок 72

Аналогично, рассматривая параллелограммы ACA_1B и $ACBC_1$, CBC_1A и $CBAB_1$, выясняем, что точки B и A являются серединами сторон A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Следовательно, прямые, содержащие высоты AK, BH, CP треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, а такие прямые пересекаются в одной точке. Теорема доказана.

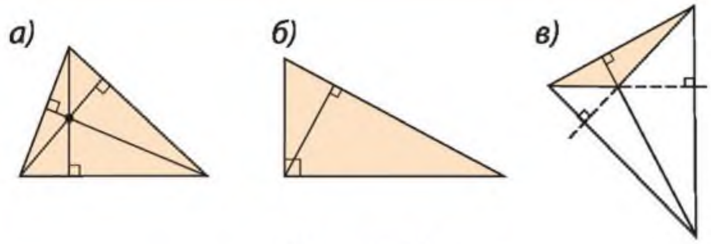


Рисунок 73

Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, называется его *ортоцентром*. Эта точка лежит внутри треугольника, если он остроугольный (рисунок 73, *а*); совпадает с вершиной прямого угла, если он прямоугольный (рисунок 73, *б*); расположена вне треугольника, если он тупоугольный (рисунок 73, *в*).

Теорема. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.**

Доказательство. Пусть дан ΔABC. Проведем его медианы AM и BN и обозначим их точку пересечения O (рисунок 74, *а*). Тогда отрезок MN – средняя линия ΔABC. Отметим середины H и K отрезков OB и OA соответственно. Отрезок HK – средняя линия ΔOAB. По свойству средней линии треугольника $MN \| AB$, $MN = \frac{1}{2}AB$; $HK \| AB$, $HK = \frac{1}{2}AB$. Следовательно, четырехугольник $KHMN$ – параллелограмм, в нем $OM = OK$, $OH = ON$. Тогда имеем $\frac{BO}{ON} = \frac{2}{1}$, $\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$.

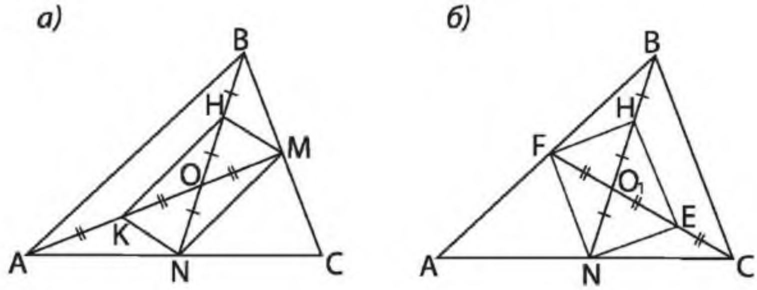


Рисунок 74

Проведем медиану CF ΔABC. Обозначим точку O_1 ее пересечения с медианой BN (рисунок 74, *б*). Отметим середину E отрезка O_1C и установим, что четырехугольник $FHEN$ – параллелограмм, а точка O_1 делит эти медианы в отношении 2 : 1, считая от вершин (сделайте это самостоятельно). Следовательно, точка O_1 совпадает с точкой O, то есть медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Точки пересечения: *медиан* треугольника, *серединных перпендикуляров* к сторонам треугольника, прямых, содержащих *высоты* треугольника, *биссектрис* треугольника называют ***замечательными точками*** треугольника.

ВОПРОСЫ

Докажите, что: а) серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке; б) медианы треугольника пересекаются в одной точке; в) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; г) прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

124. а) Точка O – центр вписанной в ΔABC окружности. Найдите $\angle C$ треугольника, если $\angle AOB = 128°$.

б) Высота равностороннего треугольника равна 4,2 см. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до его стороны.

Уровень В

125. Через центр вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая PK, параллельная стороне AC ($P \in AB$, $K \in BC$). Докажите, что $PK = AP + KC$.

126. а) Установите вид треугольника, в котором одна из его вершин и центры описанной и вписанной окружностей лежат на одной прямой.

б) Найдите наименьший радиус круга, из которого можно вырезать равносторонний треугольник с периметром 60 см.

127. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC треугольника ABC пересекаются в точке O, лежащей на стороне AB. Докажите, что: а) $AO = OB$; б) $\angle C = \angle A + \angle B$.

128. а) Сторона BC равнобедренного треугольника ABC равна 20 см. Найдите его основание AB, если серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает сторону AC в точке D и периметр треугольника ABD равен 32 см.

б) В равнобедренном ΔABC $\angle A = 120°$, BM и CN медианы, O – их точка пересечения. Из точки O проведен отрезок $OK \parallel BC$, $K \in AB$. Найдите AO, если $BK = 4$ см.

129. В равнобедренном треугольнике две медианы равны 8 см и 10 см. Может ли его боковая сторона быть равной 12 см? Ответ объясните.

130. а) Постройте треугольник по данным его стороне a и медианам m и n, проведенным к двум другим сторонам.

б) Бексултан построил треугольник ABC и в нем точку O пересечения медиан. Затем он оставил от этого треугольника только точки A, B, O и предложил Салтанат восстановить треугольник. Она с задачей успешно справилась. Как она это сделала?

в) Малика построила треугольник ABC, середины M и N его сторон AC и BC соответственно и точку K пересечения отрезков AN и BM. Затем она оставила от этого треугольника только точки M, N, K и предложила Ержану восстановить треугольник. Как он может решить эту задачу?

Уровень C

131. Постройте окружность с центром в точке O и радиусом 3 см, ее диаметр AD и хорды $AB = 4$ см, $DC = 3$ см, лежащие по одну сторону от прямой AD. При помощи одной линейки постройте прямую, перпендикулярную AD и проходящую через точку пересечения прямых AB и DC.

13. Упражнения на повторение по теме «Многоугольники. Исследование четырехугольников»

Уровень A

132. а) Верно ли, что: 1) середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника; 2) если отрезок параллелен стороне треугольника и равен ее половине, то он является его средней линией? Ответ обоснуйте.

б) Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, проходящей через середины двух его сторон.

в) Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, в котором $\angle ADC = 150°$ и сумма расстояний от точки B до сторон AD и DC равна 9 см.

Уровень B

133. Сколько природных памятников находится в казахстанском национальном парке «Кокшетау», если их количество выражается числом, полученным в ответе задачи? «Найдите периметр ромба с углом 120°, если его меньшая диагональ равна 3,25 см».

Природный парк Кокшетау

134. а) Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Найдите их длины, если они удалены от центра окружности на 2 см и 5 см.

б) Дан равнобедренный треугольник с углом 120° и боковой стороной, равной 4 см. Постройте треугольник, симметричный данному относительно прямой, содержащей его основание. Установите вид получившегося четырехугольника и найдите его меньшую диагональ.

135. Дан выпуклый четырехугольник. Выясните, при каких условиях четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника, будет:

а) прямоугольником; б) ромбом; в) квадратом.

136. а) В параллелограмме $ABCD$ биссектриса AL делит сторону BC на отрезки $BL = 3$ см, $LC = 5$ см. Докажите, что четырехугольник $ALCD$ является трапецией и найдите длину ее средней линии.

б) Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки M и N – середины его сторон AD и CD соответственно. Найдите периметр четырехугольника $MOND$, если $AB = 5$ см.

в) На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки M и N такие, что $BM : MA = BN : NC = 1 : 2$. Найдите MN, если $AC = 12$ см.

137. а) Основания трапеции равны c и p ($p > c$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины ее диагоналей.

б) Разделите данный отрезок на две части в отношении: 1) $1 : 2$; 2) $3 : 4$.

в) Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то: 1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; 2) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Уровень C

138. Докажите, что: а) отрезок, соединяющий основания двух высот, проведенных к боковым сторонам равнобедренного треугольника, параллелен основанию треугольника; б) биссектрисы углов параллелограмма со сторонами c и p ($c > p$) образуют при пересечении прямоугольник, диагональ которого равна $c - p$; в) в четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения прямых, проходящих через середины его противоположных сторон, лежат на одной прямой.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

139. 1A) В ромбе $ABCD$ угол CAD равен 35°. Найдите углы ромба.

2B) В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку C проведена прямая, параллельная боковой стороне AB и пересекающая основание AD в точке E. $AD = 12$ см, $DE = 4$ см, а периметр трапеции равен 33 см. Докажите, что $ABCE$ – параллелограмм и вычислите периметр треугольника DEC.

3B) В параллелограмме $ABCD$ от точки O – пересечения диагоналей на луче OA отложен отрезок $OM = OB$, а на луче OC отложен отрезок $OH = OB$. Докажите, что четырехугольник $MBHD$ является прямоугольником.

4C) В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD $AC \perp CD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите длину отрезка AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60°$.

5C) Дана трапеция $ABCD$. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок, равный одной трети ее средней линии.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Из какой-либо точки D его гипотенузы проведите перпендикуляр DH к катету AC. Измерьте отрезки AC, AB, AH и AD. Сравните отношения $\frac{AC}{AB}$ и $\frac{AH}{AD}$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Р. Декарт

Учение о четырехугольниках и их свойствах имеется в первых шести книгах «Начал» Евклида. Изложение теории значительно отличается от современного. В каждой книге вначале даются все определения (до 20 и больше), затем формулируются теоремы, которые называются предложениями. Доказательство теорем излагается повествовательно. Представление о тексте дают следующие примеры из первой книги: «Определение 22. Из четырехсторонних фигур квадрат есть та, которая равносторонняя и прямоугольная. Предложение 34. В образованных параллельными линиями площадях (параллелограммах) равны противоположные стороны и углы».

На протяжении многих столетий «Начала» Евклида переписывались и переиздавались во многих странах, оказывая огромное влияние на геометрическое образование людей. По ней изучали геометрию и будущие знаменитые ученые, например, Рене Декарт, Николай Иванович Лобачевский, внесшие большой вклад в развитие геометрии как науки.

Н. И. Лобачевский

Информацию о «Началах» Евклида и роли этих книг в развитии геометрии найдите в Интернете.

II. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В результате изучения раздела надо

знать

• определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла;

• теорему Пифагора и теорему, обратную ей;

• основное тригонометрическое тождество и следствия из него;

• значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°;

• основные методы решения прямоугольных треугольников.

уметь

• находить значения тригонометрических функций от 0° до 90°;

• строить углы по данным значениям их тригонометрических функций;

• доказывать теорему Пифагора;

• применять: теорему Пифагора и теорему, обратную ей, тригонометрические тождества и свойства тригонометрических функций острого угла для решения задач;

• применять тригонометрические функции острого угла для нахождения элементов прямоугольного треугольника.

14. Косинус острого угла

Возьмем какой-нибудь острый угол, например, $\angle BAC = \alpha$ (рисунок 75, *а*). На стороне AB угла отметим произвольную точку M и построим перпендикуляр MH к стороне AC. Получим прямоугольный треугольник MAH. Отношение $\frac{AH}{AM}$ сторон этого треугольника не зависит от выбора точки M, что следует из теоремы о пропорциональных отрезках. Взяв другой острый угол DAC, равный β (рисунок 75, *б*), аналогично получим, что отношение $\frac{AK}{AN}$ не зависит от выбора точки N на стороне AD. Значит, каждому острому углу прямоугольного треугольника соответствует только одно отношение катета, к которому прилежит этот угол, к его гипотенузе. Это отношение называется *косинусом* острого угла прямоугольного треугольника.

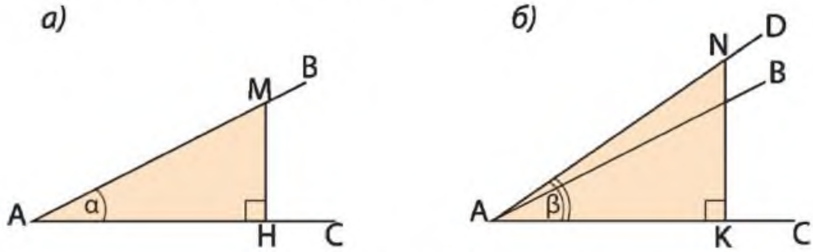


Рисунок 75

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Обозначается: $\cos A$ (или $\cos \angle A$, или $\cos \angle MAH$, рисунок 75, *а*).

З а д а ч а. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 76) $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, CH – его высота.

а) Доказать, что $\cos \angle BCH = \cos \angle A$; б) найти $\cos \angle BCH$.

Р е ш е н и е. Так как $\angle B = 30°$, то $\angle BCH = 60°$. Следовательно, $\cos \angle BCH = \cos \angle A$. В прямоугольном ΔBHC катет CH равен половине гипотенузы BC. Тогда $\cos \angle BCH = \frac{CH}{BC} = \frac{0{,}5BC}{BC} = \frac{1}{2}$.

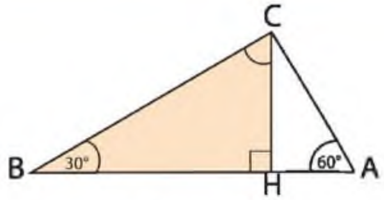


Рисунок 76

Ответ. $\frac{1}{2}$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется косинусом острого угла прямоугольного треугольника?

2. Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то косинусы этих углов равны.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

140. В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, MN – средняя линия треугольника ($M \in AB$, $N \in CB$). Найдите косинус: а) $\angle A$; б) $\angle NMB$.

141. В равнобедренном ΔMNK основание $MK = 10$ см, $NK = 13$ см, $A \in MN$, $B \in NK$, причем $AB \parallel MK$ и $MA : AN = 3 : 2$. Найдите косинус: а) $\angle M$; б) $\angle NBA$.

142. а) Дан прямоугольный ΔDFG, в котором $\angle G = 90°$, $\angle D = 30°$, Найдите косинус $\angle F$.

б) Найдите косинус угла равностороннего треугольника.

Уровень B

143. Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1, и проведена его диагональ BD, равная $\sqrt{2}$. Чему равен косинус угла BDA?

144. В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $AC = 16$ см, $CB = 12$ см. Найдите: а) косинус меньшего острого угла; б) сумму квадратов косинусов острых углов.

145. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 15 см, а катеты – 9 см и 12 см. Найдите: а) косинус большего острого угла; б) сумму косинусов острых углов.

146. а) В прямоугольном треугольнике катет равен 8 см, а косинус прилежащего к нему угла равен 0,8. Найдите его гипотенузу.

б) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 15 см, а косинус одного из острых углов равен 0,6. Найдите катет, к которому прилежит этот угол.

Уровень С

147. а) На стороне AB острого угла BAC отложен отрезок AK, равный 10 см, и отмечена его середина – точка M. Проекция отрезка MK на прямую AC равна 3 см. Найдите косинус угла BAC.

б) Отрезок AB длиной 12 см разделен точками M и N на три равные части. Проекция отрезка MN на луч AC равна 2 см. Найдите косинус угла BAC.

в) На каждой из сторон квадрата $MNPK$ с периметром 40 см построены равносторонние треугольники, не имеющие с ним общих внутренних точек. Найдите (с точностью до 0,1 см) периметр четырехугольника $ABCD$, вершинами которого являются третьи вершины этих треугольников.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте прямоугольный треугольник, измерьте его катеты и гипотенузу. Сравните сумму квадратов длин катетов с квадратом длины гипотенузы этого треугольника.

15. Теорема Пифагора и теорема, обратная ей

Теорема *Пифагора* (*древнегреческого ученого VI в. до н. э.*). **Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин его катетов**.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Докажем, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Проведем его высоту CH (рисунок 77). Рассмотрим прямоугольные треугольники AHC и ACB. По определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника имеем: $\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$, отсюда $AC^2 = AB \cdot AH$.

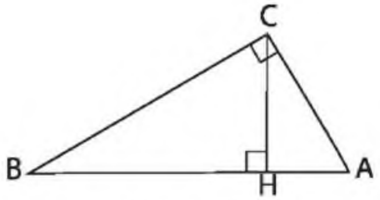


Рисунок 77

Из прямоугольных треугольников BHC и BCA получим: $\cos B = \frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$, откуда $BC^2 = AB \cdot BH$.

Тогда $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AH + AB \cdot BH = AB \cdot (AH + BH) = AB \cdot AB = AB^2$. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы Пифагора использовались пропорции $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$ и $\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB}$. В таких пропорциях отрезки AC и BC называются средними пропорциональными между отрезками AH, AB и BH, AB соответственно. Таким образом, установлено, что в прямоугольном треугольнике *катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу*.

Теорема (*обратная теореме Пифагора*). **Если в треугольнике квадрат длины некоторой стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон, то этот треугольник – прямоугольный.**

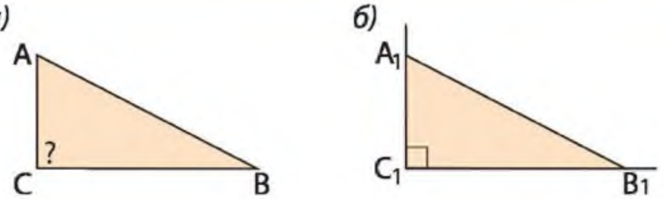


Рисунок 78

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в ΔABC (рисунок 78) стороны таковы, что $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Докажем, что $\angle C = 90°$. Для этого построим прямой угол C_1 и на его сторонах отложим отрезки $C_1A_1 = CA$ и $C_1B_1 = CB$. На основании теоремы Пифагора $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + C_1B_1{}^2$ или $A_1B_1{}^2 = AC^2 + CB^2 = AB^2$. Поэтому $AB = A_1B_1$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Таким образом, ΔABC – прямоугольный. Теорема доказана.

З а д а ч а. Одна сторона прямоугольника на 4 см больше другой, а сумма расстояний от точки пересечения диагоналей прямоугольника до этих сторон равна 14 см. Найти длину диагонали прямоугольника.

Р е ш е н и е. Пусть дан прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O (рисунок 79). Проведем из точки O перпендикуляры OM и OK к сторонам AD и AB. Обозначим $OM = x$ см, тогда $OK = (14 - x)$ см. Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то в равнобедренных треугольниках AOB и AOD высоты OK и OM являются медианами, т. е. точки K и M – середины сторон AB и AD треугольника ABD. Следовательно, отрезки KO и OM – средние линии треугольника ABD. Тогда $AB = 2 \cdot OM = 2x$ см, $AD = 2 \cdot KO = (28 - 2x)$ см.

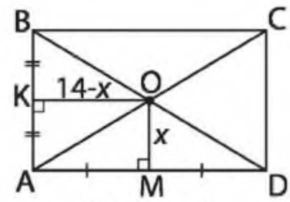


Рисунок 79

По условию $AD - AB = 4$ см, то есть $28 - 2x - 2x = 4$, откуда $x = 6$. Тогда $AB = 12$ см, $AD = 16$ см. Диагональ BD прямоугольника $ABCD$ находим из ΔABD по теореме Пифагора: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 16^2 = 400$, следовательно, $BD = 20$ см.

О т в е т. 20 см.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

2. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

148. а) Можно ли на основании теоремы Пифагора утверждать, что треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см является прямоугольным?

б) Можно ли утверждать, что треугольник со сторонами 12 см, 15 см и 9 см – прямоугольный? Если можно, то на основании какой теоремы?

в) Как на местности можно построить прямой угол, используя шпагат, на котором узлами отмечены 1,5 м, 2 м и 2,5 м?

149. а) Верно ли, что если для треугольника с большей стороной a и двумя другими сторонами b и c не выполняется равенство $c^2 + b^2 = a^2$, то он не является прямоугольным?

б) Во сколько раз увеличится гипотенуза прямоугольного треугольника, если каждый из его катетов увеличится в n раз?

в) На сколько процентов увеличится гипотенуза прямоугольного треугольника, если каждый его катет увеличить на 10 %?

150. а) В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 3 дм. Чему равны катеты этого треугольника?

б) В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = 3$ дм, $\cos B = \frac{8}{17}$. Найдите CB и AB.

Уровень В

151. а) В равнобедренной трапеции основания равны 8 дм и 14 дм, высота трапеции 4 дм. Найдите боковую сторону трапеции.

б) Найдите диагональ прямоугольника, если его периметр равен 56 см, а разность сторон 4 см.

в) Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами 7 см и 24 см и построены точки A_1 и C_1, симметричные точкам A и C относительно прямой BD. Докажите, что AA_1CC_1 – прямоугольник и найдите его диагональ A_1C_1.

152. а) Диагонали ромба равны 6 дм и 8 дм. Найдите его сторону.

б) Периметр ромба равен 52 см, одна из его диагоналей равна 10 см. Найдите вторую диагональ ромба.

153. а) Лестница длиной 13 м приставлена к стене так, что нижний ее конец отстоит от стены на 5 м. На какой высоте находится другой конец лестницы?

б) Лестница длиной 5 м упирается одним концом в стену, а второй ее конец отстоит от стены на 3 м. Если второй конец лестницы пододвинуть к стене на 1 м, то станет ли выше на столько же ее первый конец?

154. Найдите высоту BD двускатной крыши (рисунок 80), если стропила AB и BC длиной 15 м опираются на балку AC длиной 24 м.

155. Перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла ромба, делит его сторону на отрезки длиной 4 см и 8 см. Найдите диагонали ромба.

156. В четырехугольнике $ABCD$ $BC = 15$ см, $CD = 9$ см, $AD = 13$ см, $BD = 12$ см, $\angle CDB = \angle ABD$. Найдите сторону AB.

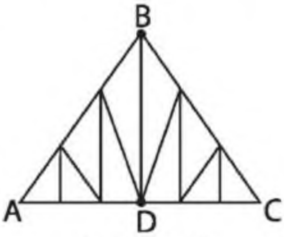


Рисунок 80

157. а) В квадрате $ABCD$ со стороной 12 см точки M и K – середины сторон AB и AD соответственно. Найдите стороны треугольника MCK.

б) В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $BC = 5$ см, $M \in AC$, причем $CM : AM = 1 : 2$. Найдите длину отрезка MN, параллельного AB, где $N \in BC$.

в) В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 3$ см, $AB = 2$ см, N – середина стороны CD, $M \in BC$, причем $BM : MC = 2 : 1$. Докажите, что треугольник AMN прямоугольный и найдите с точностью до 1° его меньший острый угол.

158. а) Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 дм и 15 дм. Найдите длины сторон параллелограмма, если разность двух из них равна 7 дм.

б) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка X на его стороне BC. Докажите, что $AX^2 + XC^2 = BX^2 + XD^2$.

в) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см. К его диагонали AC проведен перпендикуляр BH. Найдите отношение $AH : HC$.

г) Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если его катеты равны 3 см и 4 см.

Уровень С

159. а) К окружности радиуса 10 см проведена касательная и на ней отмечена точка A, расстояние от которой до ближайшей к ней точки окружности равно 16 см. Найдите расстояние от точки A до точки касания.

б) Найдите (с точностью до 0,1 см) радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с боковой стороной 6 см и основанием 4 см.

в) Найдите расстояние между точками пересечения двух окружностей, радиусы которых равны 17 см и 10 см, а расстояние между их центрами 21 см.

160. а) Вырежьте из бумаги прямоугольник со сторонами 9 см и 4 см. Разрежьте его на три таких прямоугольника, чтобы из них можно было составить квадрат.

б) Докажите, что в прямоугольном треугольнике утроенная гипотенуза больше удвоенной суммы катетов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Из какой-либо точки D его гипотенузы проведите перпендикуляр DH к катету AC. Измерьте отрезки AC, AB, AH и AD. Сравните отношения: а) $\frac{BC}{AB}$ и $\frac{DH}{AD}$; б) $\frac{BC}{AC}$ и $\frac{DH}{AH}$; в) $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AH}{DH}$.

16. Тригонометрические функции острого угла

Пусть дан острый угол, например, $\angle BAC = \alpha$ (рисунок 81, *а*). На стороне AB угла отметим произвольную точку M и построим перпендикуляр MH к стороне AC. Докажем, что отношение сторон $\frac{MH}{AM}$ прямоугольного треугольника MAH не зависит от выбора точки M, используя теорему Пифагора.

$$\frac{MH}{AM} = \frac{\sqrt{AM^2 - AH^2}}{AM} = \sqrt{1 - \left(\frac{AH}{AM}\right)^2};$$

$$\frac{M_1H_1}{AM_1} = \frac{\sqrt{AM_1^2 - AH_1^2}}{AM_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{AH_1}{AM_1}\right)^2}.$$

Поскольку $\frac{AH}{AM} = \frac{AH_1}{AM_1} = \cos\alpha$, то $\sqrt{1 - \left(\frac{AH}{AM}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{AH_1}{AM_1}\right)^2}$, следовательно, $\frac{MH}{AM} = \frac{M_1H_1}{AM_1}$.

Взяв другой острый угол DAC, равный β (рисунок 81, *б*), аналогично получим, что отношение $\frac{KF}{AK}$ не зависит от выбора точки K на стороне AD. Значит, каждому острому углу прямоугольного треугольника соответствует только одно отношение катета, противолежащего этому углу, к его гипотенузе. Это отношение называют *синусом* острого угла прямоугольного треугольника.

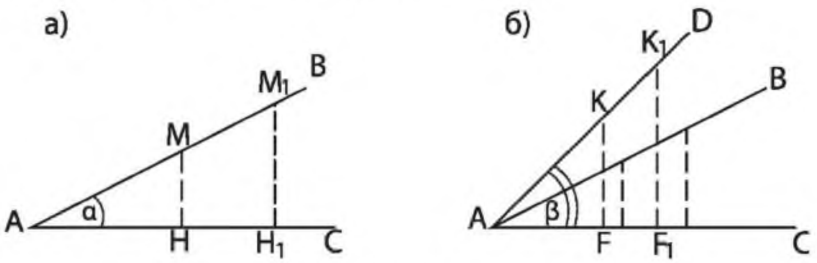


Рисунок 81

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. Обозначается: $\sin A$, например, $\sin A = \frac{BC}{AB}$ (рисунок 82).

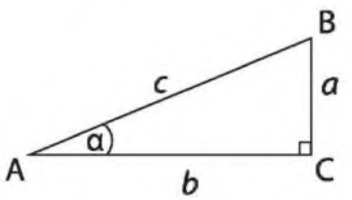
Из равенств $\frac{AH}{AM} = \frac{AH_1}{AM_1}$ и $\frac{MH}{AM} = \frac{M_1H_1}{AM_1}$ следует, что $\frac{MH}{AH} = \frac{M_1H_1}{AH_1}$ и $\frac{AH}{MH} = \frac{AH_1}{M_1H_1}$. Значит, и эти отношения не зависят от выбора точки M, их называют соответственно *тангенсом* и *котангенсом* острого угла прямоугольного треугольника.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету. Обозначается: tg A, например, tg $A = \frac{BC}{AC}$ (рисунок 82).

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету. Обозначается: ctg A, например, ctg $A = \frac{AC}{BC}$ (рисунок 82).

Итак, установлено, что каждому острому углу можно поставить в соответствие одно значение каждого из четырех рассмотренных отношений. Поэтому можно сделать вывод, что эти отношения сторон прямоугольного треугольника являются функциями его острого угла. Эти функции называются *тригонометрическими функциями острого угла*.

Так как углы часто обозначаются строчными буквами греческого алфавита, то их тригонометрические функции записываются, например, так: sin α (читается: синус альфа); cos β (косинус бета); tg γ (тангенс гамма); ctg δ (котангенс дельта).



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$;

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Рисунок 82

Слово «тригонометрия» происходит от слов «тригонон», что означает в переводе с греческого языка треугольник, и «метрео» – измеряю.

З а д а ч а 1. В прямоугольном ΔABC катет $AC = 4{,}8$ см, а гипотенуза $AB = 5{,}2$ см. Найти $\sin A$.

Р е ш е н и е. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ (рисунок 82). Катет BC найдем по теореме Пифагора:

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5{,}2^2 - 4{,}8^2} = \sqrt{10 \cdot 0{,}4} = 2$ (см).

$\sin A = \frac{2}{5{,}2} = \frac{5}{13}$.

О т в е т. $\frac{5}{13}$.

З а д а ч а 2. Доказать, что если из любой точки C окружности провести к ее диаметру AB перпендикуляр CH, то $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$. (Отрезок CH – *средний пропорциональный* между отрезками AH и BH.)

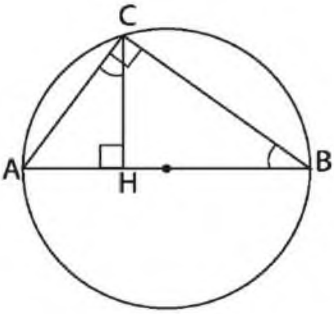


Рисунок 83

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем отрезки CA и CB, тогда ΔACB – прямоугольный, так как его медиана, проведенная к стороне AB, равна ее половине, $\angle ACB = 90°$ (рисунок 83). В этом треугольнике $\angle ACH = \angle CBA$; $\operatorname{tg}\angle ACH = \frac{AH}{CH}$, $\operatorname{tg}\angle CBA = \frac{CH}{BH}$. Так как тангенсы равных острых углов равны, то $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$.

Отметим, что для вычислений приближенных значений тригонометрических функций острых углов в приложении имеются таблицы (стр. 157–158).

ВОПРОСЫ

1. Что называется синусом, тангенсом, котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

2. Докажите, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, где α – острый угол.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

161. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 см и 16 см. Найдите: а) синус большего острого угла треугольника; б) сумму синусов острых углов; в) тангенс одного из острых углов; г) произведение тангенсов острых углов; д) сумму квадратов синуса и косинуса каждого из острых углов; е) произведение тангенса и котангенса каждого из острых углов.

162. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 15 см, а один из катетов 9 см. Найдите: а) синус меньшего острого угла треугольника; б) сумму квадратов синусов острых углов; в) сумму тангенса и котангенса одного из острых углов; г) квадрат суммы синуса и косинуса каждого из острых углов.

Уровень B

163. а) Найдите неизвестные катет и гипотенузу прямоугольного треугольника, если:

1) второй катет равен 3 см, а тангенс противолежащего ему угла равен 0,75; 2) второй катет равен 10 см, а тангенс прилежащего к нему угла равен 2,4.

б) В прямоугольном ΔABD $\angle B = 90°$, высота $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. Найдите CD.

в) Площадь прямоугольника равна 420 см^2, а разность его сторон равна 23 см. Найдите тангенсы углов, образованных диагональю прямоугольника с его сторонами.

Озеро Верхний Кольсай

г) На берегу горного озера Верхнее в национальном природном парке «Кольсайские озера» Алматинской области находится пункт X. На какой высоте XH над уровнем моря он находится, если расстояние от пункта X до пункта A, расположенного на уровне моря у подножия горы, равно 3 км, а $\angle HAX = 65°$? (Ответ найдите с точностью до 0,1 км.)

164. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике: 1) произведение тангенсов острых углов равно 1; 2) сумма квадратов синусов острых углов равна 1.

б) Докажите, что для любого острого угла α выполняется неравенство $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

165. а) Найдите диаметр AB окружности, если расстояние от точки C окружности до диаметра равно 6 см, а $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{2}{3}$.

б) Дана окружность радиуса 8 см и на ней точки A и B. Найдите AB, если:

1) $\smile AB = 120°$; 2) $\smile AB = 50°$; 3) окружность разделена точками A и B на две дуги, градусные меры которых относятся как 5 : 7.

в) Хорда окружности AB равна 75 % диаметра. Найдите градусную меру дуги AB.

г) Угол между прямыми, содержащими диаметр окружности и ее хорду, не имеющую с ним общих точек, равен 20°. Найдите длину этой хорды, если ее проекция на диаметр равна 6 см.

Уровень С

166. Докажите, что хорда окружности есть среднее пропорциональное между диаметром, проведенным из ее конца, и проекцией этой хорды на диаметр.

17. Свойства тригонометрических функций острого угла

Т е о р е м а. **Большему острому углу соответствует:** 1) **большее значение его синуса;** 2) **меньшее значение его косинуса;** 3) **большее значение его тангенса;** 4) **меньшее значение его котангенса.**

Докажите это самостоятельно, используя рисунок 84. Из этой теоремы следует, что каждому значению тригонометрической функции острого угла соответствует только один острый угол.

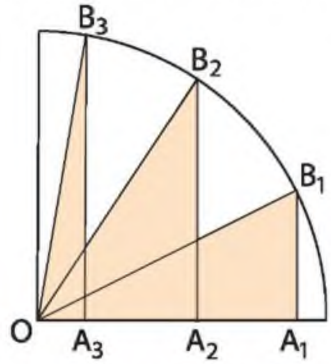
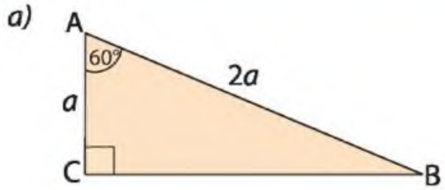


Рисунок 84

Поскольку каждый из катетов прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы, то **синус и косинус любого острого угла меньше 1**. Что касается тангенса и котангенса острого угла, то они могут быть выражены числами и большими 1, и меньшими 1, и равными 1, так как один из катетов может быть и больше другого, и меньше другого, и равен ему.

Вычислим значения тригонометрических функций некоторых острых углов. Рассмотрим прямоугольный ΔABC, в котором $\angle A = 60°$ (рисунок 85, *а*), $\sin 60° = \frac{BC}{AB}$, $\sin 30° = \frac{AC}{AB}$.

Пусть $AC = a$, тогда $AB = 2a$. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, тогда $\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. Значения косинуса, тангенса и котангенса углов 30° и 60° найдите самостоятельно.



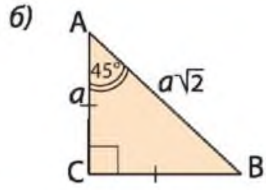


Рисунок 85

Значения тригонометрических функций угла, равного 45°, можно найти, используя свойства прямоугольного равнобедренного треугольника (рисунок 85, *б*): $AB = a\sqrt{2}$. Тогда $\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таблица значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для углов α, равных 30°, 45° и 60°, составленная с использованием свойств прямоугольного треугольника (рисунок 85, *а*, *б*), приведена ниже.

Угол	Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Выразив приближенные значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ десятичными дробями, получим: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$, $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$. Тогда таблица значений синуса, косинуса и тангенса данных углов примет следующий вид.

Угол	Синус	Косинус	Тангенс
30°	0,500	0,866	0,577
45°	0,707	0,707	1,000
60°	0,866	0,500	1,732

З а д а ч а. Доказать тождества: $\mathbf{sin(90° – \alpha) = cos\ \alpha}$, $\mathbf{cos(90° – \alpha) = sin\ \alpha}$, $\mathbf{tg(90° – \alpha) = ctg\ \alpha}$, $\mathbf{ctg(90° – \alpha) = tg\ \alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90° – \alpha$ (рисунок 86).

$\sin(90° – \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos \alpha$, $\quad \cos(90° – \alpha) = \frac{BC}{AB} = \sin \alpha$,

$\text{tg}(90° – \alpha) = \frac{AC}{BC} = \text{ctg}\ \alpha$, $\quad \text{ctg}(90° – \alpha) = \frac{BC}{AC} = \text{tg}\ \alpha$.

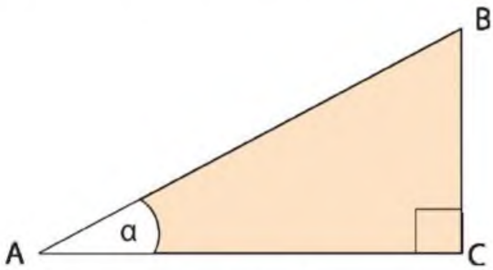


Рисунок 86

ВОПРОСЫ

1. Объясните, почему синус и косинус любого острого угла меньше единицы.

2. Докажите, что меньшему острому углу соответствует: а) меньшее значение его синуса;
б) большее значение его косинуса.

3. Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°? Объясните, как можно найти эти значения.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

167. а) Какие из чисел 0,2; 2,1; 0,(3); $\frac{\sqrt{3}}{3}$ могут быть значениями: 1) синуса острого угла; 2) косинуса острого угла? б) Какие из чисел 2; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4 могут быть значениями тангенса острого угла?

168. Верно ли, что для любого острого угла A: а) $\text{tg}\ A \geq \sin A$; б) $\text{tg}\ A \geq \cos A$?

169. Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 20 м, а в нижней части – 26 м. Какова высота насыпи, если угол наклона откосов равен 60° (рисунок 87)?

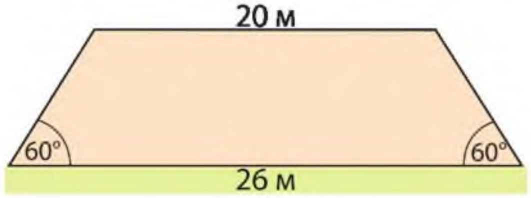


Рисунок 87

170. Запишите в порядке возрастания значений выражения:

а) $\sin 36°$, $\sin 80°$, $\sin 24°$;
б) $\cos 45°$, $\cos 76°$, $\cos 18°$;
в) $\cos 70°$, $\sin 50°$, $\cos 20°$;
г) $\mathrm{tg}\, 65°$, $\mathrm{tg}\, 82°$, $\mathrm{tg}\, 28°$;
д) $\mathrm{ctg}\, 53°$, $\mathrm{ctg}\, 12°$, $\mathrm{ctg}\, 2°$;
е) $\mathrm{tg}\, 60°$, $\mathrm{ctg}\, 80°$, $\mathrm{tg}\, 40°$.

171. а) Найдите углы прямоугольного треугольника, если: 1) косинус одного из его острых углов равен $\frac{1}{2}$; 2) синус одного из его острых углов равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Чему равны тангенсы острых углов прямоугольного треугольника, если косинус одного из них равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Уровень В

172. а) В остроугольном треугольнике синус одного острого угла равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, синус другого – $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите третий угол.

б) В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен 20°. Верно ли, что синус угла при основании этого треугольника больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

173. Дан квадрат $ABCD$, O – точка пересечения его диагоналей, M – середина стороны CD. Найдите: а) $\sin\angle CBM$; б) $\cos\angle ABO$; в) $\mathrm{tg}\, (\frac{1}{2}\angle AMB)$; г) $\mathrm{ctg}\angle ABM$.

174. Докажите неравенство:

а) $\sin 30° + \cos 45° > 1$;   б) $\mathrm{tg}\, 25° < \mathrm{ctg}\, 25°$.

175. Сравните:

а) $\sin 20°$ и $\sin 35°$; в) $\sin \alpha$ и $\sin^2 \alpha$, где α – острый угол;

б) $\cos 15°$ и $\cos 70°$; г) $\cos \alpha$ и $\cos^{-1} \alpha$, где α – острый угол.

176. Что больше и почему:

а) $\sin 60°$ или $\operatorname{tg} 30°$; в) $\sin^2 60°$ или $2\sin 60° - 1$;

б) $\cos 45°$ или $\operatorname{tg} 45°$; г) $\sin 40° \cdot \cos 20°$ или 0,25?

177. Вычислите: а) $0{,}75 \cdot \cos 60° + 0{,}25 \cdot \sin 30°$; б) $5\sin 30° - 3\operatorname{tg} 45°$.

178. Верно ли, что значение $\sin^2 45°$ равно среднему арифметическому значений:

а) $\cos^2 30°$ и $\cos^2 60°$; б) $\sin^2 30°$ и $\sin^2 60°$?

179. а) Найдите с точностью до 1° острые углы прямоугольного треугольника, в котором: 1) гипотенуза равна 29 см, а один из катетов – 20 см; 2) катеты равны 5 см и 7 см. б) Существует ли треугольник со сторонами: 1) 2 см, 2 см и $\sqrt{8}$ см; 2) $\sqrt{2}$ дм, $\sqrt{3}$ дм и $\sqrt{5}$ дм? Если существует, то найдите с точностью до 1° его меньший угол.

Уровень C

180. а) Хорда длиной 5 см стягивает дугу окружности, градусная мера которой равна 40°. Найдите с точностью до 0,1 см расстояние от центра окружности до этой хорды.

б) Угол между касательными, проведенными из некоторой точки к окружности радиуса 8 см, равен 30°. Найдите с точностью до 0,1 см расстояние между точками касания.

181. Найдите сторону равностороннего треугольника, если: а) радиус описанной около него окружности равен 3 см; б) радиус вписанной в него окружности равен 4 см.

182. Хорда, равная 8 см, стягивает дугу в 72°. Найдите с точностью до 0,1 см длину хорды, стягивающей дугу в 144°.

18. Тригонометрические тождества

Между тригонометрическими функциями угла существуют разные связи, например, $\mathbf{tg}\,A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ (тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла). Действительно: $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$ (рисунок 88), $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{CB \cdot AB}{AB \cdot AC} = \dfrac{CB}{AC} = \mathrm{tg}A$.

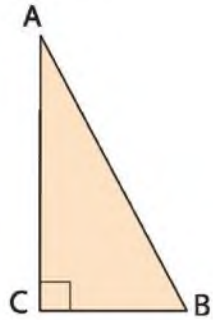


Рисунок 88

Докажите самостоятельно, что $\mathbf{tg}\,A \cdot \mathbf{ctg}\,A = 1$.

Т е о р е м а. **Для любого острого угла A выполняется равенство $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$ (рисунок 88), тогда $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, так как по теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

Равенство $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ называется *основным тригонометрическим тождеством*.

З а д а ч а. Доказать, что для любого острого угла α верно равенство $\mathbf{1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$.

Получим: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

ВОПРОСЫ

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством? Докажите это тождество.

2. Докажите, что для любого острого угла α верно равенство $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

183. Найдите: а) синус и тангенс острого угла, косинус которого равен $\frac{12}{13}$; б) косинус и тангенс острого угла, синус которого равен 0,6.

184. Существует ли угол: а) синус которого равен 0,9, а косинус – 0,3; б) синус которого равен 0,8, а косинус – 0,6?

Уровень B

185. а) Верно ли для любого острого угла α равенство:
1) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$?
б) Докажите, что для любых острых углов α и β прямоугольного треугольника верно равенство: 1) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$; 2) $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = 1$.

186. Докажите, что для любого острого угла α верно равенство $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$.

187. а) Периметр равнобедренного треугольника равен 64 м, а косинус угла при его основании равен 0,28. Найдите высоты треугольника.
б) Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 см и углом 80° при его вершине. Найдите с точностью до 0,1 см радиус окружности: 1) вписанной в этот треугольник; 2) описанной около этого треугольника.

Уровень C

188. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}3$, где α – острый угол. Найдите $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

189. Найдите произведение длин катетов прямоугольного треугольника, если даны его гипотенуза c и сумма d синусов острых углов.

19. Решение прямоугольных треугольников

На основании определений тригонометрических функций острого угла имеем (рисунок 89): *катет прямоугольного треугольника равен*

– его гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету;

– его гипотенузе, умноженной на косинус угла, прилежащего к этому катету;

– второму катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету;

– второму катету, умноженному на котангенс угла, прилежащего к первому катету.

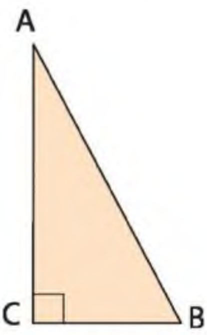


Рисунок 89

В треугольнике ABC (рисунок 89)
$CB = AB \cdot \sin A$ или $CB = AC \cdot \operatorname{tg} A$
$AC = AB \cdot \cos A$ или $AC = CB \cdot \operatorname{ctg} A$

Используя установленные зависимости между углами прямоугольного треугольника и их тригонометрическими функциями, можно решать задачи на нахождение неизвестных элементов прямоугольного треугольника (по некоторым известным его элементам). Такие задачи называются задачами на *решение прямоугольного треугольника*.

Задача 1. В прямоугольном ΔABC гипотенуза $AB = 4$ дм и $\angle A = 42°$. Найти неизвестные его острый угол и катеты с точностью до 0,1 дм.

Решение. $\angle B = 90° - \angle A = 48°$. Катеты можно найти так:

$BC = AB \cdot \sin 42°$, $AC = AB \cdot \cos 42°$ (рисунок 90). По таблице приближенных значений тригонометрических функций (ограничиваясь двумя десятичными знаками после запятой) находим, что $\sin 42° \approx$ $\approx 0,67$, а $\cos 42° \approx 0,74$. Тогда $BC \approx 4 \cdot 0,67 \approx 2,7$(дм), $AC \approx 4 \cdot 0,74 \approx$ $\approx 3,0$ (дм).

О т в е т. 48°; ≈ 2,7 дм; ≈ 3,0 дм.

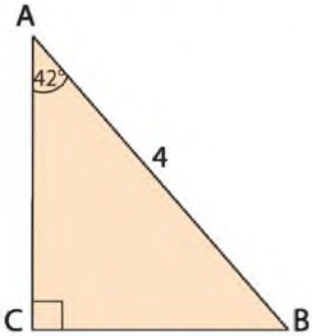


Рисунок 90

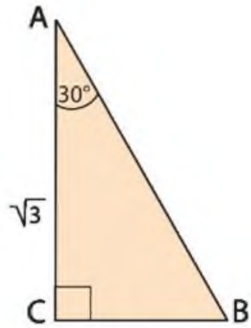


Рисунок 91

З а д а ч а 2. В прямоугольном ΔABC катет $AC = \sqrt{3}$ см и $\angle A = 30°$ (рисунок 91). Найти угол B, катет BC и гипотенузу AB.

Р е ш е н и е. $\angle B = 90° - \angle A = 60°$; $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} =$ $= 1$ (см); $AB = 2 \cdot BC = 2$ (см).

О т в е т. 60°; 1 см; 2 см.

З а д а ч а 3. В прямоугольном ΔABC известны катеты $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Найти его неизвестные острые углы с точностью до 1° и гипотенузу.

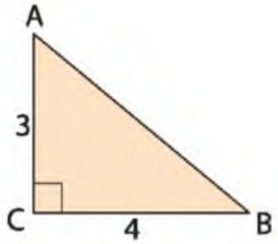


Рисунок 92

Р е ш е н и е. $\text{tg } B = 3 : 4 = 0{,}75$ (рисунок 92). По таблице приближенных значений тангенсов острых углов находим $\angle B \approx 37°$, тогда $\angle A \approx 53°$. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

О т в е т. $\approx 37°$, $\approx 53°$, 5 см.

З а д а ч а 4. Как можно найти высоту скалы Окжетпес (Акмолинская область, Бурабай) (рисунок 93)?

Р е ш е н и е. Высота скалы Окжетпес – это длина отрезка BC прямоугольного треугольника ABC. Чтобы ее найти, можно измерить длину отрезка AC и угол BAC. Тогда $BC = AC \cdot \text{tg } \angle BAC$.

Если $AC = 100$ м, $\angle BAC = 70°$, то $BC = 100 \cdot 2{,}75 \approx 275$ (м).

О т в е т. Высота скалы Окжетпес ≈ 275 м.

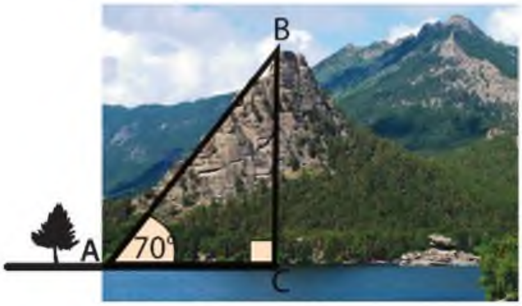


Рисунок 93

ВОПРОСЫ

1. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол, через острый угол и другой катет?

2. Какие задачи называют задачами на решение прямоугольного треугольника? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

190. а) Известны гипотенуза (7 см) прямоугольного треугольника и косинус (0,4) одного из его острых углов. Найдите катеты этого треугольника.

б) Известны катет прямоугольного треугольника ($\frac{5}{7}$ дм) и синус (0,6) противолежащего ему угла. Найдите гипотенузу и неизвестный катет этого треугольника.

в) По данным гипотенузе ($\sqrt{89}$ см) и тангенсу (1,6) одного из острых углов прямоугольного треугольника найдите его катеты.

г) Известны гипотенуза (c) прямоугольного треугольника и один из его острых углов (30°). Найдите катеты этого треугольника и косинус его большего острого угла.

191. а) В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = 82$ см и $\angle A = 36°$. Найдите с точностью до 0,1 см катеты этого треугольника.

б) Даны катет $BC = 25$ см прямоугольного треугольника ABC и $\angle A = 32°$. Найдите с точностью до 0,1 см гипотенузу и второй катет этого треугольника.

Уровень B

192. Найдите углы ромба, диагонали которого равны $2\sqrt{3}$ дм и 2 дм.

193. а) Даны катеты 21 см и 18 см прямоугольного треугольника. Найдите его острые углы с точностью до 1° и гипотенузу.

б) Даны катет 52 см и гипотенуза 67 см прямоугольного треугольника. Найдите с точностью до 1° острые углы и второй катет этого треугольника.

194. а) В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°. Большая боковая сторона и большее основание равны по 12 см. Найдите периметр трапеции.

б) В прямоугольном треугольнике ACB $\angle C = 90°$, катет $AC = 14$ см, BM – медиана, $\angle AMB = 130°$. Найдите с точностью до 0,1 см длины отрезков BM и BC.

195. К окружности радиуса 12 см проведены две касательные, угол между которыми равен 40°. Найдите с точностью до 0,1 см расстояние от центра окружности до точки пересечения касательных.

196. Полуокружность разделена на две дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 4. Точка деления соединена хордами с концами диаметра. Найдите этот диаметр, если разность длин хорд равна 10 см.

197. а) Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены его высота и медиана, равные соответственно 12 см и 15 см. Найдите стороны и синусы острых углов этого треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике ACB $\angle C = 90°$, катет $AC = 4$ дм, $\angle BAC = 70°$, $D \in BC$, причем $\angle DAC = 50°$. Найдите с точностью до 1 см расстояние BD.

в) Представьте, что в условии задачи б) D – это вершина холма, а DB – маяк. Как найти высоту маяка, если расстояние AC и углы CAD и CAB можно измерить? Найдите DB с точностью до 1 м, если $AC = 100$ м, $\angle CAD = 40°$, $\angle CAB = 80°$.

Уровень C

198. Стороны прямоугольника равны 35 см и 74,9 см. Найдите с точностью до 1° острый угол между его диагоналями.

199. Найдите с точностью до 1° углы трапеции, основания которой равны 12 см и 54 см, а боковые стороны – 26 см и 40 см.

20. Задачи по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Задача 1. Объяснить, как, используя тригонометрические функции углов, можно найти расстояние между двумя точками, находящимися на противоположных сторонах озера (рисунок 94).

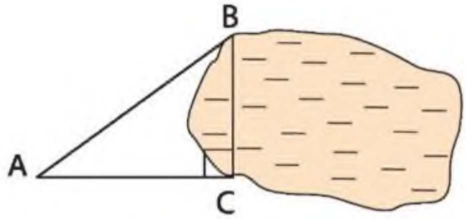


Рисунок 94

Решение. Измерив расстояние AB, например, и угол A, найдем $BC = AB \cdot \sin A$. Или можно измерить расстояние AC и угол A, тогда $BC = AC \cdot \operatorname{tg} A$. Если, например, оказалось, что $AB = 305$ м, $\angle A = 32°$, то $BC = 305 \cdot \sin 32° \approx 305 \cdot 0{,}53 \approx 162$ (м).

Задача 2. Самолет, находящийся над пунктом C на высоте $h \approx 400$ м, начал приземляться на аэродром, расположенный в 2,5 км от этого пункта. Найти угол B приземления самолета (рисунок 95).

Решение. Из прямоугольного ΔABC находим:

$\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC} \approx \dfrac{400}{2500} = 0{,}16$. По таблице приближенных значений тригонометрических функций находим $\angle B \approx 9°$.

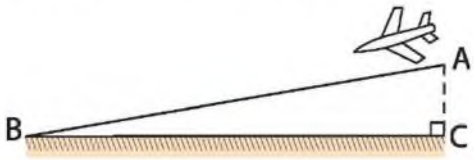


Рисунок 95

Ответ. 9°.

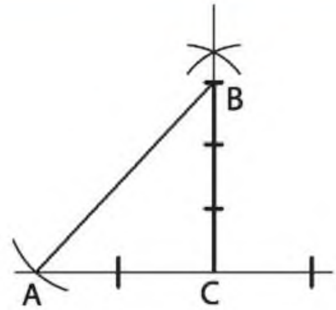


Рисунок 96

З а д а ч а 3. Построить угол, синус которого равен 0,75.

Р е ш е н и е. Построим прямоугольный треугольник, в котором отношение катета, противолежащего искомому углу, к гипотенузе равно $\frac{3}{4}$ (рисунок 96). Тогда угол A – искомый.

З а д а ч а 4. Дан отрезок a. Построить отрезок $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x = a \cdot \cos 30°$. Тогда x – катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и углом 30°, прилежащим к этому катету.

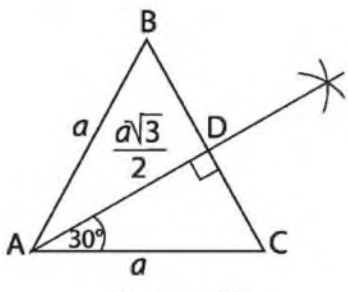


Рисунок 97

П о с т р о е н и е. 1) Строим равносторонний треугольник ABC (рисунок 97) со стороной, равной a.

2) Строим из точки A перпендикуляр AD к стороне BC, получим $AD = x$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

200. В прямоугольном ΔOMN $\angle O = 90°$, NK – биссектриса острого угла. Найдите ее проекцию на катет MO, если $ON = 4$ см, $MN = 5$ см.

201. Периметр треугольника PNK равен 8,4 дм, его биссектриса PM делит сторону NK на части $NM = 2,7$ дм, $MK = 0,9$ дм. Найдите стороны PN и PK.

202. В треугольник ABC вписан ромб $AMNK$ так, что угол A у них общий, а точки M, N и K лежат на сторонах треугольника AB, BC и AC соответственно. Найдите BN и NC, если $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см.

203. Постройте острый угол: а) синус которого равен 0,4; б) косинус которого равен $\frac{5}{8}$; в) тангенс которого равен 1,5; г) котангенс которого равен 0,75.

Уровень В

204. а) В разрезе ров имеет форму равнобедренной трапеции с основаниями 4 м и 9 м и высотой 5 м (рисунок 98). Под каким углом наклонены его боковые стороны ко дну рва? Укажите ответ с точностью до 1°.

б) Железнодорожная насыпь имеет вверху ширину 6 м, а внизу – 12 м. Найдите с точностью до 0,01 м высоту насыпи, если с обеих сторон она наклонена к основанию под углом 35°.

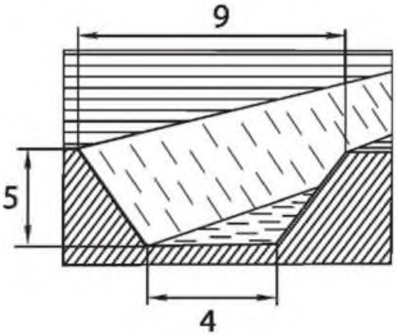


Рисунок 98

205. Доска длиной 3 м опирается о стену и наклонена под углом 65° к полу. Можно ли протянуть под доской по полу прямоугольный лист жести размером 2 м × 3 м, не касаясь нижнего конца доски? Ответ объясните.

206. а) Две прямолинейные дороги пересекаются под углом 43°. На одной из них в 6,5 км от развилки находится пункт, из которого проложен самый короткий путь до второй дороги. Найдите длину этого пути с точностью до 0, 001 км.

б) Из двух пунктов A и B, находящихся на противоположных склонах холма, к вершине C холма по его склонам AC и BC поднялись Батыр и Марк. Известно, что $\angle CAB = 25°$, $AC = 2$ км, $BC = 3$ км. Найдите с точностью до 1° угол подъема склона BC.

207. Три окружности, радиусы которых относятся как 1 : 2 : 3, внешне касаются друг друга. Найдите градусные меры дуг, заключенных между точками касания.

208. а) Упростите выражение:

1) $\sin(90° - \alpha) \cdot \cos\alpha + \cos(90° - \alpha) \cdot \sin\alpha$;

2) $\mathrm{tg}(90° - \alpha) \cdot \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}(90° - \alpha) \cdot \mathrm{ctg}\alpha$, где α – острый угол.

б) Определите знак выражения:

1) $(\cos 60° - \cos 30°) \cdot (\mathrm{tg}\, 60° - \sin 60°)$;

2) $(\mathrm{tg}\, 30° - \sin 60°) \cdot (\sin 45° - \mathrm{tg}\, 45°)$.

Уровень C

209. а) На стороне AB угла BAC отложен отрезок $AM = 8$ см, его проекция на прямую AC равна 5 см. На другой стороне угла отложен отрезок $AN = 12$ см. Найдите проекцию отрезка AN на прямую AB.

б) Найдите с точностью до 1° острые углы прямоугольного треугольника, если проекции его катетов на гипотенузу равны 6 см и 4 см.

210. Найдите значение выражения

$\mathrm{tg}\, 15° \cdot \mathrm{tg}\, 30° \cdot \mathrm{tg}\, 45° \cdot \mathrm{tg}\, 60° \cdot \mathrm{tg}\, 75°$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

211. 1А) Найдите значение выражения
$\sin 30° \cdot \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg} 30°$.

2А) Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0{,}8$, где α – острый угол.

3В) Постройте острый угол, синус которого равен 0,8.

4В) Сторона ромба равна m, а его тупой угол равен 120°. Найдите диагонали ромба.

5С) В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 12$ см. Найдите высоту CH ΔABC.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Пифагор

Накопление вычислительных приемов решений геометрических задач привело к появлению новых разделов в математике. В конце XVI века – тригонометрии, то есть косвенных измерений на основе свойств треугольника. В XVII веке – метода координат. Оба этих направления имеют геометрические истоки, но их считают как частью алгебры, так и частью геометрии. С этих столетий начался новый этап в развитии геометрии, хотя основные идеи этих направлений развивались с глубокой древности.

Знаменитая теорема Пифагора и ей обратная широко использовались. Например, в Древнем Египте для построения прямого угла на местности веревку делили узлами на 12 равных частей и растягивали туго на земле так, чтобы получался треугольник со сторонами 3, 4 и 5 делений (рисунок 99). Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, угол против стороны с 5 делениями – прямой. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 единиц называют *египетским*.

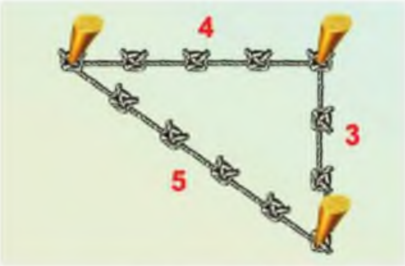


Рисунок 99

По историческим сведениям, первые идеи тригонометрии содержались в сочинениях древнекитайских ученых еще в XV столетии до нашей эры. Во II веке нашей эры греческий ученый Птолемей в сочинении по астрономии изложил начала тригонометрии, дал таблицы синусов и некоторые способы решения геометрических задач тригонометрическим методом. В V–X веках значительные результаты по развитию начал тригонометрии получили индийские ученые, в частности, они уточнили тригонометрические таблицы. Выделение тригонометрии в специальный раздел геометрии связано с именами ученых Средней Азии Мухаммеда Аль-Беруни (973–1050) и Насира ад-Дин ат-Туси (1201–1274).

Информацию об этих ученых и их вкладе в развитие тригонометрии найдите в Интернете.

Последовательное изложение тригонометрии в Европе появилось в XV веке в труде «Пять книг о разного рода треугольниках» немецкого математика Р. Мюллера (1436–1476), основанном на арабских источниках.

Насир ад-Дин ат-Туси

III. ПЛОЩАДИ ФИГУР

В результате изучения раздела надо

знать

• понятие площади фигуры и основные свойства (аксиомы) площади;
• единицы измерения площади;
• определения равновеликих и равносоставленных фигур;
• формулы для нахождения площадей: квадрата, прямоугольника, прямоугольного треугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, четырехугольника.

уметь

• находить равновеликие и равносоставленные фигуры;
• выводить формулы площадей: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции;
• вычислять площади: квадрата, прямоугольника, прямоугольного треугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, четырехугольника;
• применять формулы площадей многоугольников для решения задач.

21. Понятие площади. Площадь прямоугольника

С площадями фигур вы знакомились в предыдущих классах, вычисляли их. Например, на рисунке 100 площадь четырехугольника $S \approx 43$ квадратным единицам. Площадь этого многоугольника выражается положительным числом, которое показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в нем (за единицу измерения взята одна клеточка). Вы использовали также формулы площади квадрата, прямоугольника, круга. С понятием площади мы встречаемся в повседневной жизни, например, слышим такие слова: «площадь квартиры равна 76 квадратных метров», «площадь садового участка равна 10 соткам». Это понятие постоянно используется при измерении величин. Например, измерениями установлено, что площадь Казахстана равна 2 724,9 тыс. кв. км. (9-е место в мире). Изучим понятие площади и ее свойства более подробно. Сначала рассмотрим площади простых фигур.

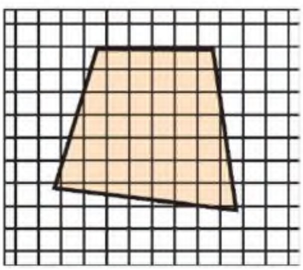


Рисунок 100

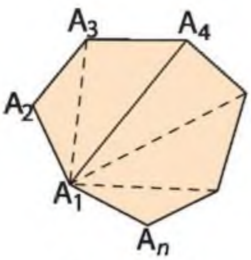


Рисунок 101

Фигуру называют *простой*, если ее можно разделить на конечное число треугольников. Примером простой фигуры является выпуклый многоугольник (рисунок 101). Он разбивается на треугольники диагоналями, проведенными из какой-нибудь его вершины.

Основными свойствами (аксиомами) *площади* являются следующие:

1) каждой простой фигуре соответствует единственная положительная величина, которая называется ее *площадью*;

2) равные фигуры имеют равные площади;

3) если фигура образована из нескольких фигур, внутренние области которых не имеют общих точек, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур;

4) площадь квадрата со стороной a равна a^2.

Основными единицами измерения площади являются квадратный миллиметр (мм^2), квадратный сантиметр (см^2), квадратный дециметр (дм^2), квадратный метр (м^2) и квадратный километр (км^2). Например, если квадрат имеет сторону $a = 1$ м, то его площадь $S = 1$ м^2, если $a = 10$ м, то $S = 100$ м^2 = 1 ар, если $a = 100$ м, то $S = 10\,000$ м^2 = 1 га.

Две фигуры называются *равновеликими*, если они имеют равные площади. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно разделить на части, из которых можно составить другую. Равносоставленные фигуры равновелики. Например, на рисунке 102 треугольник ABC и прямоугольник $AMNC$ равносоставленные фигуры, так как они составлены из равных треугольников ($\Delta AMK = \Delta BHK$, $\Delta CNL = \Delta BHL$) и трапеции $AKLC$. Следовательно, площади их равны, то есть треугольник ABC и прямоугольник $AMNC$ равновелики.

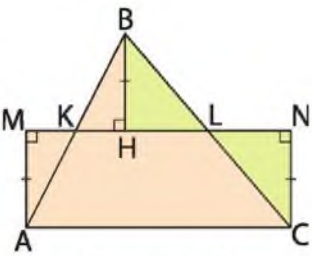


Рисунок 102

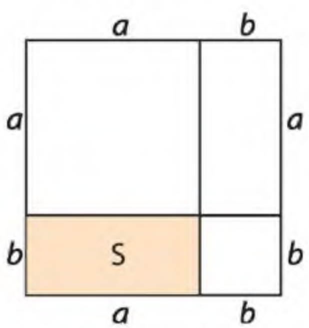


Рисунок 103

Т е о р е м а. **Площадь прямоугольника равна произведению длин его двух соседних сторон.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим длины соседних сторон прямоугольника a и b, а его площадь – S. Докажем, что $\boldsymbol{S = ab}$.

Достроим данный прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$ (рисунок 103). Площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$. Этот квадрат составлен из двух квадратов, стороны которых равны a и b, и двух равных прямоугольников. Площадь каждого из прямоугольников равна S. По свойству площадей $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + S + S$, откуда $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2S$, $2ab = 2S$, $S = ab$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, **что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов** (так как диагональ прямоугольника разбивает его на два равных прямоугольных треугольника) (рисунок 104).

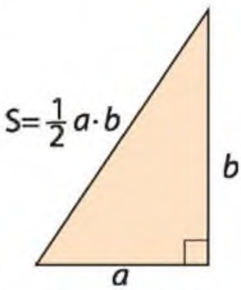


Рисунок 104

З а д а ч а. Длины заборов вокруг земельного участка формы прямоугольника со стороной 20 м и вокруг участка формы квадрата одинаковы и равны по 100 м. Площадь какого земельного участка больше?

Р е ш е н и е. Длина забора вокруг земельного участка – это его периметр. По условию участки формы прямоугольника и квадрата имеют одинаковые периметры по 100 м. Пусть неизвестная сторона прямоугольника равна b м, а сторона квадрата – a м, тогда имеем: $2(b + 20) = 100$ и $4a = 100$, откуда $b = 30$, $a = 25$. Следовательно, площади этих участков равны: $20 \cdot 30 = 600$ (м^2) и $25^2 = 625$ (м^2). Значит, площадь участка квадратной формы больше.

О т в е т. Площадь участка квадратной формы больше.

ВОПРОСЫ

1. Что такое площадь фигуры и какие основные свойства площади вы знаете?

2. Какие фигуры называются: а) равновеликими; б) равносоставленными?

3. Сформулируйте и докажите теорему о площади прямоугольника.

4. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

212. а) Докажите, что равные четырехугольники – равновеликие. Сформулируйте обратное утверждение и установите, справедливо ли оно.

б) Верно ли, что равносоставленные многоугольники – равновеликие?

в) Вырежьте из бумаги два равных прямоугольных треугольника с катетами 3 см и 4 см. Составьте из них: 1) прямоугольник; 2) параллелограмм; 3) равнобедренный треугольник. Чему равны площади этих фигур?

г) Начертите в тетради квадрат и примите его площадь за единицу. Постройте: 1) квадрат и прямоугольный треугольник, площади которых равны 4 кв. ед.; 2) прямоугольник и равнобедренный треугольник, площади которых равны 3 кв. ед.

213. а) Разрежьте равносторонний треугольник на три части и сложите из них прямоугольник.

б) Вырежьте из бумаги параллелограмм, разрежьте его на две части, из которых можно составить треугольник.

214. а) Длины сторон двух участков земли, имеющих форму квадрата, равны 10 м и 24 м. Найдите длину стороны квадратного участка земли, имеющего площадь, равную сумме площадей этих участков. б) Стороны прямоугольника 4 см и 15 см. Найдите стороны равновеликого ему прямоугольника, если они относятся как 3 : 5.

в) Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольному треугольнику с катетами 24 см и 27 см.

215. а) Пол в комнате, имеющей форму прямоугольника размерами 3 м × 1,8 м, нужно покрыть квадратными плитками со стороной 30 см. Сколько плиток потребуется?

б) Сколько нужно плиток формы прямоугольника размерами 20 см × 10 см для облицовки прямоугольной стены длиной 3,2 м и высотой 2,5 м?

Уровень B

216. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ дм, $AD = 8$ дм проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определите, на какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами.

217. а) В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 1$ м, $\angle A = 30°$. Найдите площадь $S_{\Delta ABC}$.

б) Найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой, равной 10 см.

в) Найдите площадь прямоугольного треугольника, в котором отношение гипотенузы к одному из катетов равно $\frac{5}{3}$, а другой катет равен 8 см.

г) Найдите периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 25 см, а площадь 84 см^2.

218. Сторона прямоугольника равна a, а угол между этой стороной и диагональю равен β. Найдите площадь прямоугольника, если: а) $a = 6$ см, $\beta = 30°$; б) $a = 5$ см, $\beta = 44°$ (укажите ответ с точностью до 0,1 см^2).

219. а) Сколько листов цветной бумаги размером 20 см × 30 см понадобится для оклейки 16 кубиков с ребром, равным 10 см?

б) Найдите сумму площадей всех граней прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина и высота которого соответственно равны 5 см, 8 см, 10 см.

220. а) Земельный участок имеет форму прямоугольника. Он отмечен на карте с масштабом 1:1 000. Во сколько раз площадь этого участка на местности больше, чем на плане?

б) Участок земли изображен на плане прямоугольным треугольником с катетами 3 см и 4 см. Найдите площадь этого участка на местности, если масштаб 1:100 000.

Озеро Балхаш

в) Одним из самых больших озер Земли является Балхаш, площадь которого составляет 40 % от общей площади всех озер Казахстана, равной 45000 км^2. Найдите площадь озера Балхаш.

221. а) В Казахстане самая большая по площади (428 тыс. кв. км) Карагандинская область, а самая малая (98 тыс. кв. км) – Северо-Казахстанская. На сколько процентов площадь Карагандинской области больше, чем площадь Северо-Казахстанской? Ответ дайте с точностью до 1 %.

б) На сколько процентов изменится площадь прямоугольного ΔACB с катетами $AC = 4\frac{2}{3}$ дм, $BC = 3{,}5$ дм, если катет AC увеличить на 20 %, а катет BC уменьшить на 20 %?

Уровень C

222. а) В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $\sin A + \sin B =$ $= 1{,}4$. Найдите площадь треугольника ABC.

б) Дан прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна 36 см^2. Точки M, N, P, K – середины его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Найдите площадь шестиугольника $AMNCPK$.

в) Внутри острого угла A, равного 60°, отмечена точка C, расстояния CB и CD от которой до сторон угла соответственно равны 1 дм и 2 дм. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте параллелограмм $ABCD$ и проведите его высоты BH и BK к его сторонам AD и CD соответственно. Измерьте BH, BK, AD и CD. Сравните произведения $AD \cdot BH$ и $CD \cdot BK$.

22. Площади параллелограмма и треугольника

Напомним, что *высотой параллелограмма* называют перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки его стороны, к прямой, содержащей параллельную ей сторону. Расстояние между параллельными сторонами параллелограмма также называется его высотой. Так, на рисунке 105 отрезки AH и AF, как и их длины, – высоты параллелограмма $ABCD$.

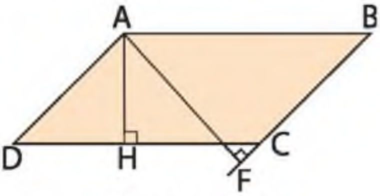


Рисунок 105

Т е о р е м а. **Площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан параллелограмм $ABCD$ (рисунок 106). Докажем, что его площадь $\boldsymbol{S = DC \cdot AH}$.

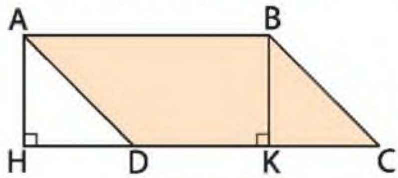


Рисунок 106

Если он не является прямоугольником, то один из его углов, A или B – острый. Пусть угол A – острый. Построим перпендикуляры AH и BK к прямой CD. Площадь трапеции $ABCH$ равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника ADH или сумме площадей прямоугольника $HABK$ и треугольника BCK. Прямоугольные треугольники ADH и BCK равны (по гипотенузе и катету), поэтому имеют равные площади. Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $HABK$, то есть равна $AB \cdot AH$ или $DC \cdot AH$.

Площадь ромба можно вычислять по формуле площади параллелограмма: $\boldsymbol{S = ah}$ (рисунок 107), где a – длина стороны, h – высота ромба.

Отметим, что *высотой треугольника* называют не только перпендикуляр, проведенный из его вершины к прямой, содержащей противоположную сторону, но и его длину.

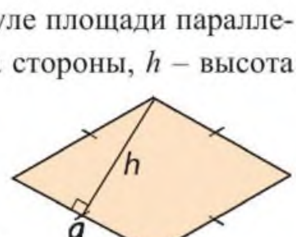


Рисунок 107

Т е о р е м а. **Площадь треугольника равна половине произведения длины его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан ΔABC (рисунок 108). Докажем, что его площадь $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH}$. Достроим этот треугольник до параллелограмма $ABCD$. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота CH параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведенной к стороне AB.

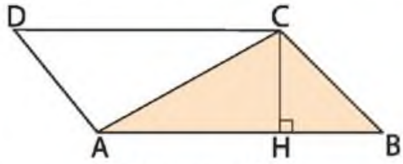


Рисунок 108

Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$, то есть $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH$.

З а д а ч а 1. Доказать, что *площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если треугольник остроугольный (рисунок 109, *а*), то, проведя его высоту BH, имеем: $BH = AB \cdot \sin A$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A$.

Рисунок 109

Если треугольник тупоугольный (рисунок 109, *б*), то его высота $BH = AB \cdot \sin (180° - A)$.

Отметим, что синус тупого угла равен синусу острого угла, смежного с ним, то есть $\sin (180° - A) = \sin A$, а синус прямого угла равен 1. Итак, $\boldsymbol{S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A}$. Установите самостоятельно, что эта формула применима и для прямоугольного треугольника.

Задача 2. Доказать, что *площадь параллелограмма равна произведению длин двух его соседних сторон на синус угла между ними.* $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

Доказательство проведите самостоятельно, разделив параллелограмм его диагональю на два равных треугольника (рисунок 110).

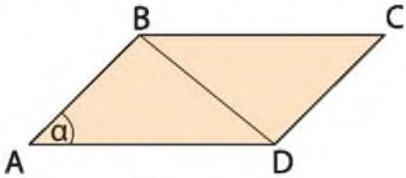


Рисунок 110

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма.

2. Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.

3. По какой формуле можно найти площадь: а) треугольника, если известны две его стороны и угол между ними; б) параллелограмма, если известны две его соседние стороны и угол между ними?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

223. а) Стороны параллелограмма равны 12 см и 15 см. Высота, проведенная к большей стороне, равна 8 см. Найдите вторую высоту этого параллелограмма.

б) Две стороны треугольника равны 12 дм и 18 дм, а высота, проведенная к одной из них, равна 4 дм. Найдите высоту, проведенную к другой из этих сторон.

в) Найдите сторону квадрата равновеликого равнобедренному треугольнику с основанием 50 см и высотой 9 см.

г) Сторону треугольника увеличили в k раз, а его высоту, проведенную к ней, уменьшили в n раз. Изменилась ли и как площадь треугольника?

224. а) Найдите площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если: 1) $AB = 10$ м, высота BH равна 8 м; 2) $BC = 15$ см, $AC = 18$ см.

б) Найдите площадь равностороннего треугольника: 1) сторона которого равна a; 2) высота которого равна h; 3) если радиус окружности, описанной около него, равен R; 4) если радиус окружности, вписанной в него, равен r.

225. Найдите площадь параллелограмма: а) смежные стороны которого соответственно равны 5 дм и 6 дм, а острый угол равен 30°; б) периметр которого равен 14 дм, а высоты 3 дм и 5,4 дм.

226. Найдите площадь параллелограмма, используя данные на рисунке 111, *а*, *б*.

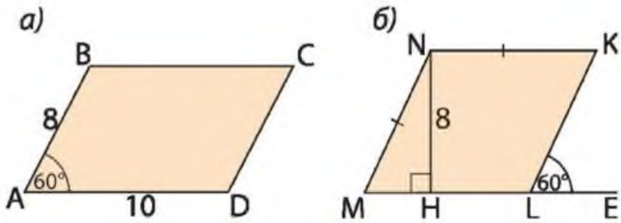


Рисунок 111

227. Вычислите площадь ромба, зная его периметр P и острый угол α, если: а) $P = 20$ см, $\alpha = 30°$; б) $P = 48$ см, $\alpha = 60°$.

Уровень В

228. а) Докажите, что площадь ромба равна квадрату длины стороны, умноженному на синус его любого угла. б) Какой вид должен иметь ромб со стороной a, чтобы его площадь была наибольшей. Ответ объясните.

229. а) Докажите, что медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника. б) Отрезки AM и BK – медианы ΔABC. Докажите, что площади треугольников AMB и ABK равны. в) Сравните площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, с суммой площадей двух равносторонних треугольников, построенных на его катетах.

230. а) Дан треугольник ABC. Постройте прямую BM, делящую его на два треугольника, площади которых относятся как 2 : 3.

б) Дан треугольник ABC, площадь которого равна 72 см^2. На его медиане BM отмечена точка D так, что $BD : DM = 1 : 2$. Докажите, что треугольники ABD и CBD равновелики и найдите их площадь.

в) Дан ΔABC, площадь которого равна 24 дм^2. Найдите площадь ΔMNK, если MN – средняя линия ΔABC, $MN \parallel AC$, $K \in AC$ и $AK : KC = 3 : 2$.

231. а) Периметр равнобедренного треугольника равен 50 м. Боковая сторона треугольника на 1 м больше основания. Найдите площадь треугольника.

б) Найдите отношение площади данного треугольника к площади треугольника, образованного его средними линиями.

232. а) Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины его прямого угла, если гипотенуза равна 13 см, а один из катетов 5 см.

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, в котором высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, равные 4,8 см и 1,2 см.

233. а) В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, $BC = 6$ см. Найдите стороны AB и AC треугольника и его площадь.

б) Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 26 см, 10 см и 24 см.

234. Найдите площадь равнобедренного треугольника: а) боковая сторона которого равна 2,5 дм, а угол между боковыми сторонами равен 135°; б) высота которого, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки, равные 3 см и 12 см.

Уровень C

235. а) Найдите большую высоту треугольника, если его стороны 9 см, 10 см, 17 см. б) Существует ли треугольник, высоты которого равны 2 см, 3 см и 4 см?

236. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно 12 см, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

237. Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен P, а точка пересечения диагоналей находится на расстоянии d от каждой его стороны.

238. Существуют ли два треугольника таких, что длина каждой стороны первого треугольника меньше 1 см, а длина каждой стороны второго треугольника больше 1 м, но площадь первого больше площади второго треугольника? Если существуют, то приведите пример.

239. а) Разделите параллелограмм прямой, проходящей через его вершину, на два многоугольника, площади которых относятся как 1 : 2.

б) Постройте параллелограмм с данным острым углом, равновеликий данному треугольнику. (Задача из «Начал» Евклида.)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте ромб, проведите его высоту и диагонали. Измерьте сторону, высоту и диагонали. Сравните произведение длины стороны на высоту с половиной произведения длин диагоналей.

23. Площадь выпуклого четырехугольника

Т е о р е м а. **Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.**

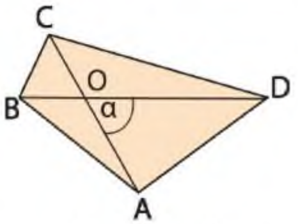


Рисунок 112

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, его диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $AC = d_1$, $BD = d_2$, α – угол между диагоналями (рисунок 112). Докажем, что его площадь S равна: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha}$.

$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta DOA} = \frac{1}{2}(AO \cdot OB \cdot \sin (180° - \alpha) + {}$ $+ BO \cdot OC \cdot \sin \alpha + CO \cdot OD \cdot \sin (180° - \alpha) + DO \cdot OA \cdot \sin \alpha)$.

Учитывая, что $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, получим:

$\frac{1}{2}\sin \alpha \cdot (BO(AO + OC) + OD(CO + OA)) = \frac{1}{2}\sin \alpha \cdot (BO \cdot AC + {}$ $+ OD \cdot AC) = \frac{1}{2}\sin \alpha \cdot AC(BO + OD) = \frac{1}{2}\sin \alpha \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$.

Что и требовалось доказать.

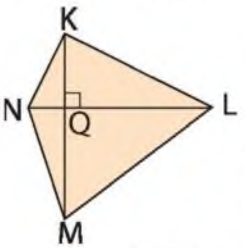


Рисунок 113

Если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения длин диагоналей. Например, в четырехугольнике $MNKL$ диагонали MK и NL перпендикулярны (рисунок 113). Тогда $S_{MNKL} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot NL$, так как $\sin 90° = 1$.

В частности, площадь S ромба равна половине произведения длин его диагоналей: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2}$, где d_1, d_2 – диагонали ромба.

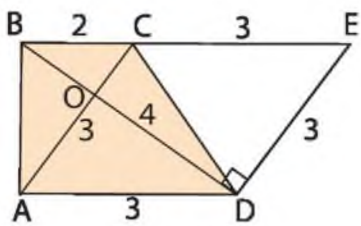


Рисунок 114

З а д а ч а 1. Основания трапеции равны 3 см и 2 см, а ее диагонали – 4 см и 3 см. Найти площадь трапеции.

Р е ш е н и е. Пусть дана трапеция $ABCD$. Проведем $DE \parallel AC$ (рисунок 114).

В треугольнике BDE стороны равны 3 см, 4 см и 5 см, значит, он прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора). $\angle BDE = 90°$, поэтому и $\angle AOD = 90°$ (по свойству параллельных прямых). Поскольку диагонали трапеции перпендикулярны, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 6$ (см^2).

О т в е т. 6 см^2.

ВОПРОСЫ

1. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

2. По какой формуле можно найти площадь выпуклого четырехугольника, если известны его диагонали и угол между ними?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

240. а) Найдите площадь трапеции, если ее диагонали перпендикулярны и равны 3,2 дм и 14 дм. б) В выпуклом четырехугольнике диагонали перпендикулярны и равны 6 см и 9 см. Найдите его площадь.

241. Диагональ равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{3}$ дм, а угол между диагоналями 60°. Найдите площадь этой трапеции.

242. Площадь ромба равна 216 см^2, а длины его диагоналей относятся как 3 : 4. Найдите сторону ромба.

Уровень В

243. Периметр прямоугольника равен 68 см, разность его сторон равна 14 см. Середины сторон прямоугольника являются вершинами четырехугольника. Укажите вид этого четырехугольника и найдите его площадь.

244. Средняя линия и высота равнобедренной трапеции соответственно равны 15 см и 6 см. Середины ее сторон являются вершинами четырехугольника. Укажите вид этого четырехугольника и найдите его площадь.

245. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD, $AD = 10$ см, $BC = 5$ см, $AC = 9$ см, $BD = 12$ см. Найдите площадь трапеции.

246. Площадь прямоугольника равна $16\sqrt{3}$ см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120°. Найдите стороны прямоугольника.

Уровень С

247. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, диагональ которого равна: а) 11 см; б) 3 дм.

248. а) Выразите площадь квадрата через его диагональ d.

б) Дан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{\Delta AOB} \cdot S_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD}$.

249. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна d и образует с большим основанием угол 45°.

250. а) Площадь плана участка земли равна 552,25 см^2 (масштаб 1 : 10 000). Найдите площадь участка. Дайте ответ в гектарах.

б) Участок заболоченной местности имеет форму четырехугольника. Как измерить его площадь, не вступая на него? (Задача древнегреческого математика Герона.)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD. Проведите отрезок CM, параллельный ее диагонали BD (точка M принадлежит лучу AD). Объясните, почему площадь треугольника ACM равна половине произведения суммы длин оснований этой трапеции на ее высоту.

24. Площадь трапеции

Отметим, что *высотой трапеции* называют перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного ее основания, к прямой, содержащей другое основание. Расстояние между прямыми, содержащими основания трапеции, также называется ее высотой. Так на рисунке 115 отрезок AH, как и его длина – высота трапеции $ABCD$.

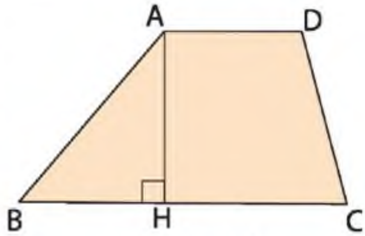


Рисунок 115

Т е о р е м а. **Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин ее оснований на высоту.**

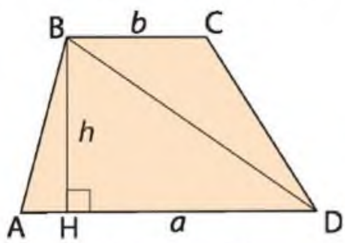


Рисунок 116

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ и высотой $BH = h$ (рисунок 116). Докажем, что

$$\boldsymbol{S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.}$$

Разбив диагональю BD трапецию на два треугольника ABD и BCD, имеем: $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$. Что и требовалось доказать.

З а д а ч а. Найти площадь трапеции, основания которой равны 6 см и 2 см, а углы при большем основании – 60° и 30°.

Р е ш е н и е. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle D = 30°$. Проведем высоту CH трапеции и отрезок $CM \parallel AB$ (рисунок 117). Тогда $\angle CMD = \angle A$ (как соответственные углы при параллельных прямых CM и AB и секущей AD). Следовательно, ΔMCD – прямоугольный. В параллелограмме $ABCM$ $AM = BC = 2$ см, тогда $MD = 4$ см. В ΔMCD сторона MC ле-

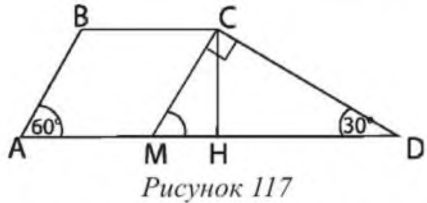


Рисунок 117

жит против угла 30°, поэтому $MC = \frac{1}{2}MD = 2$ см, $CH = MC \cdot \sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см). Площадь трапеции равна: $S_{ABCD} = \frac{6+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см^2).

О т в е т. $4\sqrt{3}$ см^2.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте и докажите теорему о площади трапеции.

2. Докажите, что площадь трапеции равна произведению длины ее средней линии на высоту.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

251. а) Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 10 см, средняя линия – 16 см и один из углов – 60°. Найдите площадь трапеции. б) Найдите периметр и площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 8 дм и 12 дм, а один из углов 135°.

252. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) ее основания и боковая сторона соответственно равны 11 см, 17 см и 5 см; б) известны ее основания 8 см, 2 см и угол 60°.

253. а) Выразите площадь трапеции через ее среднюю линию c и высоту h. б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, боковая сторона равна 12 см, а угол при меньшем основании равен 135°.

Уровень В

254. а) Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 м, периметр равен 42 м. Найдите площадь трапеции.

б) Найдите площадь (в гектарах) казахстанского природного заказника

Ботанический заказник «Каратальские пески»

«Каратальские пески», если она равна площади трапеции, высота которой 0,8(6) м, а средняя линия $1{,}5 \cdot 10^7$ м.

255. а) Длины параллельных сторон трапеции равны 25 дм и 4 дм, а длины непараллельных сторон – 20 дм и 13 дм. Найдите площадь трапеции. б) Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 5 см и 19 см, а боковые стороны 13 см и 15 см.

256. а) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ перпендикулярна к боковой стороне, а основания равны 20 см и 12 см.

б) Вырежьте из бумаги равнобедренную трапецию и разрежьте ее на две части, из которых можно составить прямоугольник.

257. а) Докажите, что, если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то ее площадь равна квадрату высоты трапеции. б) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагонали перпендикулярны и основания равны 6 см и 10 см.

в) Дан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что если площади треугольников AOB и COD равны, а его стороны AD и BC не равны, то этот четырехугольник является трапецией.

Уровень C

258. В окружности радиуса 4 см проведены диаметр AD и параллельная ему хорда BC, стягивающая дугу в 60°. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

259. а) Разделите трапецию на две равновеликие трапеции прямой, пересекающей ее основания. Сколько решений имеет задача? б) Равновеликие ΔABC и ΔMNK расположены так, что равные отрезки AC и MK лежат на одной прямой, а треугольники в одной полуплоскости относительно нее. Прямая, параллельная данной прямой, пересекает стороны ΔABC в точках D и F, а ΔMNK – в точках E и O. Докажите, что $DF = EO$.

25. Задачи по теме «Площади фигур»

З а д а ч а 1. В треугольнике даны две стороны 6 см, 12 см и угол 60° между ними. Найти длину биссектрисы этого треугольника, проведенной из вершины данного угла.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 12$ см, $\angle A = 60°$ (рисунок 118). Обозначим длину искомой биссектрисы $AD = x$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 60° =$ $= 18\sqrt{3}$ (см^2). С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BAD} +$ $+ S_{\Delta DAC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 30° =$ $= \frac{3}{2}x + 3x = \frac{9}{2}x$ (см^2). Следовательно, $18\sqrt{3} = \frac{9}{2}x$, откуда $x = 4\sqrt{3}$.

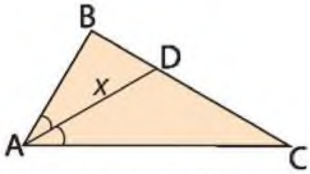


Рисунок 118

О т в е т. $4\sqrt{3}$ см.

З а д а ч а 2. В четырехугольной пирамиде, основанием которой является квадрат, каждое ребро равно 1 м. Найти сумму площадей всех граней этой пирамиды.

Р е ш е н и е. Искомая площадь равна сумме площадей основания этой пирамиды (рисунок 119) и четырех равных между собой боковых граней. Основанием пирамиды является квадрат со стороной 1 м. Его площадь равна 1 м^2. Каждая боковая грань является равносторонним треугольником со стороной 1 м. Ее площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (м^2). Тогда искомая площадь равна $(1 + \sqrt{3})$ м^2.

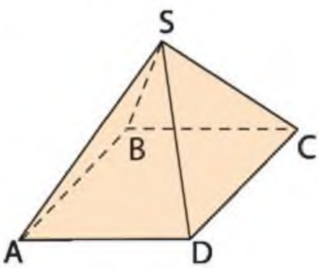


Рисунок 119

О т в е т. $(1 + \sqrt{3})$ м^2.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень В

260. а) Найдите биссектрису прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если его катеты равны 6 см и 8 см.

б) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$, D – точка пересечения биссектрисы угла B и серединного перпендикуляра к отрезку AC. Найдите площадь треугольника BCD.

261. Найдите высоту: а) прямоугольного треугольника, проведенную к его гипотенузе, если катеты равны 12 см и 16 см; б) параллелограмма, проведенную к его меньшей стороне, если известны периметр 51 см, площадь 90 см^2 и меньшая высота 5 см.

262. Найдите площадь равнобедренной трапеции: а) большее основание которой 30 дм, боковая сторона 10 дм и угол при большем основании 45°; б) с основаниями a и b ($a > b$) и углом β при большем основании.

263. Галапагосский морской заповедник занимает 133 000 км^2, а Катон-Карагайский национальный парк Казахстана – 643 477 га. Какая из этих площадей больше и во сколько раз? Ответ дайте с точностью до единиц.

Галапагосский конолоф

Водопад Кокколь в Катон-Карагайском парке

264. а) Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его боковой стороне, равна h, а острый угол при его основании равен α. Найдите площадь треугольника.

б) Дан равнобедренный треугольник, основание которого равно 5 см, а боковая сторона 4 см. Найдите сумму расстояний от произвольной точки основания до боковых сторон треугольника. Сравните полученную величину с высотой треугольника, проведенной к боковой стороне.

265. Диагональ параллелограмма равна 12 см, одна из его сторон – 8 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

266. Найдите: а) площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны по 6 см, а больший угол – 135°; б) с точностью до 0,1 см^2 площадь трапеции, основания которой равны 14 см и 10 см, а углы при большем основании – 30° и 45°.

267. В прямоугольный ΔABC вписан прямоугольник $CDEF$ так, что его вершины D, E, F лежат соответственно на сторонах AC, AB, BC. Известно, что $\frac{EF}{ED} = \frac{1}{2}$, AC = 6 дм, BC = 8 дм. Найдите площадь прямоугольника $CDEF$.

268. В остроугольном ΔABC высота CH равна 5 см, $\angle A = 65°$, $\angle BCH = 40°$. Найдите площадь ΔABC с точностью до 0,1 см^2.

Уровень C

269. а) Докажите, что если провести три медианы треугольника, то они разделят его на 6 равновеликих треугольников.

б) Дан равносторонний треугольник со стороной, равной 10 см. Найдите сумму расстояний от любой его внутренней точки M до сторон треугольника.

270. Найдите площадь: а) треугольника ABC, если известны сторона AC = 5 см и медианы AA_1 = 4,5 см, CC_1 = 6 см; б) равностороннего треугольника, если разность между его стороной и высотой равна d.

271. а) Вырежьте из бумаги две равные трапеции и разрежьте одну из них на две части, из которых можно составить треугольник, а вторую на две части, из которых можно составить параллелограмм.

б) Через точку, лежащую внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

272. 1A) Постройте квадрат, равновеликий прямоугольнику, со сторонами 4 см и 9 см.

2A) Найдите площадь ромба со стороной 4 м и углом 30°.

3B) В прямоугольном треугольнике один катет короче другого на 1 дм, а гипотенуза равна 5 дм. Найдите его площадь.

4B) Точка M – середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка N делит сторону AD в отношении 1 : 3, считая от точки A. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если $S_{\Delta AMN} = 1$ см^2.

5C) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, диагонали которой пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Постройте в координатной плоскости какой-либо отрезок и отметьте его середину. Найдите координаты концов отрезка и его середины. Сравните координаты середины отрезка с полусуммой одноименных координат концов отрезка.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

По дошедшим до нас египетским папирусам и древневавилонским текстам можно судить, что уже за две тысячи лет до нашей эры люди умели находить площади прямоугольника, треугольника, трапеции и других фигур. Многие из формул, по которым находили площади, были приближенными. Например, египтяне вычисляли площадь равнобедренного треугольника как половину произведения длин его основания и боковой стороны, если угол между ними был близок к 90°. В первых веках нашей эры уже были найдены точные формулы для нахождения площадей многих фигур. Одними из первых фигур, для которых были найдены формулы площади, являлись квадрат и прямоугольник. Формулы площадей этих фигур и прямоугольного треугольника использовались для доказательства теорем (например, теоремы Пифагора).

Ф. Бойяи

Найдите информацию об этом историческом факте в Интернете.

В развитии теории площадей и ее применении имеют большое значение понятия равносоставленных и равновеликих фигур. Интересно, что независимо друг от друга в 1832 году венгерский математик Ф. Бойяи и в 1833 году немецкий офицер, любитель математики, П. Гервин доказали теорему о том, что равновеликие многоугольники являются равносоставленными.

IV. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

В результате изучения раздела надо

знать

• понятие прямоугольной системы координат;

• формулы:
координат середины отрезка,
расстояния между двумя точками;

• определение уравнения линии на плоскости;

• уравнения:
прямой,
окружности.

уметь

• строить точки в координатной плоскости по данным координатам;

• находить:
координаты точек в координатной плоскости,
расстояния между точками;

• выводить формулы:
координат середины отрезка,
расстояния между двумя точками;

• находить уравнения прямой и окружности;

• применять прямоугольную систему координат для решения задач.

26. Координаты: точки на плоскости; середины отрезка. Расстояние между двумя точками

Напомним, что прямая, на которой указаны начало отсчета, единичный отрезок и направление, называется *координатной прямой*, или *числовой осью*. При этом направление принято считать положительным. Положение точки на такой прямой однозначно задается одним числом, которое называется координатой точки. Начало отсчета называется началом координат, его координата равна 0. Расстояние между двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ равно: $AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ (рисунок 120).

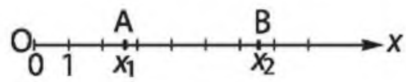


Рисунок 120

Плоскость, на которой проведены две взаимно перпендикулярные числовые оси Ox и Oy, отмечена их точка O пересечения и от нее на них отложены единичные отрезки, называется *прямоугольной системой координат*. Единичные отрезки на осях выбираются, чаще всего, равными. Точка O называется началом координат, прямые Ox и Oy – осями координат, Ox – осью *абсцисс*, Oy – осью *ординат*. Оси координат делят координатную плоскость на 4 прямых угла, которые называются четвертями, или координатными углами.

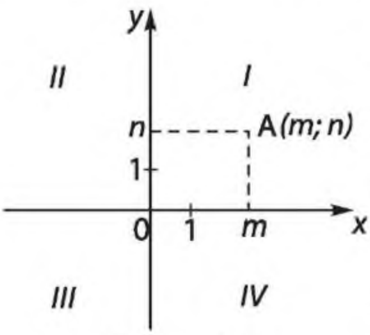


Рисунок 121

Например, на рисунке 121 отмечены *I–IV* координатные углы. Каждой точке A координатной плоскости соответствуют два числа x и y – координаты этой точки, x – абсцисса, y – ордината. Точку A с координатами x и y обозначают $A(x; y)$. Иногда для краткости вместо слов «точка с координатами m и n» пишут «точка $(m; n)$». В паре координат точки на первом месте записывают ее абсциссу, на втором – ординату.

Т е о р е м а. **Координаты $(x; y)$ середины C отрезка AB с концами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ равны: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.**

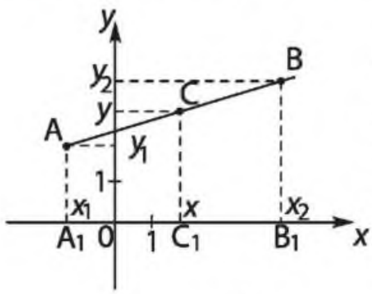


Рисунок 122

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB не параллелен оси Oy, при этом $x_1 \neq x_2$ (рисунок 122). Так как C_1 – середина отрезка A_1B_1, то $A_1C_1 = B_1C_1$, то есть $|x - x_1| = |x - x_2|$. Из этого равенства, учитывая, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $x - x_1 = -(x - x_2)$, откуда $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогично находится ордината точки C. Выполните это самостоятельно. Если $AB \parallel Ox$ или $AB \parallel Oy$, то координаты точки C также находятся по указанным формулам.

Т е о р е м а. **Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ равно: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя свойство расстояний между двумя точками на координатной прямой, имеем: $AC = |x_1 - x_2|$, $BC = |y_1 - y_2|$ (рисунок 123). По теореме Пифагора из прямоугольного ΔACB получаем:

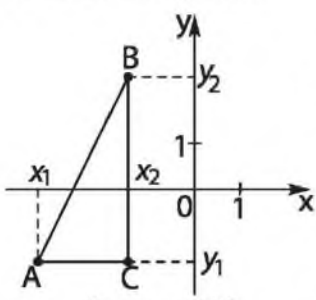


Рисунок 123

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Убедитесь, что независимо от расположения отрезка AB относительно осей координат, расстояние AB вычисляется по указанной формуле.

З а д а ч а. Дан треугольник с вершинами $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(6; 6)$. Найти длину медианы AM треугольника ABC.

Р е ш е н и е. По формуле координат середины отрезка точка M имеет координаты: $x = \frac{3 + 6}{2} = 4{,}5$, $y = \frac{2 + 6}{2} = 4$, т. е. $M(4{,}5; 4)$. Тогда по формуле расстояние между двумя точками $AM = \sqrt{(1 - 4{,}5)^2 + (4 - 4)^2} = 3{,}5$.

О т в е т. 3,5.

ВОПРОСЫ

1. Объясните, что такое прямоугольная система координат и как определяются координаты точки.

2. Выведите формулу для координат середины отрезка.

3. Выведите формулу расстояния между двумя точками с данными координатами.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

273. а) Точка A имеет координаты (3; 5). Укажите координаты точки, симметричной ей относительно: 1) начала координат; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат.

б) Точка с абсциссой 6 удалена от начала координат на расстояние, равное 10. Найдите ординату этой точки.

274. Рельеф перевала в казахстанском национальном природном парке «Алтын-Эмель» напоминает золотое седло. Именно так его назвал Чингисхан, направляясь с войском для завоевания Средней Азии. Установите, в каком году это было, если он выражается тем же числом, что и расстояние между точками A(2018; 3030), B(2018; 1811).

Перевал «Золотое седло»

275. Найдите расстояние от точки (–5; 10) до: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат.

Уровень В

276. а) Точка M удалена от начала координат на расстояние в 3 раза большее, чем точка N. Найдите OM, если N(–3; 4).

б) Длина отрезка равна 6. Постройте систему координат, в которой можно было бы легко найти координаты: 1) концов этого отрезка; 2) вершин равностороннего треугольника со стороной, равной 6.

277. Точка B лежит на биссектрисе угла III координатной четверти и удалена от начала координат на расстояние, равное $4\sqrt{2}$. Найдите координаты этой точки.

278. а) Найдите координаты середины отрезка AB, если $A(4; -3)$, $B(-2; 1)$.

б) В некоторой системе координат оказались стертыми координатные оси и остались отмеченными лишь точки $A(5; 2)$ и $B(-5; 2)$. Восстановите эту систему координат.

279. Дан отрезок AB и его середина C. Найдите координаты: а) точки B, если $A(1,5; 7)$, $C(2; 3,5)$; б) точки A, если $B(-1\frac{2}{3}; 4,5)$, $C(-3; -2\frac{1}{3})$.

280. Дан треугольник с вершинами $A(-5; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(5; -4)$. Найдите длины медиан этого треугольника.

281. Докажите, что четырехугольник, координаты вершин которого равны $(-1; -2)$, $(2; -5)$, $(1; -2)$, $(-2; 1)$, является параллелограммом и найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

282. Докажите, что: а) точки $A(3; -6)$, $B(-2; 4)$ и $C(1; -2)$ лежат на одной прямой; б) точки $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$, $O(0; 0)$ являются вершинами квадрата.

Уровень C

283. Найдите: а) на оси Ox точку, равноудаленную от точек $A(3; 7)$ и $B(-5; 9)$; б) координаты точки, равноудаленной от осей координат и находящейся от точки $(10; 0)$ на расстоянии, равном $5\sqrt{2}$.

284. Докажите, что треугольник с вершинами $A(-4; -1)$, $B(2; -9)$, $C(7; 1)$ – равнобедренный и найдите длину его биссектрисы, проведенной к основанию.

285. Квадрат $ABCD$ лежит в I координатной четверти и имеет координаты вершин $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $D(5; 1)$. Точка M – середина стороны CD, а точка N лежит на AC и $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$. Найдите координаты точек M и N и докажите, что треугольник DMN равнобедренный.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Отметьте в координатной плоскости xOy точку $A(4; 5)$. Проведите прямую OA и найдите тангенс угла ее наклона к оси Ox.

27. Уравнения линий на плоскости. Уравнения прямых

Уравнением линии на плоскости называется уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, ей не принадлежащей.

Выведем **уравнение прямой.** Пусть m – произвольная прямая в заданной системе координат. Отметим две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ такие, что прямая m является осью симметрии отрезка AB (рисунок 124). Если точка $M(x; y)$ принадлежит прямой m, то $AM = MB$. Применяя формулу расстояния между двумя точками с данными координатами и учитывая, что $AM^2 = MB^2$, составим уравнение: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

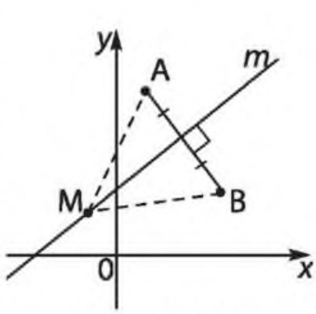


Рисунок 124

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2;$$
$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0.$$

Обозначим $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$, тогда уравнение прямой примет вид: $ax + by + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел a, b не равно нулю. Если точка N не принадлежит прямой m, то $AN^2 \neq BN^2$ и координаты точки N не удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.

Итак, *уравнением прямой* в системе координат является уравнение с двумя переменными $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$. Выясним расположение этой прямой относительно осей координат в зависимости от коэффициентов a, b, c.

Если $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$, тогда уравнение прямой $ax + by + c = 0$ можно записать в виде: $y = 0x + p$, где $p = -\frac{c}{b}$ или $\boldsymbol{y = p}$. Это *прямая, парал-*

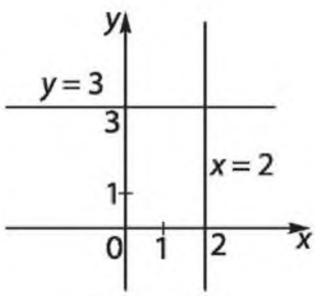


Рисунок 125

лельная оси Ox, и пересекающая ось Oy в точке $(0; p)$. При $c = 0$ получим прямую $y = 0$, совпадающую с осью Ox.

Если $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b = 0}$, то уравнение прямой $ax + by + c = 0$ можно записать в виде: $x = 0y + q$, где $q = -\frac{c}{a}$ или $\boldsymbol{x = q}$. Это *прямая, параллельная оси Oy*, и пересекающая ось Ox в точке $(q; 0)$. При $c = 0$ получим прямую $x = 0$, совпадающую с осью Oy. Например, на рисунке 125 показаны прямые $y = 3$ и $x = 2$.

Если $\boldsymbol{b \neq 0}$, тогда уравнение прямой $ax + by + c = 0$ можно записать в виде: $\boldsymbol{y = kx + p}$, где $k = -\frac{a}{b}$, $p = -\frac{c}{b}$. Это известное из курса алгебры уравнение прямой, пересекающей ось Oy в точке $(0; p)$, а ось Ox в некоторой точке $(n; 0)$.

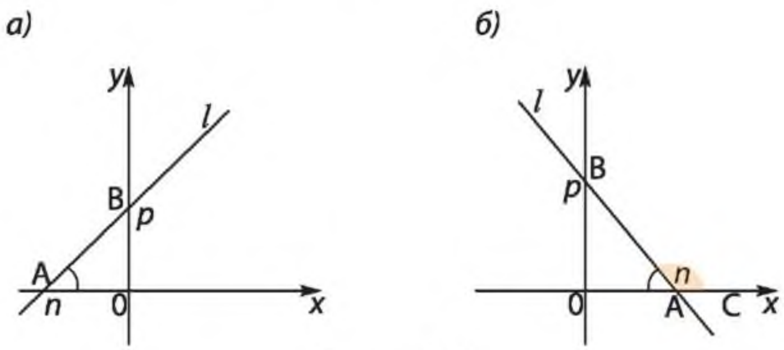


Рисунок 126

Пусть прямая l задается уравнением $y = kx + p$ и пересекает ось Oy в точке B, а ось Ox – в точке A (рисунок 126). Так как точка A принадлежит прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y = kx + p$: $0 = nk + p$, откуда $k = -\frac{p}{n}$. Из треугольника ABO найдем, что $k = -\frac{p}{n} = \operatorname{tg} A$, если $n < 0$ (рисунок 126, *а*) или $k = -\frac{p}{n} = -\operatorname{tg} A$, если $n > 0$ (рисунок 126, *б*).

Итак, если $k > 0$, то $\angle BAO$ – острый, если $k < 0$, то $\angle BAC$ – тупой. Коэффициент k называется *угловым коэффициентом* прямой. Если в уравнениях двух прямых угловые коэффициенты равны, то эти прямые параллельны, например, на рисунке 127 показаны прямые $y = 2x + 3$ и $y = 2x - 2$.

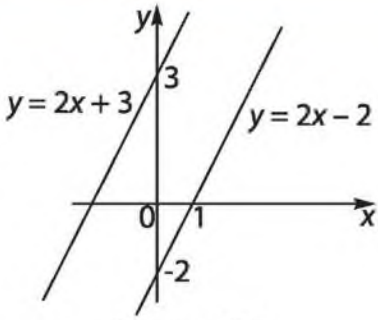


Рисунок 127

З а д а ч а 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, где $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$.

Р е ш е н и е. В уравнении прямой вида $y = kx + b$ найдем значения k и b. Так как она проходит через точку $A(x_1; y_1)$, то $y_1 = kx_1 + b$. Тогда $b = y_1 - kx_1$, следовательно, уравнение прямой примет вид $y - y_1 = k(x - x_1)$. Так как прямая проходит и через точку B, то $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, отсюда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение k в уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$, получим $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Разделив обе части этого равенства на $y_2 - y_1$, запишем **уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$**, в виде: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

О т в е т. $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

З а д а ч а 2. а) Доказать, что произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых, не параллельных осям координат, равно –1. б) Записать уравнение прямой, проходящей через точку (–8; 0) и перпендикулярной прямой $4x - 7y + 26 = 0$.

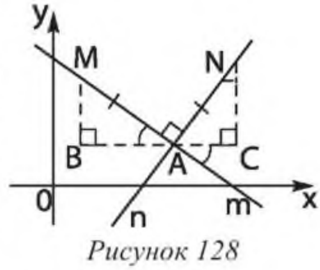


Рисунок 128

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть прямые m и n перпендикулярны и пересекаются в точке A (рисунок 128). Отметим на прямой m точку M, а на прямой n точку N так, чтобы $AM = AN$. Через точку A проведем прямую AB, параллельную оси Ox, и через точки M и N прямые MB и NC, параллельные оси Oy (рисунок 128). Получили прямоугольные треугольники AMB и ANC, которые равны по гипотенузе и острому углу.

Угловой коэффициент k_1 прямой n равен: $k_1 = \text{tg}\angle NAC = \frac{NC}{AC}$, а угловой коэффициент k_2 прямой m равен: $k_2 = -\text{tg}\angle MAB = -\frac{MB}{AB}$. Из равенства треугольников AMB и ANC следует, что $MB = AC$, $AB = NC$, значит, $k_1 \cdot k_2 = -\frac{NC}{AC} \cdot \frac{MB}{AB} = -1$.

б) Запишем уравнение $4x - 7y + 26 = 0$ данной прямой в виде $y = \frac{4}{7}x + 3\frac{5}{7}$. Найдем коэффициенты k и p в уравнении $y = kx + p$ прямой перпендикулярной данной. Так как $\frac{4}{7} \cdot k = -1$, то $k = -\frac{7}{4}$. По условию искомая прямая проходит через точку $(-8; 0)$, следовательно $0 = -\frac{7}{4} \cdot (-8) + p$, $p = -14$. Тогда уравнение искомой прямой $y = -\frac{7}{4}x - 14$, его можно записать в виде: $7x + 4y + 56 = 0$.

Ответ. б) $7x + 4y + 56 = 0$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется уравнением линии на плоскости?

2. Выведите уравнение прямой.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

286. а) Укажите три точки с целочисленными координатами, принадлежащие прямой $3x + 2y - 5 = 0$.

б) Запишите уравнение линии, симметричной параболе $y = (x - 2)^2$ относительно: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

287. Докажите, что если точка $M(m; n)$ принадлежит прямой $x + y - 9 = 0$, то и точка $N(n; m)$ принадлежит ей.

288. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$, если она: а) параллельна оси абсцисс; б) перпендикулярна оси абсцисс.

289. Докажите, что прямые $2x - 3y - 6 = 0$ и $4x - 6y - 25 = 0$ параллельны.

Уровень B

Парк «Буйратау»

290. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A и образующей с осью Ox угол α, если: а) $A(0; 3)$ и $\alpha = 30°$; б) $A(2; 1)$ и $\alpha = 135°$.

291. а) Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки: 1) (0; 0) и (9; 10); 2) (3; 1) и (5; –4).

б) В казахстанском национальном природном парке «Буйратау» произрастает много видов растений, из которых в Красную книгу страны занесены можжевельник казачий, скерда сибирская и другие. Найдите число видов растений в этом парке, если оно выражается ответом в задаче: «найдите абсциссу точки пересечения прямой MN с осью Ox, где $M(0; -69)$ и $N(-5; -70)$».

292. Составьте уравнение прямой, отрезок AB которой, заключенный между осями координат, делится точкой $C(2; -1)$ пополам.

293. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ и $C(4; 0)$. Составьте уравнения прямых, содержащих медианы этого треугольника.

294. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(6; 0{,}5)$ и перпендикулярную прямой: а) $y = 2x - 5$; б) $8x + 4y + 3 = 0$.

Уровень C

295. Запишите уравнение линии, все точки которой равноудалены от точек: а) $A(1; 1)$ и $B(3; 3)$; б) $M(0; 2)$ и $N(4; -2)$.

296. Составьте уравнение линии, которой принадлежат все точки, такие, что разность квадратов расстояний от них до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 2)$ равна 1.

28. Уравнение окружности

Пусть дана окружность с центром в точке $C(a;\ b)$ и радиусом R (рисунок 129). Тогда координаты любой ее точки $M(x;\ y)$ должны удовлетворять условию $CM = R$. Применяя формулу расстояния между точками C и M, получим: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$, или
$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$. (1)

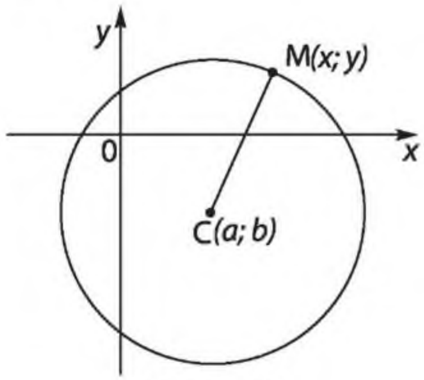


Рисунок 129

Любая точка, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, лежит на окружности, так как расстояние от нее до центра окружности равно R. Следовательно, уравнение (1) является уравнением окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом R. В частности, если центром окружности является начало координат, то ее уравнение имеет вид:

$$\boldsymbol{x^2+y^2=R^2}.$$

З а д а ч а 1. Доказать, что линия, заданная уравнением $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 9 = 0$, является окружностью и найти общие точки этой окружности и осей координат.

Р е ш е н и е. Представим данное уравнение в виде:

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) - 25 = 0$, $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Это уравнение окружности с центром в точке $C(-3;\ 5)$ и радиусом, равным 5 (рисунок 130). Так как расстояние от центра C окружности до оси Ox равно радиусу, то окружность касается оси абсцисс в точке $(-3;\ 0)$. А расстояние от центра C окружности до оси ординат меньше радиуса, поэтому ось Oy пересекает окружность в двух точках. Уравнение этой оси $x = 0$. Подставив это значение x в уравнение окружности, получим: $9 + (y - 5)^2 = 25$. Решая это уравнение, найдем: $(y - 5)^2 = 16$, $y - 5 = 4$, или $y - 5 = -4$, откуда $y = 9$, или $y = 1$. Итак, ось Oy пересекает окружность в точках (0; 1) и (0; 9).

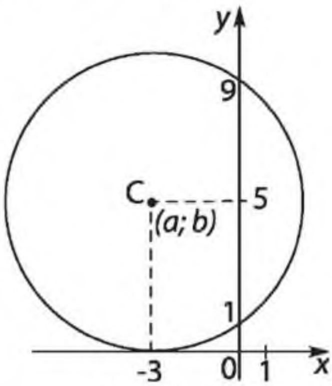


Рисунок 130

О т в е т. Окружность с центром в точке (–3; 5) и радиусом 5 касается оси Ox в точке (–3; 0) и пересекает ось Oy в точках (0; 1) и (0; 9).

З а д а ч а 2. В окружности единичного радиуса проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. На диаметре CD отмечена точка K, такая, что $\frac{CK}{KD} = \frac{2}{1}$, на диаметре AB – точка L, такая, что $\frac{AL}{LB} = \frac{3}{1}$. Доказать, что прямые AK и CL пересекаются в точке, принадлежащей окружности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем систему координат с началом в точке O пересечения диаметров AB и CD (рисунок 131). Так как радиус окружности равен 1, то координаты точек: $A(-1; 0)$, $C(0; 1)$, $K(0; -\frac{1}{3})$, $L\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Тогда прямая AK задается уравнением $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$, а прямая CL – уравнением $y = -2x + 1$ (проверьте это самостоятельно). Найдем общую точку этих прямых: $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = -2x + 1$, $\frac{5}{3}x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{5}$; $y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}$. Проверим, принадлежит ли точка $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$

окружности $x^2 + y^2 = 1$; $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$. Получили верное числовое равенство $\frac{16+9}{25} = 1$, значит, точка $\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ пересечения прямых AK и CL лежит на данной окружности.

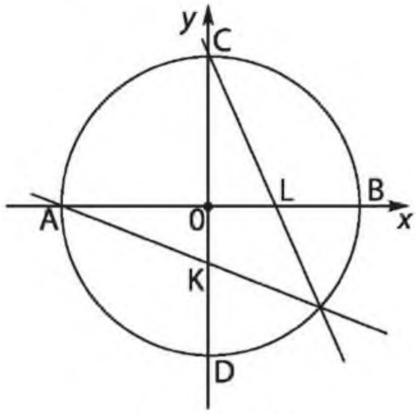


Рисунок 131

ВОПРОСЫ

Выведите уравнение окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

297. Найдите координаты центра окружности и ее радиус, если известно уравнение окружности: а) $(x + 2)^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 4)^2 = 8$; в) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 16$.

298. Составьте уравнение окружности с центром в точке C и радиусом R, если: а) $C(4; 8)$, $R = 2$; б) $C(-1; 2)$, $R = 4$; в) $C(3; -5)$, $R = 3$.

299. Составьте уравнение окружности с центром в начале координат, которой принадлежит точка: а) (0; 10); б) $\left(1\frac{11}{13}; \frac{10}{13}\right)$; в) (–1,5; 3,6).

300. Какие из следующих уравнений являются уравнением окружности: а) $x^2 + y^2 = -9$; б) $x^2 + y^2 = 25$; в) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7$; г) $(x - 2)^2 + y = 16$; д) $x^2 + y^2 - 2(x + y) = 2$?

Уровень B

301. Дана окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. Составьте уравнение окружности: а) равной данной, центр которой находится в точке $(3; -5)$;

б) симметричной данной относительно оси ординат.

302. а) Запишите уравнение окружности с центром в точке $C(4; -3)$, которая проходит через точку $A(8; -6)$.

б) Ученик предложил следующий вывод уравнения произвольной окружности: «Расстояние R от произвольной точки $P(x; y)$ окружности до начала координат выражается формулой $x^2+y^2=R^2$. Это равенство и есть уравнение окружности.» Найдите ошибки в таком «выводе» уравнения окружности.

303. а) Запишите уравнение окружности с центром в точке $(-3; 2)$, касающейся оси Ox.

б) Сколько общих точек имеют прямая $x=3$ и окружность $x^2+y^2=16$?

304. Составьте уравнение окружности с диаметром AB, если: а) $A(1; 8)$, $B(5; 2)$ и установите, пересекает ли эта окружность оси координат; б) $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$, найдите координаты точек пересечения этой окружности с прямой $x=-0{,}5$.

Уровень C

305. Составьте уравнение окружности, описанной около: а) прямоугольного треугольника ABC с вершинами в точках $A(0; 16)$, $B(12; 0)$, $C(0; 0)$; б) равностороннего треугольника NMK, координаты вершин которого равны $N(-3\sqrt{3}; 0)$, $M(0; 9)$, $K(3\sqrt{3}; 0)$.

29. Применение координат к определению тригонометрических функций углов от 0° до 180°

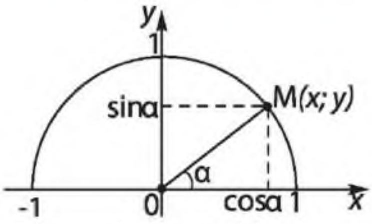


Рисунок 132

Построим прямоугольную систему координат и полуокружность радиусом, равным единице, с центром в начале координат, которая расположена в первом и втором координатных углах (рисунок 132). Назовем эту полуокружность единичной и отложим от луча Ox в полуплоскость, содержащую эту полуокружность, угол α.

Если луч OM совпадает с лучом Ox, то будем считать, что $\alpha = 0^\circ$. Обозначим координаты точки M: через x – ее абсциссу, через y – ее ординату. Тогда значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для острого угла выражаются через координаты точки M:

$$\mathbf{\sin\alpha = y, \qquad \cos\alpha = x, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.}$$

Если угол α прямой, тупой, равен 0° или развернутый, то $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если они существуют, также определим по этим формулам.

Тогда *синусом угла* α, где $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, называется ордината y точки M единичной полуокружности, а *косинусом угла* α – абсцисса x точки M, *тангенсом угла* α – отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, *котангенсом угла* α – отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тогда

$\sin 0^\circ = 0$	$\cos 0^\circ = 1$	$\operatorname{tg} 0^\circ = 0$	$\operatorname{ctg} 0^\circ$ не существует
$\sin 90^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	$\operatorname{tg} 90^\circ$ не существует	$\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$
$\sin 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$	$\operatorname{tg} 180^\circ = 0$	$\operatorname{ctg} 180^\circ$ не существует

Заметим, что $\mathbf{0 \leq \sin \alpha \leq 1}$, $\mathbf{-1 \leq \cos \alpha \leq 1}$, поскольку координаты $(x; y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

Для любого угла α из промежутка $0° \leq \alpha \leq 180°$ выполняется основное тригонометрическое тождество: $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$. Докажите его самостоятельно, используя рисунок 132. Рассмотрите все случаи: $\alpha = 0°, 90°, 180°$, α – острый, тупой угол.

Справедливы следующие формулы, позволяющие для нахождения значений тригонометрических функций тупых углов использовать значения тригонометрических функций острых углов:

$\mathbf{\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha}$, $\mathbf{\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha}$,

$\mathbf{tg (180° - \alpha) = -tg \alpha}$, $\mathbf{ctg (180° - \alpha) = -ctg \alpha}$, где α – острый угол.

Доказать их можно на основании соответствующих определений тригонометрических функций углов от 0° до 180° и рассмотрения некоторых прямоугольных треугольников. Например, формулы $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$ следуют из равенства прямоугольных треугольников OMM_1 и ONN_1 (рисунок 133).

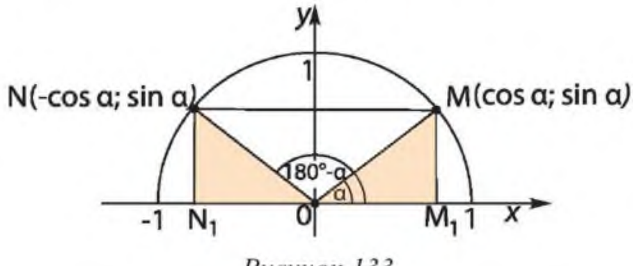


Рисунок 133

Приведем примеры использования этих формул.

П р и м е р 1. Найти: а) sin 150°; б) tg 135°.

Р е ш е н и е. а) $\sin 150° = \sin (180° - 30°) = \sin 30° = 0{,}5$;

б) $tg\, 135° = tg\, (180° - 45°) = -tg\, 45° = -1$.

П р и м е р 2. Упростить выражение $\frac{\cos 80° \cdot \sin 80°}{\sin 10° \cdot \cos 10°}$.

Р е ш е н и е. $\cos 80° = \cos (90° - 10°) = \sin 10°$, $\sin 80° = \sin (90° - 10°) = \cos 10°$. Тогда $\frac{\cos 80° \cdot \sin 80°}{\sin 10° \cdot \cos 10°} = \frac{\sin 10° \cdot \cos 10°}{\sin 10° \cdot \cos 10°} = 1$.

ВОПРОСЫ

1. Как определяют синус, косинус, тангенс и котангенс углов от 0° до 180°?

2. Докажите, что каждому значению угла от 0° до 180° соответствует только одно значение его: а) синуса; б) косинуса. Верны ли обратные утверждения?

3. Верно ли, что с возрастанием угла его синус возрастает, а косинус убывает?

4. Какие тригонометрические тождества вы знаете? Какое из них называется основным тригонометрическим тождеством?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

306. Вычислите: а) $\sin 90° + 2\cos 90° - \sin 0°$; б) $\cos 0° - 0{,}5\sin 90° + 2\sin 180°$.

307. Упростите выражение: а) $a^2 \cdot \cos 0° - 2ab \cdot \sin 90° + b^2 \cdot \operatorname{tg}^2 45°$; б) $a^2 \cdot \sin 180° + 2ab \cdot \cos 90° + b^2 \cdot \operatorname{tg} 45°$.

308. Вычислите значение выражения: а) $\cos\alpha + \cos 3\alpha$, если $\alpha = 60°$;

б) $\sin\frac{\alpha}{6} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ если $\alpha = 180°$.

Уровень В

309. Постройте угол A, если: а) $\sin A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{3}{4}$; в) $\cos A = -0{,}4$.

310. Имеет ли смысл при $\alpha = 100°$ выражение: а) $\sqrt{\sin\alpha}$; б) $\sqrt{\cos\alpha}$?

311. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов: а) 120°; б) 135°; в) 150° и заполните таблицу.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									
$\operatorname{ctg}\alpha$									

312. Найдите, используя таблицу значений тригонометрических функций острых углов и тригонометрические формулы: а) $\sin 160°$; б) $\cos 130°$; в) $\operatorname{tg} 140°$.

313. Найдите, используя таблицу значений тригонометрических функций острых углов и тригонометрические формулы, угол α, для которого: а) $\sin \alpha \approx 0{,}2$; б) $\cos \alpha \approx -0{,}60$; в) $\operatorname{tg} \alpha \approx -0{,}40$; г) $\operatorname{ctg} \alpha \approx 0{,}70$.

314. Найдите $\sin \alpha$, где $0° \le \alpha \le 180°$, если: а) $\cos \alpha = 0{,}5$; б) $\cos \alpha = -1$; в) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

315. Найдите $\cos \alpha$, где $0° \le \alpha \le 180°$, если: а) $\sin \alpha = 0$; б) $\sin \alpha = 0{,}5$; в) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

316. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если а) $\cos \alpha = 1$; б) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin \alpha = 0{,}6$ и $90° < \alpha < 180°$.

Уровень С

317. В треугольнике тангенс одного угла равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$, а синус другого $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите его третий угол.

318. В треугольнике один угол равен 30°, а другой – 40°. Найдите с точностью до 0,01 синус третьего угла.

319. Угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника равен 30°. Найдите с точностью до 0,01 косинус его внешнего угла при вершине основания.

320. а) Найдите тангенс тупого угла параллелограмма, если синус его острого угла равен 0,6. б) Косинус одного из смежных углов равен –0,6. Найдите синус другого угла.

30. Задачи по теме «Прямоугольная система координат на плоскости»

З а д а ч а 1. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

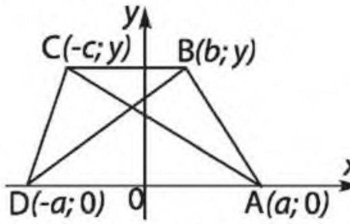


Рисунок 134

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Введем систему координат и расположим ее так, чтобы основание AD трапеции находилось на оси абсцисс, а началом координат была середина AD (рисунок 134). Тогда координаты вершин трапеции могут быть представлены в следующем виде: $A(a; 0)$, $B(b; y)$, $C(-c; y)$, $D(-a; 0)$, где $a > 0$, $a > b$, $c > 0$. Докажем, что $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, имеем:

$$AC^2 + BD^2 = (a + c)^2 + y^2 + (b + a)^2 + y^2 = a^2 + 2ac + c^2 + 2y^2 + b^2 + 2ab + a^2 = 2(a^2 + y^2) + c^2 + b^2 + 2a(b + c).$$

$$AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = (a - b)^2 + y^2 + (a - c)^2 + y^2 + 2 \cdot 2a \cdot (b + c) = a^2 - 2ab + b^2 + 2y^2 + a^2 - 2ac + c^2 + 4a \cdot (b + c) = 2(a^2 + y^2) + c^2 + b^2 - 2a(b + c) + 4a \cdot (b + c) = 2(a^2 + y^2) + c^2 + b^2 + 2a(b + c).$$

Равенство выполняется и при другом расположении точек B и C.

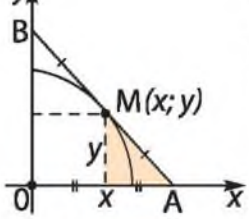


Рисунок 135

В случае, когда $AB = DC$, $AD = BC$, то есть, если четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, получим $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ (*сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон*).

З а д а ч а 2. Концы отрезка AB, длина которого равна a, скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка?

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с вершиной данного прямого угла, а его стороны находились на осях (рисунок 135).

1-й способ. Если точка $M(x; y)$ – середина отрезка AB, то ее координаты равны: $x = \frac{a}{2}\cos A$, $y = \frac{a}{2}\sin A$. Тогда $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\cos A\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin A\right)^2 =$ $= \frac{a^2}{4}(\cos^2 A + \sin^2 A) = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, так как $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$. Получили, что точка $M(x; y)$ принадлежит дуге окружности $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, содержащейся в I координатном угле.

2-й способ. Если точка $M(x; y)$ – середина отрезка AB, то координаты концов отрезка равны: $A(2x; 0)$, $B(0; 2y)$. По формуле расстояния между двумя точками имеем: $AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$. По условию $AB = a$, поэтому $4x^2 + 4y^2 = a^2$, откуда $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Последнее уравнение задает окружность с центром в начале системы координат и радиусом $\frac{a}{2}$, поэтому можно заключить, что точка $M(x; y)$ принадлежит дуге окружности $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, причем эта дуга расположена в I координатной четверти.

О т в е т. Середина отрезка описывает дугу окружности с центром в вершине данного прямого угла и радиусом $\frac{a}{2}$, заключенную между сторонами данного угла.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень В

321. Докажите, что любая точка с координатами $(a; 2a)$ лежит на прямой, проходящей через начало координат и точку $(1; 2)$.

322. Напишите уравнение окружности с центром в точке $A(-4; 0)$, касающейся оси Oy.

323. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $(-2; 3)$ и $(2; -1)$, являющиеся концами диаметра.

324. Установите, что ΔABC – равнобедренный и найдите координаты точки пересечения его медиан, если $A(-1; 0,5)$, $B(-7; 3)$, $C(-1; 5,5)$.

325. Напишите уравнение окружности: а) вписанной в треугольник с вершинами (0; 0), $(3; 3\sqrt{3})$, (6; 0); б) описанной около треугольника с вершинами (–5; –1), (–1; –5), (–1; –1).

326. Даны точки $O(0; 0)$, $B(a; b)$ и $C(c; d)$. Какими должны быть координаты точки D, чтобы четырехугольник $OBCD$ был параллелограммом?

327. На единичной полуокружности с центром в начале координат даны точки A, B, C с абсциссами 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответственно. Найдите: а) $\sin\angle AOC$; б) $\operatorname{tg}\angle AOB$.

Уровень С

328. Докажите, что для любой точки M прямоугольника $ABCD$ верно равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

329. Докажите, используя прямоугольную систему координат, что, если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.

330. Докажите, что если BM – медиана ΔABC, то $4BM^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

331. 1А) Какие из уравнений являются уравнениями прямых:

1) $y = 2x$;	5) $x = 0$;
2) $3x - 2y = 7$;	6) $y = 5$;
3) $xy = 4$;	7) $2x - 3xy + 4 = 0$;
4) $x^2 + y = 9$;	8) $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} - 5 = 0$?

2А) На единичной полуокружности с центром в начале координат даны точки $A(1; 0)$ и $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найдите косинус угла AOB.

3В) Концы диаметра окружности – точки $A(-5; 6)$, $B(7; -4)$. Составьте уравнение этой окружности и найдите расстояние от начала координат до ее центра.

4В) Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 2)$ и $D(2; -2)$ является квадратом.

5C) Постройте линию, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 4x$, и найдите на ней точку, ближайшую к точке $A(6; -3)$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Идея координат зародилась в древности. Первоначально их использование было связано с астрономией и географией. В частности, с нахождением положения светил на небе, пунктов на поверхности Земли, при составлении звездных и географических карт и календаря. Птолемей пользовался долготой и широтой как географическими координатами.

Найдите, пользуясь Интернетом, долготу и широту вашего населенного пункта.

Идеи координат имели применение в Древнем Египте в виде квадратных сеток (палеток), которые позволяли переносить или увеличивать изображения. Прямоугольной сеткой пользовались и художники. Общематематическое значение метода координат впервые установили французские математики Р. Декарт (1596–1650) и П. Ферма (1601–1665). Изложение метода координат было впервые опубликовано в «Геометрии» Декарта в 1637 году. Слова «абсцисса» и «ордината» – латинского происхождения. Их объединил и назвал координатами в конце XVII века немецкий математик Г. Лейбниц (1646–1717).

Г. Лейбниц.

П. Ферма

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

Уровень А

332. Сформулируйте определение, свойства и признаки параллелограмма.

333. Сформулируйте определение, свойства и признаки прямоугольника.

334. Отрезки AB и CD – диаметры окружности. Докажите, что четырехугольник $ACBD$ – прямоугольник.

335. Сформулируйте определение, свойства и признаки ромба.

336. Найдите площадь ромба, если: а) его высота 12 см, а большая диагональ 20 см; б) его сторона 33,8 см, а меньшая диагональ 26 см.

337. Сформулируйте определение, свойства и признаки квадрата.

338. Найдите отношение периметра квадрата к сумме его диагоналей.

339. Сформулируйте определение трапеции и свойства равнобедренной трапеции.

340. Найдите с точностью до 1 дм^2 площадь равнобедренной трапеции, в которой: а) большее основание равно 30 дм, боковая сторона – 10 дм, а угол при большем основании – 56°; б) меньшее основание равно 20 дм, высота – 15 дм, а угол при большем основании – 34°.

341. Почему треугольник со сторонами 5 см, 12 см и 13 см – прямоугольный?

342. Найдите площадь треугольника, если его стороны равны: а) 10 см, 10 см, 16 см; б) 4 см, 13 см, 15 см.

Уровень B

343. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ градусные меры углов A и B относятся как 7 : 8, $\angle C = 150°$, а угол D меньше угла B на 20°. Найдите неизвестные углы этого четырехугольника.

344. Найдите неизвестные стороны и диагональ BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = 12$ см, $BC = CD$, $\angle C = 90°$, $\angle B = 105°$, $\angle D = 135°$.

345. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $CO = OA$, $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

346. Периметр параллелограмма 16 см, одна из его сторон на 2 см больше другой, а один из углов 150°. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к большей стороне, и его площадь.

347. Биссектрисы углов A и D прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, принадлежащей стороне BC. Найдите площадь прямоугольника, если $AM = 5$ см.

348. а) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, расстояние от точки O до стороны AD равно 2 см. Найдите площадь прямоугольника, если $\angle BAO = 60°$.

б) Какой из прямоугольников с данной диагональю d имеет наибольшую площадь?

349. Большая сторона параллелограмма 5 дм, а высоты 2 дм и 2,5 дм. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

350. а) В ΔABC проведены биссектриса AN и отрезки $NM \parallel AC$, $NL \parallel AB$ ($M \in AB$, $L \in AC$). Докажите, что четырехугольник $AMNL$ – ромб. б) Хорда BC окружности с центром в точке O перпендикулярна радиусу OA и проходит через его середину. Докажите, что четырехугольник $ABOC$ – ромб.

351. Найдите периметр и площадь ромба $ABCD$, если серединный перпендикуляр к стороне AD проходит через вершину B и $BD = 8$ см.

352. а) В прямоугольном ΔABC отрезок CD – биссектриса прямого угла, DK и DL – перпендикуляры, проведенные к сторонам AC и CB соответственно. Докажите, что $CKDL$ – квадрат.
б) В ΔABC $\angle B = 90°$, $AB = BC$, BO – медиана, на луче BO отложен отрезок $OD = BO$. Докажите, что $ABCD$ – квадрат.

353. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна к боковой стороне и лежит на биссектрисе угла при большем основании. Найдите углы трапеции.

354. Боковая сторона AB равнобедренной трапеции $ABCD$ равна основанию BC и в 2 раза меньше основания AD. Докажите, что $AC \perp CD$.

355. Разделите равнобедренную трапецию на две части так, чтобы из них можно было составить: а) треугольник; б) прямоугольник.

356. Докажите, что все треугольники ABC_1, ABC_2, …, ABC_n равновелики, если точки C_1, C_2, …, C_n лежат на прямой, параллельной отрезку AB.

357. Точка M симметрична вершине D параллелограмма $ABCD$ относительно точки C. Докажите, что площадь этого параллелограмма равна площади треугольника AMD.

358. а) В треугольнике ABC известны $AC = 20$ см, $AB = 11$ см и высота $BH = 6{,}6$ см. Найдите высоту CD. б) В равнобедренном ΔABC с основанием AC отрезки AD и BH его высоты. Найдите CD, если $BH = 9$ см, $\sin A = 0{,}6$.

359. Даны точки $A(-1; 2)$, $B(2; 7)$, $C(4; 3)$. Найдите длину средней линии треугольника ABC, параллельную стороне AC.

360. а) Найдите площадь треугольника с вершинами $A(-2; 2)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 9)$. б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки, равные 16 см и 9 см.

361. а) Как можно измерить площадь цветочной клумбы формы ромба, используя мерную рулетку? б) В комнате длиной 4 м, шириной 3,5 м, высотой 2,8 м имеется дверь размером 0,9 м × 2 м и окно размером 1,5 м × 1,2 м. Сколько рулонов обоев потребуется для оклейки стен комнаты, если размеры обоев в рулоне 10 м × 0,5 м? в) Катон-Карагайский национальный природный парк, через который проходил Великий Шелковый путь, является одним из самых больших в Казахстане. Выразите его площадь (в кв. м) числом, записанным в стандартном виде, если она равна площади прямоугольного треугольника с гипотенузой $2 \cdot 10^5$ м и углом 70°.

362. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, параллельная AC. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь трапеции $AMNC$?

363. а) Выразите площадь равностороннего треугольника через его сторону, равную a. б) Найдите сторону равностороннего треугольника, если его площадь равна $9\sqrt{3}$ см^2.

364. Найдите площадь равностороннего треугольника, если: а) радиус описанной около него окружности равен 2 см; б) радиус вписанной в него окружности равен $\sqrt{3}$ см.

Уровень C

365. В равнобедренном ΔABC на основании AC взята точка K так, что $AK : KC = 1 : 2$, а на сторонах AB и BC – точки N и M соответственно, так что $KN \parallel BC$, $KM \parallel AB$, периметр четырехугольника $KNBM$ равен 12 см. Найдите боковую сторону ΔABC и его площадь, если $\angle B = 45°$.

366. Постройте (с помощью циркуля и линейки) треугольник по двум сторонам a, b и медиане m, проведенной к третьей стороне.

367. Какой вид должен иметь параллелограмм со сторонами a и b, чтобы его площадь была наибольшей?

368. Разделите данный прямоугольник на три равновеликих многоугольника двумя лучами, выходящими из одной вершины.

369. Постройте (с помощью циркуля и линейки) ромб по его стороне a и диагонали d.

370. Окружность радиуса 4 см касается стороны и продолжений двух других сторон равностороннего треугольника. Найдите его площадь.

371. Внутри данного треугольника ABC найдите такую точку X, чтобы площади треугольников ABX, BCX, ACX были равны.

372. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте данного треугольника.

373. а) Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на части $AD = m$, $DC = n$. Докажите, используя площади, что $\frac{AB}{m} = \frac{BC}{n}$.

б) Площадь ΔABC равна 75 см^2, известно, что $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$, BD – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ABD.

374. Может ли в каком-нибудь прямоугольном треугольнике сумма синусов двух углов быть равной 1?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ !

375. 1A) Запишите две различные формулы, выражающие площадь прямоугольного треугольника с катетами a, b, гипотенузой c и высотой h, проведенной к гипотенузе.

2A) В прямоугольном ΔABC гипотенуза $AB = 10$ см, катет $BC = 6$ см, BM – медиана. Найдите тангенс угла CBM.

3B) Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.

4B) Найдите длину наибольшей средней линии треугольника с вершинами в точках $A(5; -3)$, $B(-7; 6)$, $C(0; 6)$.

5C) Участок земли имеет форму равнобедренной трапеции, большее основание которой равно 64 м, прилежащий к нему угол равен 60°, а боковая сторона – 14 м. Какова площадь этого участка? Ответ запишите в арах, с точностью до 0,1 а.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица приближенных значений тангенсов углов от 0° до 89°

A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A	A	tg A
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Таблица приближенных значений синусов и косинусов углов от 0° до 90°

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

Тренировочные упражнения

I. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Многоугольник. Сумма углов многоугольника

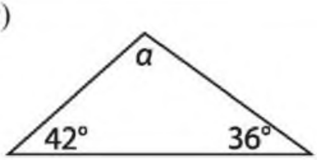
1. Заполните таблицу:

N	4		6		5	
S		180º		900º		1260º

где N – количество сторон, S – сумма углов многоугольника.

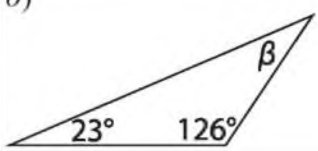
2. Найдите угол:

а)



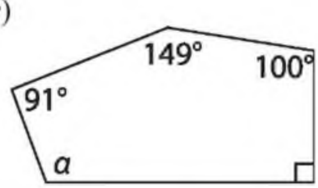
α – ?

б)



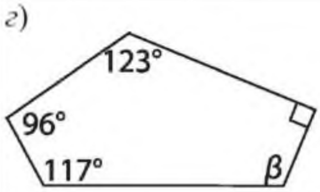
β – ?

в)



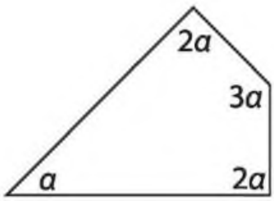
α – ?

г)



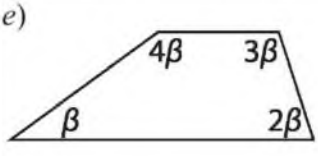
β – ?

д)



α – ?

е)



β – ?

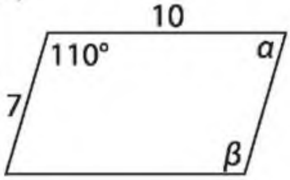
3. Найдите углы четырехугольника, если они относятся как: а) 6 : 2 : 3 : 4; б) 1 : 2 : 3 : 4.

4. Существует ли выпуклый четырехугольник, три из сторон которого равны 5 см, 10 см, 12 см, а его периметр равен: а) 80 см; б) 45 см? Ответ объясните.

Параллелограмм, его признаки и свойства

5. Найдите неизвестные элементы параллелограмма:

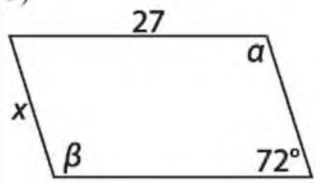
а)



α – ?
β – ?
P – ?

б)

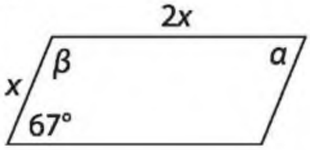
$P = 88$



α – ?
β – ?
x – ?

в)

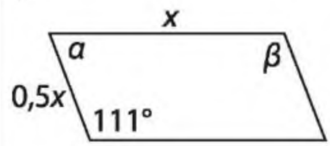
$P = 114$



α – ?
β – ?
x – ?

г)

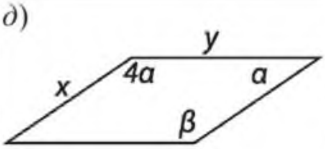
$P = 78$



α – ?
β – ?
x – ?

д)

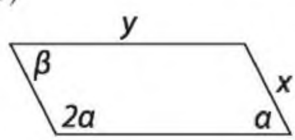
$P = 36$



$x + y$ – ?
α – ?
β – ?

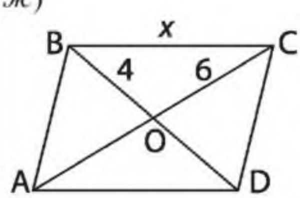
е)

$x + y = 23$



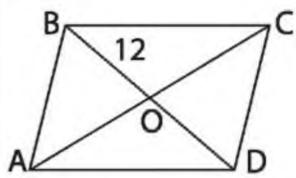
P – ?
α – ?
β – ?

ж)



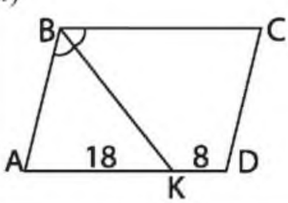
$BO = 4$
$OC = 6$
$P_{AOD} = 20$
x – ?

з)



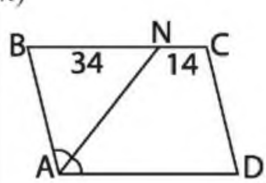
$P_{ABCD} = 78$
$BO = 12$
P_{ABD} – ?

и)



$AK = 18$
$DK = 8$
P_{ABCD} – ?

к)



$BN = 34$
$CN = 14$
P_{ABCD} – ?

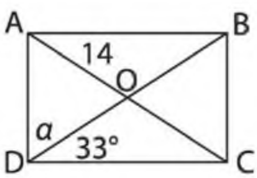
6. Найдите стороны параллелограмма, если: а) его периметр 126 см, а отношение соседних сторон равно 0,8; б) его периметр 36 см, а разность соседних сторон равна 1 см.

7. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса его острого угла A. На отрезки какой длины она делит сторону: а) BC, если $AB = 4$ см, $AD = 11$ см; б) CD, если $AB = 7$ см, $AD = 2$ см?

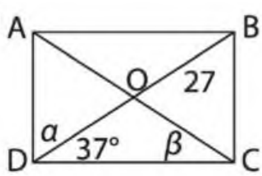
8. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если известно, что:
а) $\angle B - \angle A = 50°$; б) $\angle D = 3 \cdot \angle C$.

Свойства прямоугольника

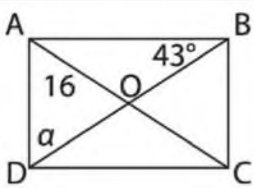
9. Найдите неизвестные элементы прямоугольника:

а)


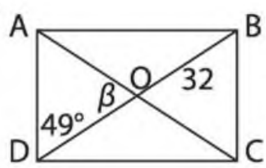
$AO = 14$
BO – ?
DO – ?
α – ?

б)


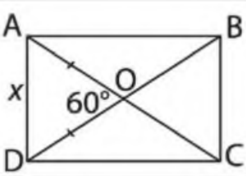
$BO = 27$
AO – ?
DB – ?
α – ?
β – ?

в)


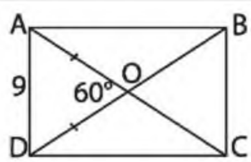
$AO = 16$
$P_{ABCD} = 90$
P_{COD} – ?
α – ?

г)


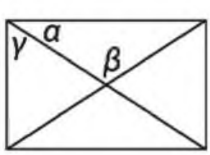
$BO = 32$
$P_{ABC} = 155$
P_{ABCD} – ?
β – ?

д)


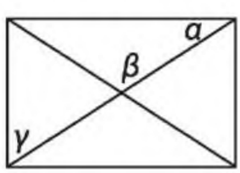
$BD = 34$
x – ?

е)


AC – ?

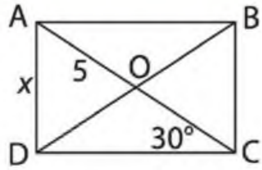
ж)


$\alpha + \beta = 145°$
γ – ?

з)


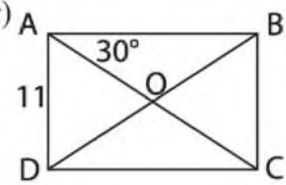
$\alpha + \beta = 155°$
γ – ?

и)



$AO = 5$
$x - ?$

к)

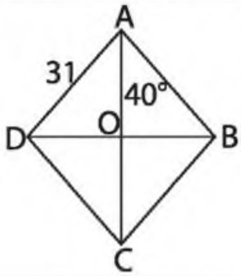


$AD = 11$
$OC - ?$

Свойства ромба

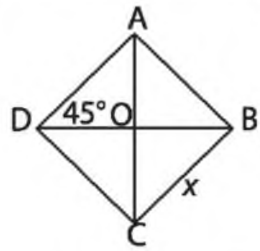
10. Найдите неизвестные элементы ромба:

а)



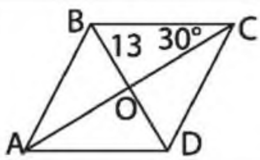
$P_{ABCD} - ?$
$\angle DAB - ?$
$\angle ABC - ?$

б)



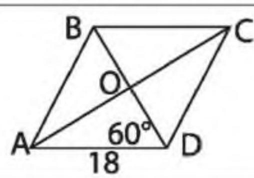
$P_{ABCD} = 44$
$\angle DAB - ?$
$\angle ADC - ?$
$x - ?$

в)



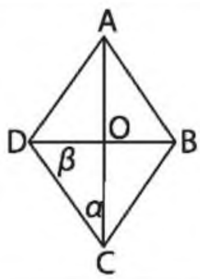
$BO = 13$
$BC - ?$

г)



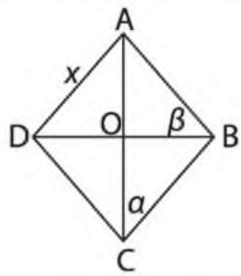
$AD = 18$
$DO - ?$

д)



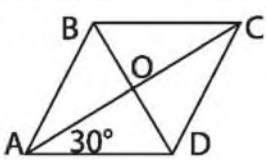
$OD = \frac{1}{2} DC$
$AB = 10$
$P_{ABCD} - ?$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$

е)



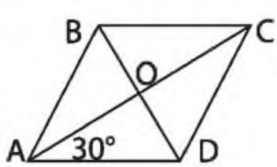
$BC = 2OB$
$P_{ABCD} = 56$
$x - ?$
$\alpha - ?$
$\beta - ?$

ж)



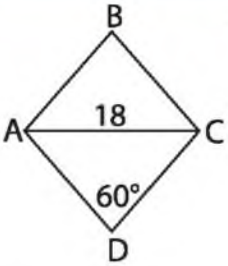
$P_{ABCD} = 36$
$BD - ?$

з)



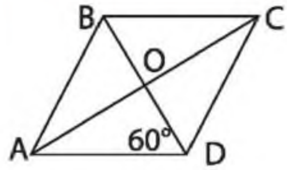
$P_{ABCD} = 84$
$BO - ?$

и) P_{ABCD} – ?



к) $BD = 30$

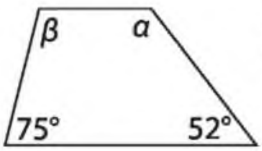
P_{ABCD} – ?



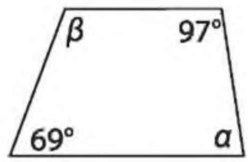
Свойства трапеции

11. Найдите неизвестные элементы трапеции:

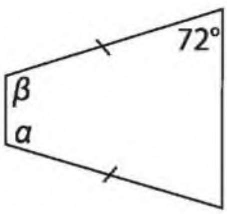
а) α – ? β – ?



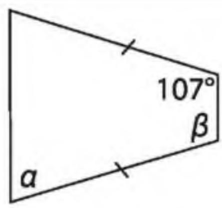
б) α – ? β – ?



в) α – ? β – ?

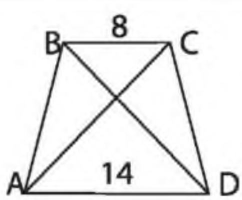


г) α – ? β – ?

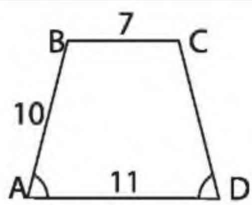


д) $AC = BD$

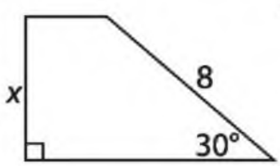
$P_{ABCD} = 42$



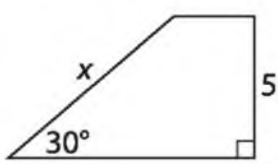
е) P_{ABCD} – ?



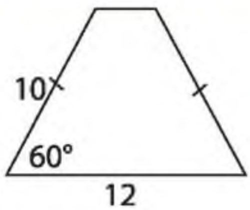
ж) x – ?



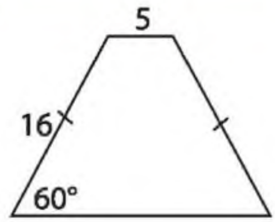
з) x – ?



и) P_{ABCD} – ?



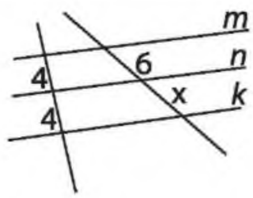
к) P_{ABCD} – ?



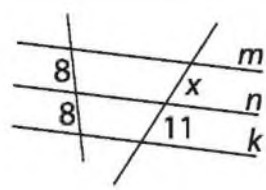
Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках

12. Найдите неизвестные элементы:

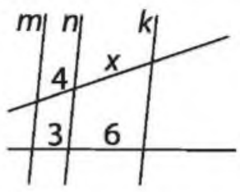
а) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



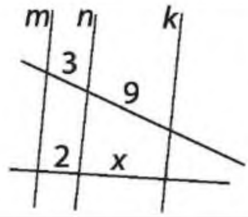
б) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



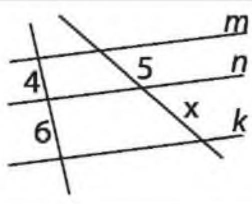
в) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



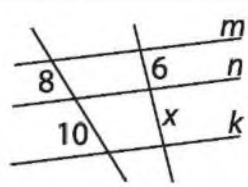
г) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



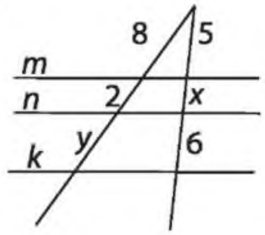
д) $m \parallel n \parallel k$, x – ?



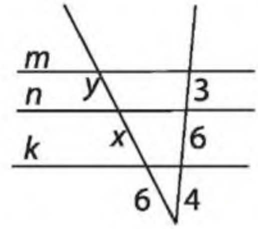
е) $m \parallel n \parallel k$, x – ?

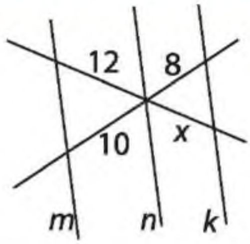
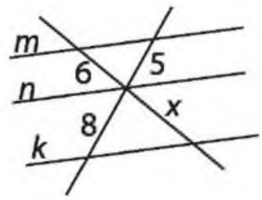


ж) $m \parallel n \parallel k$, x – ?, y – ?



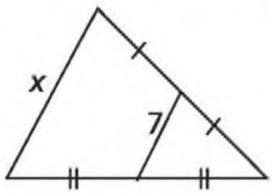
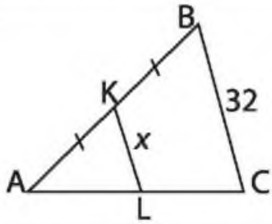
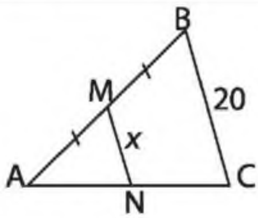
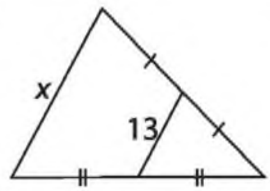
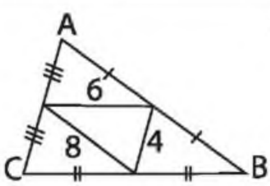
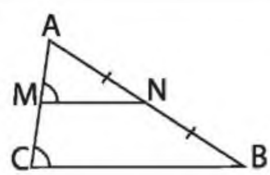
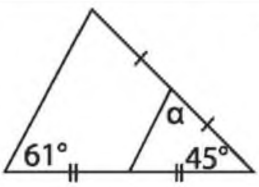
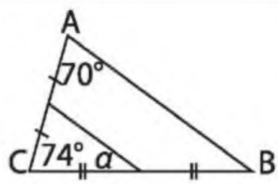
з) $m \parallel n \parallel k$, x – ?, y – ?



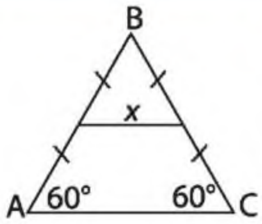
и)  $m \parallel n \parallel k$ x – ? y – ?	*к)*  $m \parallel n \parallel k$ x – ? y – ?

Средняя линия треугольника

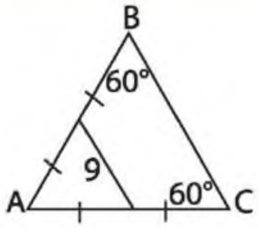
13. Найдите неизвестные элементы треугольника:

а)  x – ?	*б)*  $KL \parallel BC$ x – ?
в)  $MN \parallel BC$ x – ?	*г)*  x – ?
д)  P_{ABC} – ?	*е)*  $P_{ABC} = 24$ P_{AMN} – ?
ж)  α – ?	*з)*  α – ?

и) $P_{ABC} = 36$, x – ?



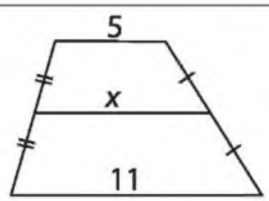
к) P_{ABC} – ?



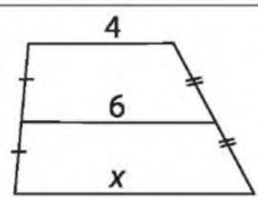
Средняя линия трапеции

14. Найдите неизвестные элементы трапеции:

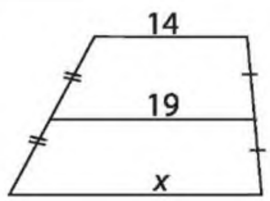
а) x – ?



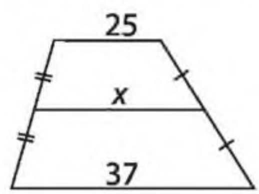
б) x – ?



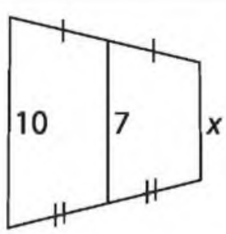
в) x – ?



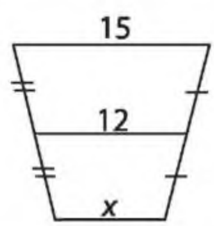
г) x – ?



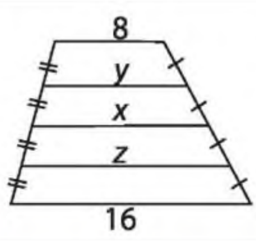
д) x – ?



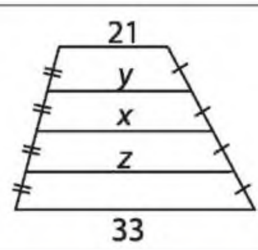
е) x – ?

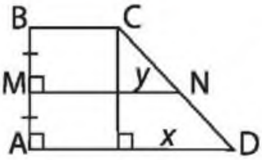
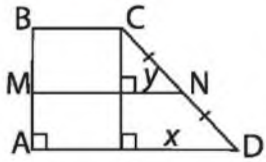


ж) x – ? y – ? z – ?



з) x – ? y – ? z – ?



и)	*к*)
 $AD = 40$ $MN = 32$ x – ? y – ?	 $AD = 20$ $MN = 15$ x – ? y – ?

Выберите верный ответ (15–21).

15. Если сумма двух углов параллелограмма равна 94°, то его тупой угол равен:

а) 200°;

б) 166°;

в) 133°;

г) 100°;

д) 89°.

16. Если разность двух углов параллелограмма равна 100°, то меньший из них равен:

а) 50°;

б) 40°;

в) 30°;

г) 45°;

д) 35°.

17. В параллелограмме $ABCD$ из вершины B к сторонам AD и CD проведены перпендикуляры BH и BK соответственно, угол HBK равен 64°. Найдите углы параллелограмма $ABCD$.

а) 26°, 154°, 26°, 154°;

б) 52°, 128°, 52°, 128°;

в) 56°, 124°, 56°, 124°;

г) 58°, 122°, 58°, 122°;

д) 64°, 116°, 64°, 116°.

18. Тупой угол ромба в 5 раз больше острого угла. Во сколько раз сторона ромба больше его высоты?

а) 1,5; б) 2; в) 2,5; г) 4; д) 5.

19. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает прямую BC в точке K. Чему равны отрезки BK и KC, если $AB = 5$ см и $AD = 12$ см?

а) 3 см и 2 см;

б) 4 см и 1 см;

в) 5 см и 7 см;

г) 12 см и 7 см;

д) 17 см и 7 см.

20. Длины оснований трапеции относятся как 7 : 3, а их разность равна 3,2 см. Найдите длину средней линии этой трапеции.

а) 1,2 см;

б) 2,8 см;

в) 3,2 см;

г) 4 см;

д) 8 см.

21. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle D = 90°$, $\angle ABD = \angle DBC = 60°$, $CD = b$, $BD = a$. Найдите периметр трапеции.

а) $b + 4a$;

б) $b + 2{,}5a$;

в) $1{,}5b + 2a$;

г) $2(b + a)$;

д) $3b + 0{,}5a$.

Заполните пропуски (*22–28*).

22. Если провести два перпендикулярных диаметра окружности и последовательно соединить их концы отрезками, то полученный четырехугольник является … .

23. Если тупой угол ромба равен 120°, а сторона равна 6 см, то меньшая диагональ равна … см.

24. Если диагональ прямоугольника в 2 раза больше одной из его сторон, то острый угол между диагоналями равен … градусов.

25. Если в ромбе *ABCD* высота *BK* делит сторону *AD* на отрезки $AK = 2$ см, $KD = 2$ см, то углы ромба равны …°, …°,…°, …°.

26. Если средняя линия треугольника равна 8 см, то сторона этого треугольника, параллельная средней линии, равна … см.

27. Если один из углов прямоугольной трапеции равен 45°, то остальные ее углы равны …°, …°, …°.

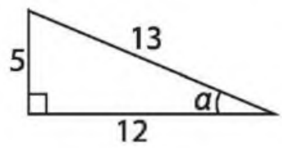
28. Одной из замечательных точек треугольника является точка пересечения … , равноудаленная от всех его вершин.

II. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

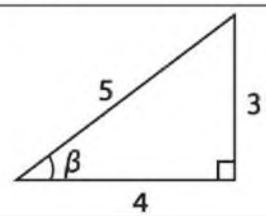
Косинус острого угла прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора

29. Найдите неизвестные элементы треугольника:

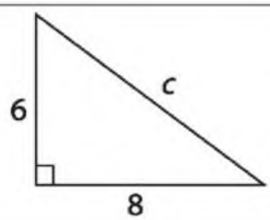
а) $\cos\alpha - ?$



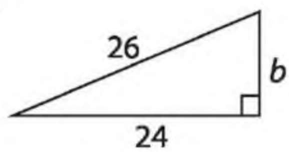
б) $\cos\beta - ?$



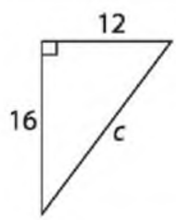
в) $c - ?$



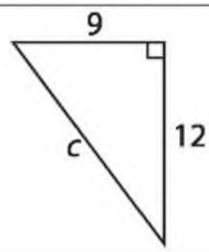
г) $b - ?$



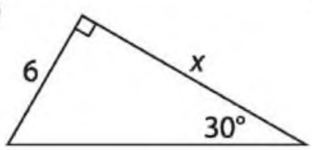
д) $c - ?$



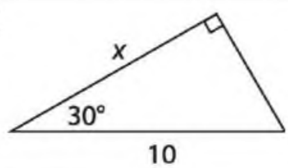
е) $c - ?$



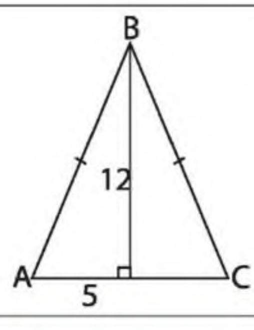
ж) $x - ?$



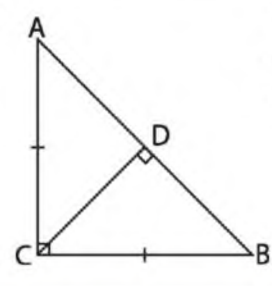
з) $x - ?$

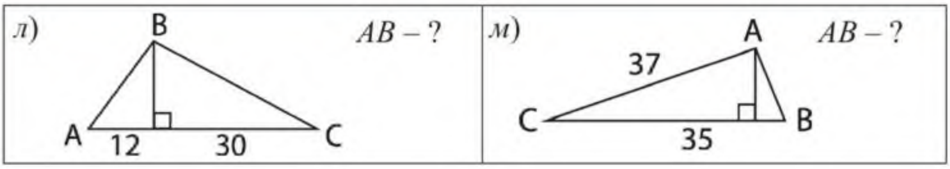


и) $AB - ?$ $P_{ABC} - ?$



к) $AC = 5\sqrt{2}$ $AB - ?$ $CD - ?$

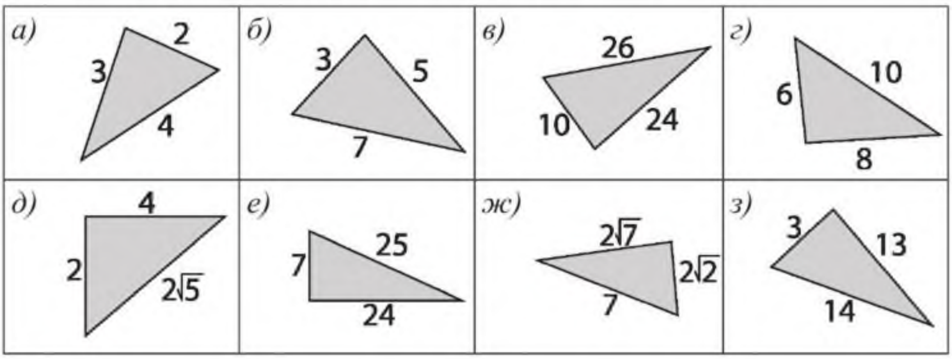




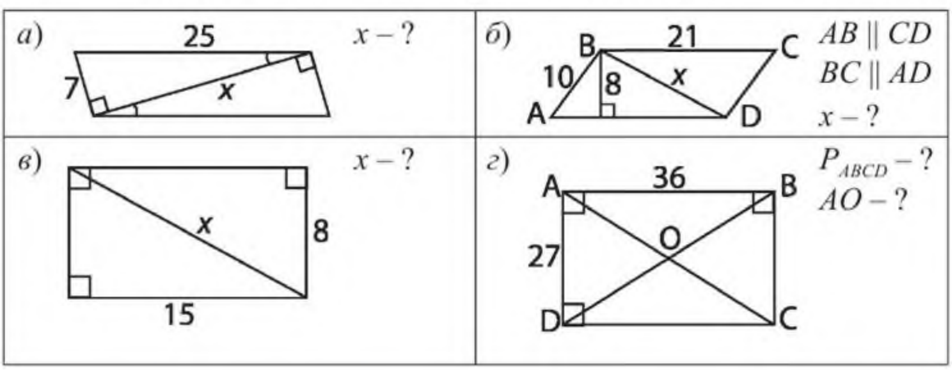
30. Заполните таблицу:

катет	8		12	40		1	6	2
катет	6	17	35	42	15	$2\sqrt{6}$	$6\sqrt{3}$	
гипотенуза		15			20			$10\sqrt{2}$

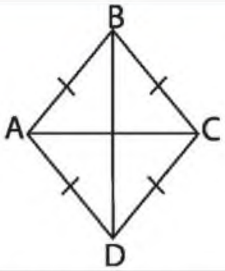
31. Выберите прямоугольные треугольники:



32. Найдите неизвестные элементы многоугольника:

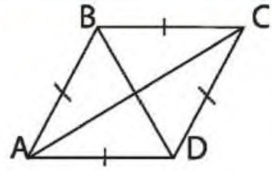


д)



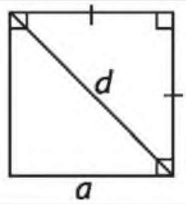
$AC = 12$
$BD = 16$
$AB - ?$
$P_{ABCD} - ?$

е)



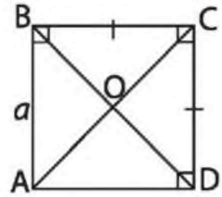
$AB = 10$
$AC = 16$
$BD - ?$
$P_{ABCD} - ?$

ж)



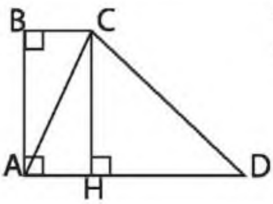
$x - ?$

з)



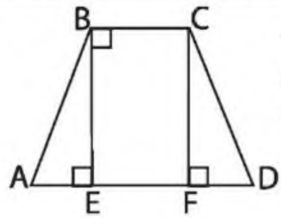
$x - ?$

и)



$AB - ?$
$P_{ABC} - ?$

к)

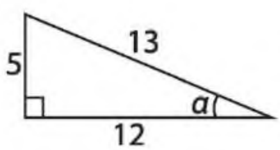


$AC = 5\sqrt{2}$
$AB - ?$
$CD - ?$

Тригонометрические функции острого угла

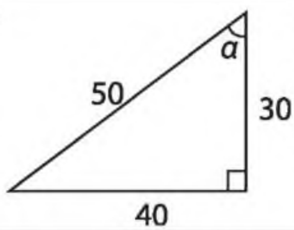
33. Найдите значения функций:

а)



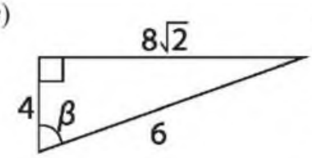
$\sin\alpha - ?$
$\cos\alpha - ?$
$\operatorname{tg}\alpha - ?$
$\operatorname{ctg}\alpha - ?$

б)



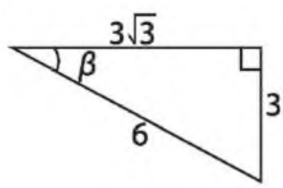
$\sin\alpha - ?$
$\cos\alpha - ?$
$\operatorname{tg}\alpha - ?$
$\operatorname{ctg}\alpha - ?$

в)



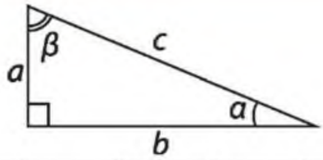
$\sin\beta - ?$
$\cos\beta - ?$
$\operatorname{tg}\beta - ?$
$\operatorname{ctg}\beta - ?$

г)



$\sin\beta - ?$
$\cos\beta - ?$
$\operatorname{tg}\beta - ?$
$\operatorname{ctg}\beta - ?$

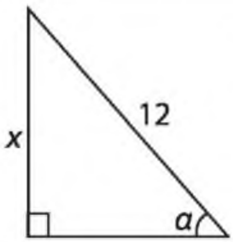
34. Заполните таблицу:



a	4	8	16		39	$2\sqrt{7}$	2		4
b	4,2		63	21	80	$6\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	
c		17		29				5	10
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									
$\operatorname{ctg}\alpha$									

35. Найдите неизвестные элементы треугольника:

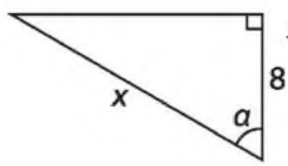
а)



$\sin\alpha = \frac{3}{4}$

$x - ?$

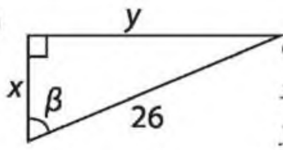
б)



$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$x - ?$

в)

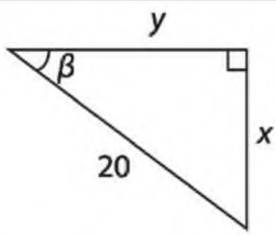


$\cos\beta = \frac{5}{13}$

$x - ?$

$y - ?$

г)

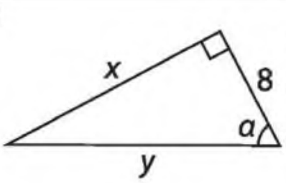


$\sin\beta = \frac{3}{5}$

$x - ?$

$y - ?$

д)

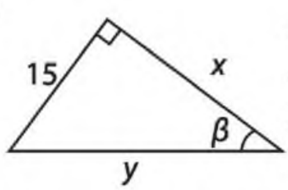


$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$

$x - ?$

$y - ?$

е)

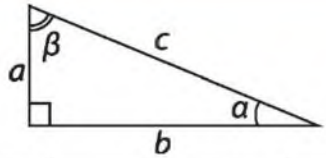


$\operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$

$x - ?$

$y - ?$

36. Заполните таблицу:



a			9	0,7		6	
b		48			$10\sqrt{2}$	12	4
c	15						
$\sin\alpha$				$\frac{7}{25}$			
$\cos\alpha$	$\frac{3}{5}$				$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		
$\operatorname{tg}\alpha$		$\frac{5}{12}$					1
$\operatorname{ctg}\alpha$			$\frac{9}{40}$				

37. Сравните значения тригонометрических функций углов:

а) $\sin 40°$ и $\sin 50°$;
б) $\cos 15°$ и $\cos 70°$;
в) $\operatorname{tg} 20°$ и $\operatorname{tg} 30°$;
г) $\sin 35°$ и $\sin 20°$;
д) $\cos 65°$ и $\cos 40°$;
е) $\operatorname{tg} 80°$ и $\operatorname{tg} 50°$.

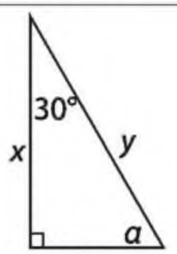
38. Используя тригонометрические формулы, заполните таблицу:

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
	0,6		
			$\frac{40}{9}$

Решение прямоугольного треугольника

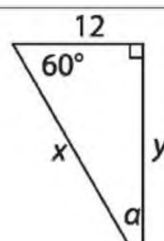
39. Найдите неизвестные элементы треугольника:

а)



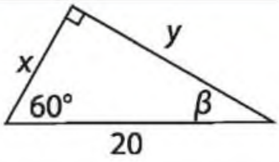
α – ?
x – ?
y – ?

б)



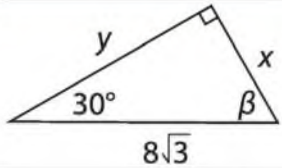
α – ?
x – ?
y – ?

в)



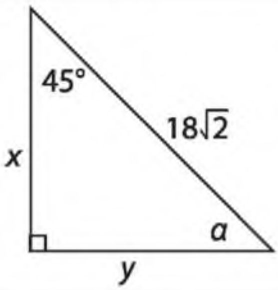
β – ?
x – ?
y – ?

г)



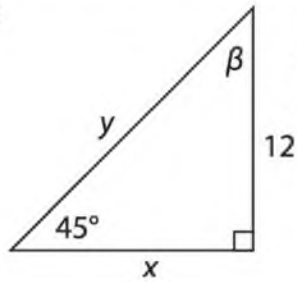
β – ?
x – ?
y – ?

д)



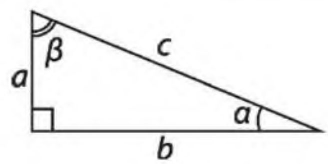
α – ?
x – ?
y – ?

е)



β – ?
x – ?
y – ?

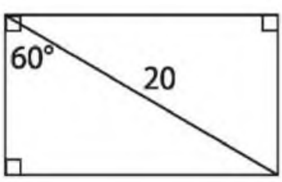
40. Заполните таблицу:



a		3		30		$17\sqrt{3}$
b			8		$4\sqrt{2}$	
c	2			60	8	34
α	45°		60°			
β		30°				

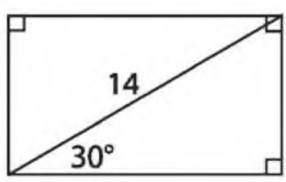
41. Найдите неизвестные элементы многоугольника:

а)

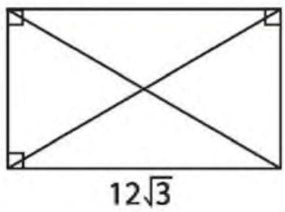
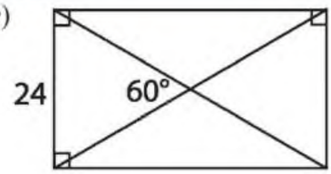
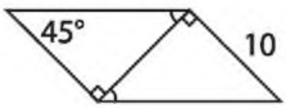
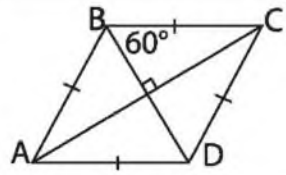
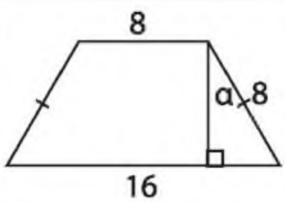
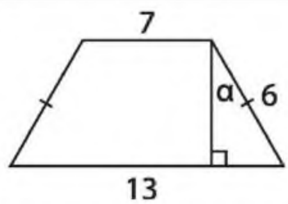
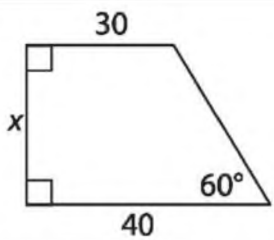
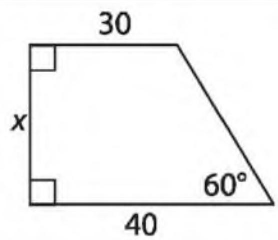


S – ?

б)



S – ?

в)  $P - ?$	*г)*  $P - ?$
д)  $P - ?$	*е)*  $AB = 40$ $AC - ?$
ж)  $\alpha - ?$	*з)*  $\alpha - ?$
и)  $x - ?$	*к)*  $x - ?$

Выберите верный ответ из предложенных или запишите свой вариант ответа (42–47).

42. BC – касательная к окружности с центром O (B – точка касания). Найдите CO, если $BC = 8$ см, а диаметр окружности равен 12 см.

а) 8 см;

б) 10 см;

в) 12 см;

г) 15 см;

д) другой ответ.

43. Дан ромб $ABCD$ с тупым углом B, равным $120°$, и стороной $AB = 6$. Найдите диагонали ромба.

а) 6 и $6\sqrt{3}$;

б) 6 и $3\sqrt{3}$;

в) 3 и $6\sqrt{3}$;

г) 6 и $12\sqrt{3}$;

д) другой ответ.

44. Треугольник является прямоугольным, если его стороны равны:

а) 4 см, 5 см, 6 см;

б) 6 см, 7 см, 8 см;

в) 6 см, 8 см, 10 см;

г) 7 см, 8 см, 9 см;

д) 8 см, 11 см, 15 см.

45. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, BM – медиана. Найдите синус угла CBM.

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{13}}{13}$; в) $\frac{\sqrt{52}}{4}$; г) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$; д) другой ответ.

46. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. На отрезки какой длины делит гипотенузу высота треугольника, проведенная из вершины прямого угла?

а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{21}{5}$; б) $\frac{15}{8}$ и $\frac{25}{8}$; в) $\frac{9}{5}$ и $\frac{16}{5}$; г) 2 и 3; д) другой ответ.

47. Укажите, какие из равенств являются тождествами:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - 1}}$; в) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

г) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}$; д) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Заполните пропуски (48–54).

48. Медианы BM и AN равностороннего треугольника пересекаются в точке O. Если $AB = 12$ см, то BO и ON соответственно равны ….

49. Если сторона ромба равна a, а его диагональ $a\sqrt{2}$, то углы ромба равны … градусов.

50. Если высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки 2 см и 8 см, то длина этой высоты равна … см.

51. Если в равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине B, равным 120°, проведена высота $CD = 3$ см, то боковая сторона AB равна … см.

52. Зная косинус угла, можно найти его синус (применяя основное тригонометрическое тождество): $\sin\alpha =$… .

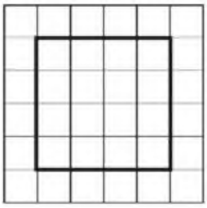
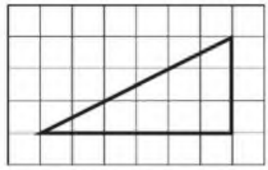
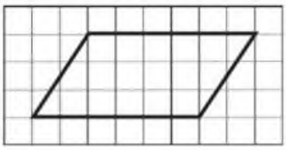
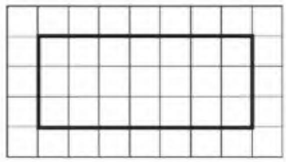
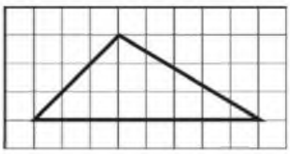
53. Зная косинус и тангенс угла, можно найти его синус: $\sin\alpha =$… .

54. Если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$, то $\operatorname{ctg}\alpha =$ …, $\cos\alpha =$ …, $\sin\alpha =$… .

III. ПЛОЩАДИ ФИГУР

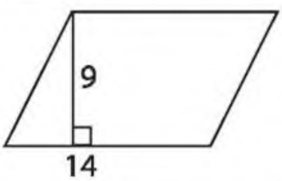
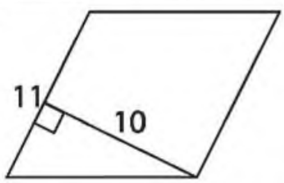
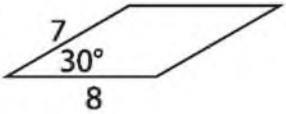
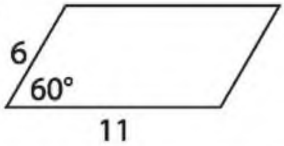
Понятие площади. Площадь прямоугольника

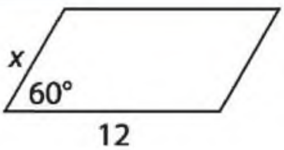
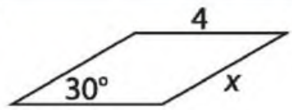
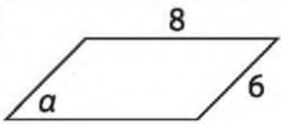
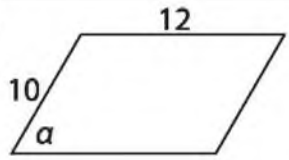
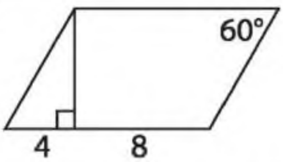
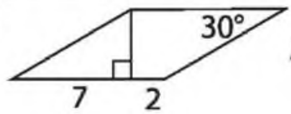
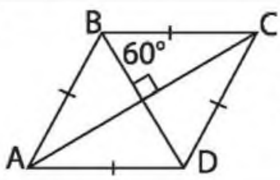
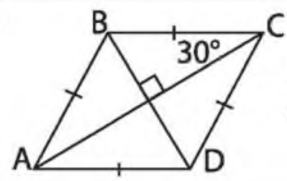
55. Найдите площадь фигуры (одна клетка равна единице измерения):

а)  S – ?	*б*)  S – ?
в)  S – ?	*г*)  S – ?
д)  S – ?	*е*)  S – ?

Площадь параллелограмма

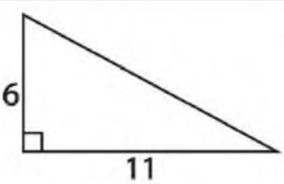
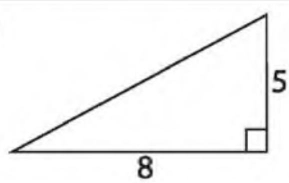
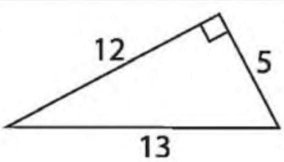
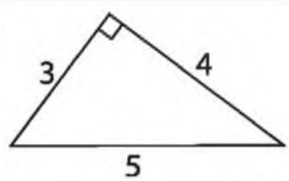
56. Найдите площадь параллелограмма и его неизвестные элементы:

а)  S – ?	*б*)  S – ?
в)  S – ?	*г*)  S – ?

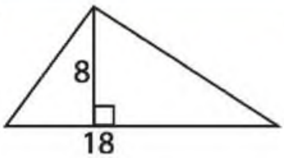
д)  $S = 48\sqrt{3}$ $x - ?$	*е)*  $S = 10$ $x - ?$
ж)  $S = 24\sqrt{2}$ $\alpha - ?$	*з)*  $S = 60\sqrt{3}$ $\alpha - ?$
и)  $S - ?$	*к)*  $S - ?$
л)  $AC = 12\sqrt{3}$ $BD = 12$ $S - ?$	*м)*  $AC = 10\sqrt{3}$ $BD = 10$ $S - ?$

Площадь треугольника

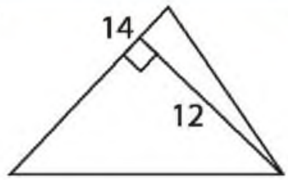
57. Найдите площадь треугольника и его неизвестные элементы:

а)  $S - ?$	*б)*  $S - ?$
в)  $S - ?$	*г)*  $S - ?$

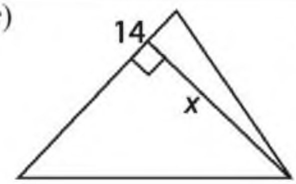
д) $S - ?$



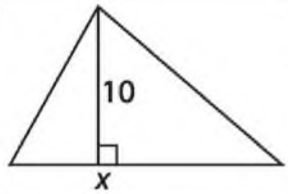
е) $S - ?$



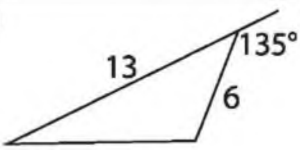
ж) $S = 84$
$x - ?$



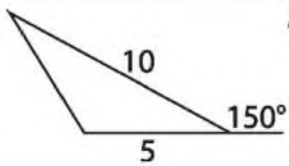
з) $S = 85$
$x - ?$



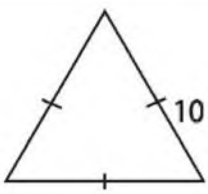
и) $S - ?$



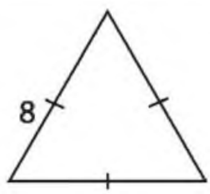
к) $S - ?$



л) $S - ?$



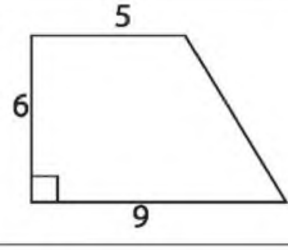
м) $S - ?$



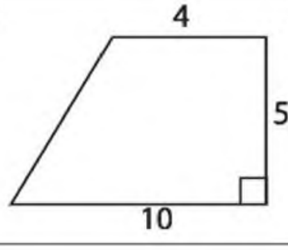
Площадь трапеции

58. Найдите площадь трапеции и ее неизвестные элементы:

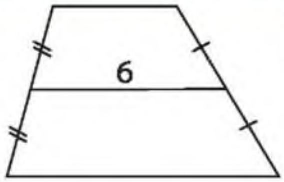
а) $S - ?$



б) $S - ?$

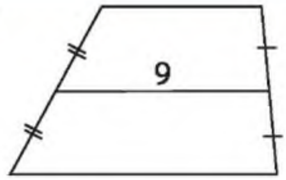


в)



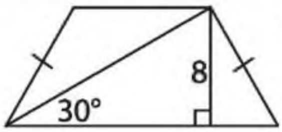
$h = 5$
$S - ?$

г)



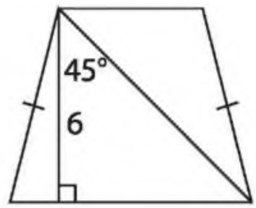
$h = 6$
$S - ?$

д)



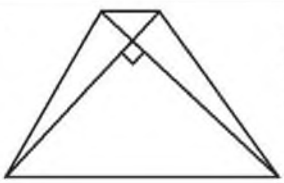
$S - ?$

е)



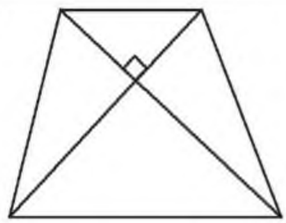
$S - ?$

ж)



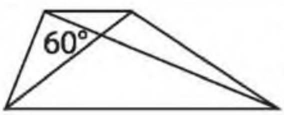
$d_1 = 10$
$d_2 = 12$
$S - ?$

з)



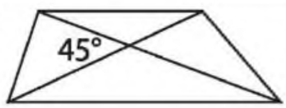
$d_1 = 15$
$d_2 = 14$
$S - ?$

и)



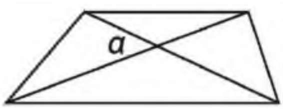
$d_1 = 8$
$d_2 = 5$
$S - ?$

к)



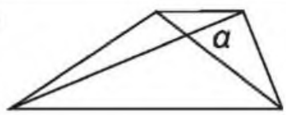
$d_1 = 12$
$d_2 = 10$
$S - ?$

л)



$d_1 = 12$
$d_2 = 18$
$S = 48\sqrt{2}$
$\alpha - ?$

м)



$d_1 = 15$
$d_2 = 12$
$S = 45\sqrt{3}$
$\alpha - ?$

59. Высота трапеции равна 8 см. Найдите основания трапеции, если: а) они относятся как 1 : 5, а ее площадь равна 24 см^2; б) их разность равна 6 см, а площадь трапеции – 56 см^2.

60. Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями: а) 3 см и 9 см, если ее диагональ равна 15 см; б) 7 см и 25 см, если ее диагональ перпендикулярна боковой стороне.

61. Найдите площадь прямоугольной трапеции, боковые стороны которой относятся как 4 : 5, а разность оснований равна 9 см, если ее: а) меньшая диагональ равна 20 см; б) большая диагональ равна 20 см.

62. $ABCD$ – параллелограмм, точка K – середина стороны BC. Площадь треугольника ABK равна S. Найдите площадь x, используя данные на рисунке 136:

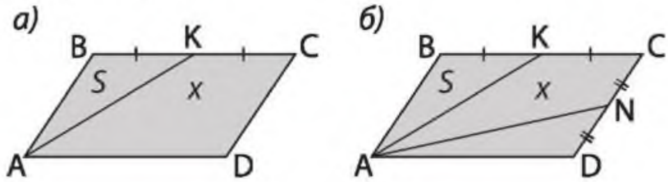


Рисунок 136

Выберите верный ответ (63–70).

63. Стороны параллелограмма равны 7,2 см и 4,8 см. Высота, проведенная к большей стороне, равна 6,4 см. Найдите другую высоту параллелограмма.

а) ≈ 4,3 см; б) 4,8 см; в) 6,4 см; г) 7,2 см; д) 9,6 см.

64. В трапеции $ABCD$ с основаниями 4 см и 10 см проведены две высоты BK и CM. Чему равна площадь трапеции, если четырехугольник $BCMK$ – квадрат?

а) 20 см^2; б) 28 см^2; в) 30 см^2; г) 40 см^2; д) 56 см^2.

65. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол 45° и делит основание трапеции на отрезки 6 см и 30 см. Найдите площадь трапеции.

а) 108 см^2; б) 144 см^2; в) 180 см^2; г) 216 см^2; д) 360 см^2.

66. Стороны параллелограмма относятся как 1 : 2. Найдите его площадь, если периметр параллелограмма равен 72 см, а один из углов – 120°.

а) 144 см^2; б) $144\sqrt{2}$ см^2; в) $144\sqrt{3}$ см^2; г) 288 см^2; д) $288\sqrt{3}$ см^2.

67. Если две стороны треугольника равны 9 см и 10 см, а угол между ними 30°, то его площадь равна:

а) 20,5 см^2;

б) 22,5 см^2;

в) 25 см^2;

г) 38 см^2;

д) 45 см^2.

68. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении стороны AD взята точка K так, что $AK = 1{,}5AD$. Во сколько раз площадь трапеции $ABCK$ больше площади треугольника ACK?

а) $\frac{4}{3}$; б) 1,5; в) $\frac{5}{3}$; г) 2; д) $\frac{7}{3}$.

69. Диагональ ромба равна его стороне. Чему равна площадь ромба, если его периметр равен $4a$?

а) $\frac{\sqrt{2}}{2a^2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; в) $2a^2$ г) $2a^2\sqrt{3}$; д) $a^2\sqrt{3}$.

70. Прямоугольник и параллелограмм имеют одинаковые стороны 3 см и 4 см. Найдите меньший угол параллелограмма, если его площадь вдвое меньше площади прямоугольника.

а) 20°; б) 30°; в) 45°; г) 60°; д) 90°.

Заполните пропуски (*71–74*).

71. Если две стороны треугольника равны 10 см и $7\sqrt{2}$ см, а угол между ними 45°, то его площадь равна … см^2.

72. Если гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6 см, а острый угол 45°, то его площадь равна … см^2.

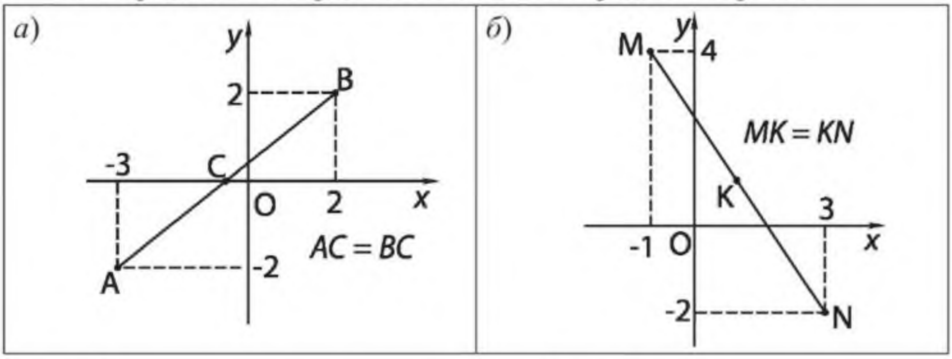
73. Площадь равностороннего треугольника $16\sqrt{3}$ м^2, значит, его сторона равна … м.

74. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°, $AB = 2$ дм, BH – высота, $HD = 4$ дм. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна … дм^2.

IV. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Координаты: точки на плоскости; середины отрезка. Расстояние между двумя точками

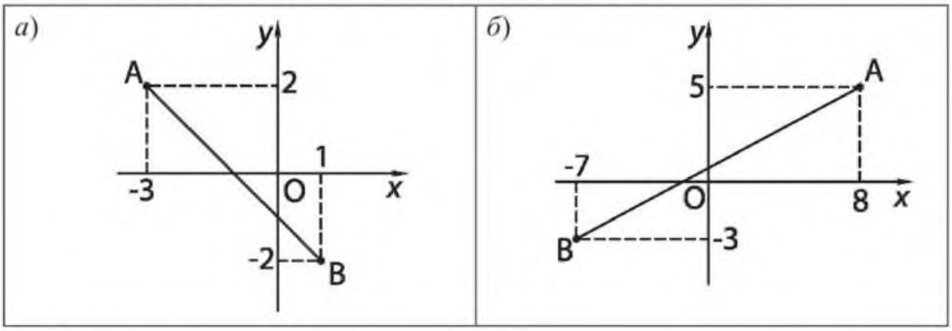
75. Определите координаты концов и середины отрезка:



76. Заполните таблицу, если $AM = MB$, $M \in AB$:

A	(3; 8)	(1; 3)		(4; 8)	(–7; 3)	(5,4; 2,3)
B	(5; 2)		(4; –2)	(8; 4)		(3,6; 3,5)
M		(5; 6)	(0; 0)		(5; 2)	

77. Найдите координаты концов отрезка и его длину:

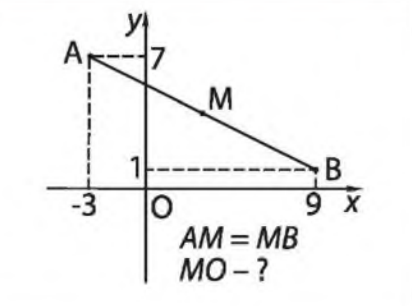


78. Заполните таблицу, где *AB* – расстояние между точками:

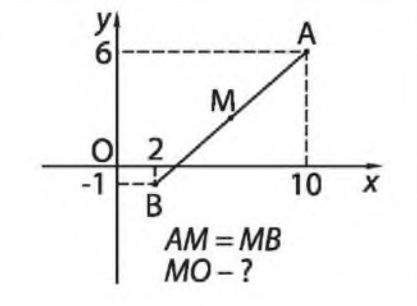
A	(5; 5)	(–2; 14)	(1; –1)	(0; –7)	(6,9; 6,8)	$(5\sqrt{3}; -7)$
B	(2; 9)	(10; 9)	(7; –9)	(24; 0)	(8,1; 5,1)	$(2\sqrt{3}; -9)$
AB						

79. Найдите неизвестные элементы:

а)



б)

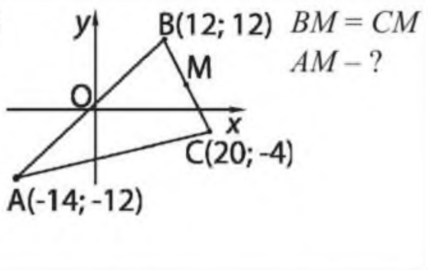


80. Заполните таблицу, если O – начало координат, $B \in Ox$, $C \in Oy$ и $AB \perp Ox$, $AC \perp Oy$:

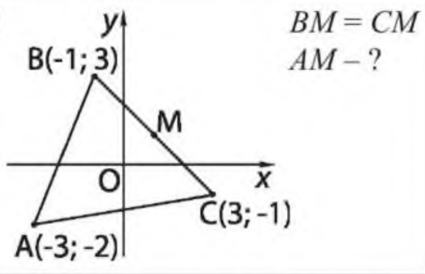
A	(3; 4)	(–5; 12)	(15; 0)	(16; 30)	(0,8; 0,6)	$(3\sqrt{3};\ \sqrt{22})$
AO						
AB						
AC						

81. Найдите неизвестные элементы:

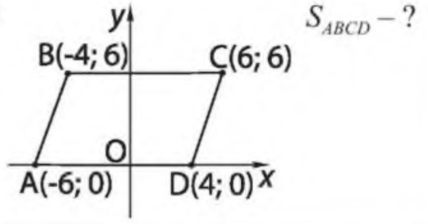
а)



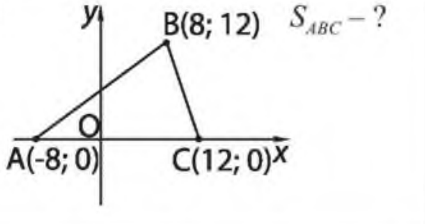
б)



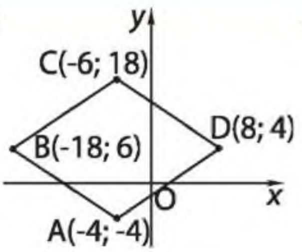
в)



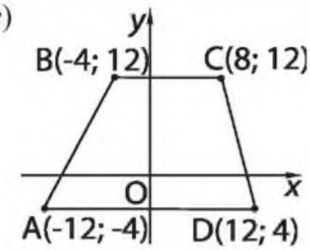
г)



д) S_{ABCD} – ?



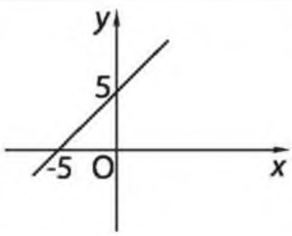
е) S_{ABCD} – ?



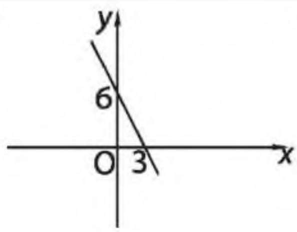
Уравнение прямой

82. Найдите неизвестные коэффициенты уравнения прямой $y = kx + p$

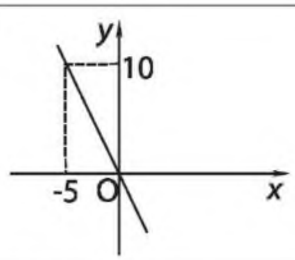
а) p – ?



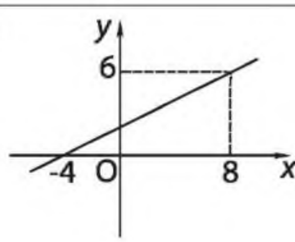
б) p – ?



в) k – ?



г) k – ?



83. Выберите параллельные прямые:

а) $y = 2x + 4$; б) $y = 6x – 5$; в) $y = 8$; г) $y = 4x$;
д) $y = –5x + 6$; е) $y = 8 – 2x$; ж) $y = 9x + 1$; з) $y = 8x$;
и) $y = 2x$; к) $y = 24$; л) $y = x + 9$; м) $y = 8x – 9$.

84. Выберите перпендикулярные прямые:

а) $y = 5x – 4$; б) $y = 6x – 5$; в) $y = 6x + 7$; г) $y = 4x – 2$;
д) $y = –5x + 6$; е) $y = 8 – 0,2x$; ж) $y = –6x – 7$; з) $y = 2 – 0,25x$.

85. Приведите уравнение к виду $y = kx + p$ и укажите значения k и p:

а) $4y - 8x + 20 = 0$; б) $5y + 2x - 30 = 0$;

в) $3x - 0{,}2y + 2 = 0$; г) $5y + 8x - 4 = 0$.

86. Выберите точки, лежащие на прямой $y = 8x - 15$:

A (1; 5)	B (2; –7)	C (–2; –31)	D (1; –7)
E (4; 32)	F (0; –15)	G (2; 1)	H (1,5; –3)

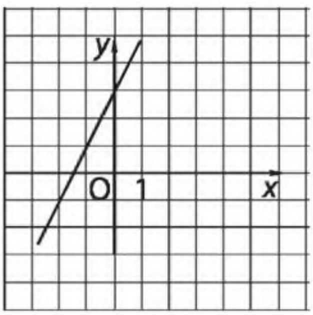
87. Выберите прямые, проходящие через точку $A(4; 7)$:

а) $y = 4x + 7$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = 5x + 2$; г) $y = 4x - 9$;

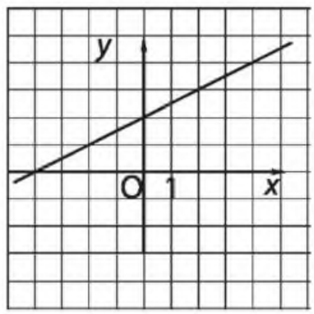
д) $y = 7x + 4$; е) $y = 11 - x$; ж) $y = x + 3$; з) $y = 2 + 0{,}7x$.

88. Установите соответствие между графиками и уравнениями:

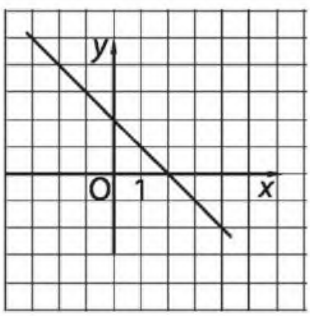
а)



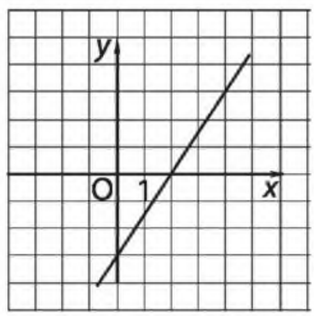
б)



в)



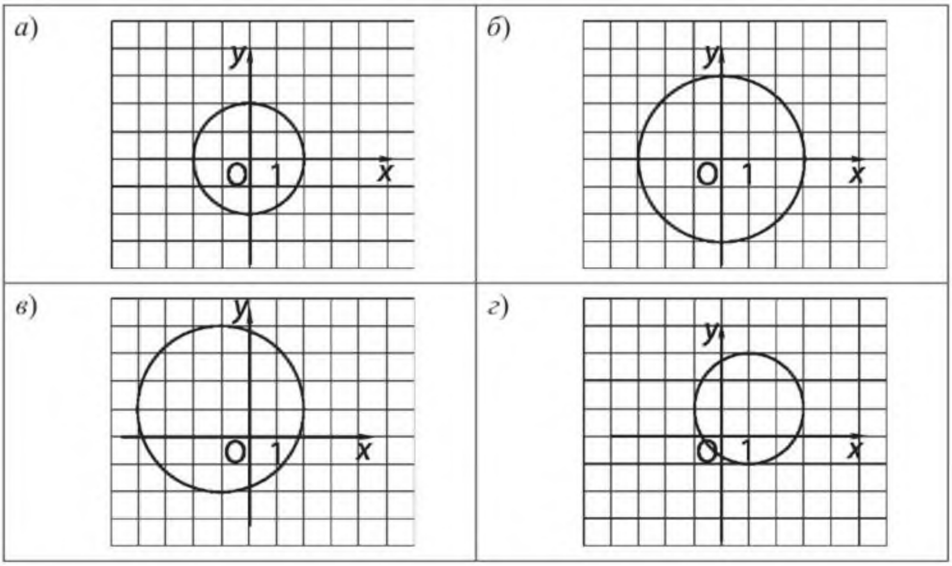
г)



1)	$y = 0{,}5x + 2$	2)	$y = 2 - x$
3)	$y = 2x + 3$	4)	$y = 1{,}5x - 3$

Уравнение окружности

89. Напишите уравнение окружности:



90. Выберите точки, лежащие на окружности $(x-3)^2+(y+4)^2=$
$=25$:

A (1; 0)	B (3; 1)	C (8; –4)	D (0; 0)
E (2; –3)	F (7; –1)	G (2; 20)	H (6,5; 2)

91. Заполните таблицу, где O – центр, R – радиус окружности:

O	(4; 2)		(–1; 5)	
R	4		3	
уравнение		$x^2+y^2=36$		$(x-7)^2+(y+2)^2=49$

Выберите верный ответ (92–95).

92. Прямой $y=6x-5$ принадлежит точка:

а) (–1; 1); б) (2; –7); в) (–2; –7); г) (2; 7); д) (0; 5).

93. Какое из уравнений является уравнением некоторой прямой:

а) $x+y=4$; б) $|x+y|=4$; в) $(x+y)^2=4$; г) $x^2-y^2=4$; д) $x+y=4xy$?

94. Какое из уравнений есть уравнение некоторой окружности:

а) $x^2 + 1 = 4$;

б) $x^2 + y^2 = 4$;

в) $(x + y)^2 = 4$;

г) $x^2 - y^2 = 4$;

д) $x^2 + y^2 = 4xy$?

95. Прямой $y = 10x - 4$ параллельны прямые:

а) $y = -10x - 4$;

б) $y = -10x$;

в) $y = 10x - 2$;

г) $y = 10 - 4x$;

д) $y = 10x$.

96. Окружность с центром в точке $(-3; 4)$ и радиусом 8 можно задать уравнением:

а) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 64$;

б) $(x - 3)^2 - (y + 4)^2 = 64$;

в) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 8$;

г) $(x + 3)^2 - (y - 4)^2 = 64$;

д) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$.

Заполните пропуски (97–100).

97. Если $C(-1; 4)$, $D(-3; -10)$, то середина O отрезка CD имеет координаты … .

98. Расстояние между точками $A(5; -7)$ и $B(2; -3)$ равно … .

99. Координаты центра окружности $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$ … .

100. Если треугольник имеет вершины $A(8; 12)$, $B(-8; 0)$, $C(-2; -8)$, то его медиана CM лежит на прямой … .

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. 132°, 48°, 132°. **2.** 100°. **3.** 125°, 55°. **4.** 4 угла по 60° и 4 угла по 120°. **5.** Используя свойство параллельных прямых, докажите, что ΔMAO и ΔOBK равнобедренные. **6.** Основание 5 см, боковая сторона 11 см. **7.** а) 10 см, 10 см, 16 см; б) 14 см, 14 см, 12 см или 12 см, 12 см, 16 см. **8.** 56°, 56°. **9.** 80°, 50°, 50°. **10.** 60°, 90°. **11.** 125°. **12.** 7 см. **13.** 4,5 см. **14.** 50°. **18.** а) 36°, 54°; б) 9 см. **19.** а) 50 м; б) 600 лет. **20.** 8 см. Найдите $\angle C$ и используйте свойство прямоугольного треугольника. **21.** 7 см. **22.** 8 см. **23.** 90°. **24.** 5 см. **25.** Используйте свойство касательных к окружности, проведенных через одну точку. **26.** 1,5 см. **27.** 16 см, 12 см. **28.** 4 см. Пусть BH – высота ΔABC, O – центр вписанной в треугольник и описанной около него окружности. Рассмотрите ΔAOH. **29.** 110°. Используйте сумму углов ΔABC и свойство центра O, вписанной в треугольник окружности. **31.** 96°. **32.** а) 120°; б) 96°. **33.** а) 59°; б) 110°, 250°. **34.** а) 0,5°; б) 270°; в) 0,25°. **35.** 90°, 270°. **36.** 90°, 140°, 130°. **37.** Используйте свойство прямоугольного треугольника, вписанного в окружность. **38.** Пусть $\angle A = \alpha$, выразите через α острые углы ΔABC, ΔACD, ΔBCD. **39.** Сначала докажите, что ΔBOC и ΔAOD равнобедренные, затем, обозначив вертикальные углы α, выразите через α углы при основании в этих треугольниках. **40.** Обозначьте углы при основании в ΔMAC и ΔNBC α и β соответственно и выразите $\angle M$ через α, а $\angle N$ через β. Далее, используя свойство односторонних углов при $AM \parallel BN$ и секущей MN, найдите сумму $\alpha + \beta$. **41.** 20°. Пусть $\angle B = \alpha$. Используя свойство внешнего угла треугольника, выразите через α углы при основании равнобедренных треугольников MNK, MKC, AMC. Составьте уравнение, выразив $\angle A$ из ΔABC. **42.** б) Не могут; г) 1) на 540°; 2) на 1440°. **43.** а) 1) 3; 2) 4; б) 100°, 140°; в) 1) 140°, 40°; 2) 126°, 54°; г) 1) 900°; 2) 1440°; д) 1) и 2) – не существует, объясните почему. **44.** а) 40; б) 50. **45.** б) 1), 3) – не существует; 2) существует; в) 1) существует; 2) не существует. **46.** а) 1) 5; 2) 6; 3) 8. **47.** а) 8 см, 6 см, 5 см, 4 см; б) 1) 120°, 8 см, 8 см; 2) 90°, 5 см, 5 см. **48.** а) Это точка пересечения диагоналей. Используя неравенство треугольника, сравните сумму длин диагоналей с суммой расстояний от произвольной точки четырехугольника до его вершин. б) Можно. **49.** а) $(10 + 2a)$ см; д) $90°$. **50.** а) $\angle R = \alpha + \beta = \angle Q$, $\angle F = 180° - \alpha - \beta = \angle P$; б) $\angle A = \angle C = 2\alpha$, $\angle B = \angle D = 180° - 2\alpha$. Равенство всех сторон параллелограмма следует из равенства треугольников ABC и ADC. **51.** а) Пусть проведены биссектрисы BM и CM, $M \in AD$. Докажите, что ΔABM и ΔDCM равнобедренные (используйте свойство углов при параллельных прямых BC и AD и секущих BM и CM). б) 150 мм. **52.** а) $47°$, $133°$, $47°$, $133°$; б) $55°$, $125°$, $55°$, $125°$. **53.** Используйте свойство углов равнобедренного треугольника и свойства углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей. **54.** Прямоугольник. 1) Используя равенство противоположных углов параллелограмма и признаки параллельности прямых, докажите, что $BB_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$; 2) зная, что в параллелограмме $ABCD$ $\angle B + \angle C = 180°$, докажите, что в ΔA_1ND_1 $\angle D_1 + \angle A_1 = 90°$. **55.** а) $8 + 2a$; б) $\angle E = \angle M = \alpha$, $\angle K = \angle P = 180 - \alpha$; в) $\angle Q = \angle S = 60°$, $\angle R = \angle T = 120°$, $P_{QRST} = 22$. **56.** а) 13 см; б) используйте симметрию относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма. **57.** а) $45°$, $135°$, $45°$, $135°$; б) $36°$, $144°$, $36°$, $144°$. **58.** а) 20 см или 22 см; б) 5 см и 4 см; в) b и $a - b$. **59.** а) 6 см и 8 см или 8 см и 10 см; $60°$ и $120°$; б) сначала постройте прямоугольный ΔABH. **60.** Используйте свойство углов при прямых $DC \parallel AB$ и секущей AF, $AD \parallel BC$ и секущей AE. **61.** 5 см, 2 см, 5 см. Рассмотрите все случаи расположения трех отрезков на стороне параллелограмма. **62.** а). **63.** а) Используйте признак: если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то он является параллелограммом; в) Используйте признак: если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом. **64.** б) 1) Является; 2) нет. **66.** а) Аналогично задаче 63, в). **67.** а) Докажите, что $AMCN$ – параллелограмм; в) Используйте свойство граней куба (они являются квадратами) и признак параллельности прямых. **68.** 24 см. **69.** а) Используйте сумму углов выпуклого четырехугольника и признак прямоугольника. б) Используйте признак параллелограмма и признак прямоугольника. **70.** Не является, например, четырехугольник с углами 90°, 60°, 90°, 120°. **71.** Используйте свойство диагоналей прямоугольника. **72.** а) 8 см, 16 см; б) 20 см или 28 см; в) 60°. **73.** а) 34 см; б) 8 см. **74.** а) 72; б) укладывать ламинат вдоль длины комнаты. **75.** а) 10°; б) квадрат с диагональю 4 см. **76.** б), в). **77**. 80°, 100°, 80°, 100°. **78.** а) 60°, 120°, 60°, 120°; б) 30°, 60°. **79.** а) 60°, 120°, 60°, 120°. Используйте свойство внешнего угла треугольника и сумму острых углов прямоугольного треугольника. б) 126°, 54°, 126°, 54°. **80.** а) Треугольники ABC и ADC, ABD и CBD симметричны, следовательно $AB = AD$, $BC = CD$ и $AB = BC$, $AD = BD$. Значит, $AB = BC = CD = DA$ … . **81.** а) Используйте определение симметричных точек и свойство симметрии равнобедренного треугольника; б) $AD = 1$ дм, $BC = 2$ дм. **82.** а), в). Нарисуйте четырехугольники, подтверждающие ложность утверждений б) и г). **83.** а) Нет. Приведите пример, подтверждающий это. **84.** 45°, 90°, 45°. **85.** а) 36,8 см; б) квадрат, $P = 18$ см. **86.** 16 см. Используйте свойства равнобедренного треугольника. **87.** 32 см. **89.** Пусть столбы остались в точках A и B. Если они симметричны относительно центра O симметрии квадрата, то задача не имеет решения. В другом случае нужно найти точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно центра O. Тогда $AB_1 \parallel BA_1$. Далее можно построить прямую MN, проходящую через точку O и перпендикулярную прямой AB_1 ($M \in AB_1$, $N \in BA_1$). Отложив на прямых AB_1 и BA_1 отрезки ME, MK, NL, NP, равные отрезку OM, получим четырехугольник $EKPL$. Докажите, что это квадрат. **90.** а) Используйте способ доказательства «от противного». **91.** 70°, 110°, 125°. **92.** 90°. **93.** 50°, 130°, 50°, 130°. **94.** 20 см. **95.** 12 см, 5 см. **96.** 17 см. **97**. 10 см, 5 см, 5 см, 5 см. **98.** Осью симметрии трапеции $ABCD$ может быть лишь прямая MN, например, проходящая через середину оснований BC и AD трапеции и перпендикулярная им. (Объясните, почему). Точки B и C, A и D симметричны относительно прямой MN. Далее установите равенство отрезков AB и DC, используя равенство треугольников AMN и DMN, ABM и DCM. **99.** а) Даны два отрезка и угол. Сначала постройте угол, равный данному, и на его сторонах от вершины отложите отрезки, равные данным. Соединив концы отложенных отрезков, получим треугольник. Далее, достройте треугольник до четырехугольника, у которого противоположные стороны равны, и докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм. б) Даны два отрезка и угол. Сначала разделите данные отрезки пополам. Затем постройте угол, равный данному, и отложите от вершины угла на его сторонах и на противоположных им лучах отрезки, равные половинам данных отрезков. Докажите, что построенный четырехугольник – параллелограмм. **100.** б) Предположите, что такой ромб $ABCD$ построен, у него известны, например, диагональ $AC = d$ и угол $ADB = \beta$; выясните, что $\angle DAC = 90° - \beta$ (эту разность можно построить на вспомогательном чертеже). Далее постройте ΔADC по стороне AC и двум прилежащим углам и равный ему треугольник ABC. **101.** Предположите, что такой квадрат $ABCD$ построен и данный отрезок $AE = AC + CD$. Тогда в ΔAED известна сторона AE и два угла ($\angle A = 45°$, $\angle E = \frac{45°}{2}$). Построив этот треугольник, найдем сторону квадрата AD. **102.** а) Даны три разных по длине отрезка a, b и c. Пусть надо построить трапецию $ABCD$, в которой $\angle A = 90°$, большее основание $AD = a$, $AB = b$ и $CD = c$. Сначала постройте прямой угол A и отложите на его сторонах отрезки AD и AB. Затем через точку B проведите прямую BK, параллельную AD (можно построить $BK \perp AB$, объясните, почему). Далее циркулем найдите положение точки C на прямой BK ($DC = c$). Докажите, что построенный четырехугольник – трапеция. **103.** а) Например: 1) отрезки A_1A_3 и B_1B_3 пропорциональны отрезкам A_2A_4 и B_2B_4; 2) $\frac{AA_2}{AA_3} = \frac{AB_2}{AB_3}$; в) 1) 8,75; 2) 8,125; 3) 13,5. **104.** а) Смотрите рисунок 59. **105.** а) 1) 14 см, 28 см, 56 см; 2) 24,5 см, $32\frac{2}{3}$ см, $40\frac{5}{6}$ см; б) $\frac{dx}{x+y}, \frac{dy}{x+y}$. **106.** а) Используйте теорему Фалеса вначале для отрезков, отложенных на сторонах $\angle BCA$, затем – на сторонах $\angle CAD$; б) 5 см, 10 см. **107.** а) Докажите равенство треугольников MCN и KAN и используйте признак параллелограмма. **108.** а) Используя теорему Фалеса, докажите, что прямая, проходящая через середину диагонали AC и параллельная основаниям трапеции, делит диагональ BD на две равные части, а прямая, проходящая через середины диагоналей трапеции, параллельна ее основаниям. **109.** 5 см. **110.** 10 см. **111.** а) 12 см; б) 67,5 см. **112.** Используйте свойство средней линии треугольника. **113.** а) Проведите диагонали прямоугольника и используйте свойство средней линии треугольника, свойство диагоналей прямоугольника, признак параллелограмма и определение ромба. б) Проведите диагонали ромба и используйте свойство средней линии треугольника, свойство диагоналей ромба, признак параллелограмма и определение прямоугольника. **114.** а) Можно построить ΔDBC так, чтобы точка A была серединой стороны. Далее построить среднюю линию треугольника DBC, проходящую через точку A. б) Предположим, что мы построили ΔABC, в котором данные точки, например, M, N, K – середины сторон AB, BC, AC соответственно. Тогда $AB \parallel NK$, $BC \parallel MK$, $AC \parallel MN$. Для построения параллельных прямых достаточно построить равные накрест лежащие углы: $\angle KMA = \angle NKM$, $\angle MNB = \angle NMK$, $\angle NKC = \angle KNM$. Осталось доказать, что треугольник – искомый, то есть, что точки M, N, K – середины его сторон. Для этого используйте свойство сторон параллелограммов $MNKC$ и $KNBM$, $NBMK$ и $KNMA$, … . **115.** 8 см. **116.** а) Используйте теорему Фалеса. б) 8 см. **117.** 8 см, 11 см. **118.** 10 см, 22 см. **119.** 6 см. **120.** 6,75 дм. **121.** а) 1 дм. Проведите высоту через точку пересечения диагоналей и используйте свойство равнобедренного прямоугольного треугольника. б) 60°, 120°, 120°, 60°. **122.** а) 50 см. б) 6 см. **123.** Неверно. **124.** а) 76°; б) 1,4 см. **126.** а) Равнобедренный; б) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см. **128.** а) 12 см; б) 4 см. Пусть AD – медиана, тогда $AO : OD = 2 : 1$, а так как $OK \parallel DB$, то и $AK : KB = 2 : 1$. Следовательно, $AK = 8$ см. Далее используйте свойство сторон прямоугольного ΔADB с углом 30°. **129.** Не может. Пусть дан равнобедренный ΔABC с основанием AC, AA_1 и BB_1 – его медианы, O – точка их пересечения. Рассмотрите ΔBOC, примените неравенство треугольника. **130.** а) Сначала разделите данные отрезки

m и n на 3 равные части и постройте ΔBOC, в котором $BC = a$, $BO = \frac{2}{3}m$, $CO = \frac{2}{3}n$. **131.** Докажите, что $AC \perp CD$ и $DB \perp AB$. Далее используйте свойство высот треугольника. **132.** а) 1) и 2) верно; б) докажите, используя признаки равенства прямоугольных треугольников, что перпендикуляры, проведенные из вершин треугольника к прямой, указанной в задаче, равны; в) 36 см. **133.** 13. **134.** а) 4 см, 10 см; б) ромб, 4 см. **135.** а) Если диагонали данного четырехугольника перпендикулярны. б) Если диагонали данного четырехугольника равны. **136.** а) 6,5 см; б) 10 см; в) 4 см. **137.** а) $0,5(p - c)$. **138.** а) Используйте свойство осевой симметрии треугольника; б) используйте указание к задаче 54 и свойство прямой, содержащей одну из диагоналей прямоугольника и параллельную основанию параллелограмма. в) докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах диагоналей и серединах двух противоположных сторон данного четырехугольника – параллелограмм. **139.** 1A) 70°, 110°, 70°, 110°; 2B) 17 см; 3B) используйте свойство диагоналей параллелограмма и признак прямоугольника; 4C) 8 см; 5C) сначала постройте отрезок, равный средней линии трапеции, затем, используя теорему Фалеса, разделите его на три равные части. **142.** б) $\frac{1}{2}$. **143.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **144.** а) 0,8; б) 1. **145.** а) 0,6; б) 1,4. **146.** а) 10 см; б) 9 см. **147.** а) 0,6; б) $\frac{1}{2}$; в) $\approx$ 77,3 см. **148.** а) Нет; б) можно, на основании теоремы, обратной теореме Пифагора. **149.** а) Верно; б) в n раз; в) на 10%. **150.** а) $1,5\sqrt{2}$ дм; б) 1,6 дм и 3,4 дм. **151.** а) 5 дм; б) 20 см; в) 25 см. Используя свойство симметричных относительно прямой точек, докажите, что AA_1CC_1 – параллелограмм с равными диагоналями. **152.** а) 5 дм; б) 24 см. **153.** а) 12 м; б) нет. **154.** 9 м. **155.** $8\sqrt{3}$ см и $8\sqrt{6}$ см; $4\sqrt{30}$ см и $4\sqrt{6}$ см **156.** 5 см. Установите, что ΔBDC – прямоугольный. **157.** а) $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{5}$ см, $6\sqrt{5}$ см; б) $3\frac{1}{3}$см; в) $\approx 27°$. Используйте теорему, обратную теореме Пифагора, и таблицу значений косинусов. **158.** а) 10 см, 17 см; б) докажите, что $AX^2 - BX^2 = XD^2 - XC^2$; в) 1 : 3, выразите $\cos\angle BAC$ из ΔABC и ΔABH; г) 2,4 см, пусть дан ΔABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $CB = 3$ см,

CD – искомая высота; составьте пропорцию, учитывая, что $\cos\angle A = \cos\angle BCD$. **159.** а) 24 см; б) $\approx 3,2$ см, пусть дан ΔABC, в котором $AB = BC = 6$ см, $AC = 4$ см, BH – его высота, O – центр описанной около треугольника окружности, $OK \perp BC$, $K \in BC$; составьте пропорцию, учитывая, что $\cos\angle CBH = \cos\angle KBO$. **161.** а) 0,8; б) 1,4; в) 0,75; г) 1; д) 2; е) 1. **162.** а) 0,6; б) 1; в) $2\frac{1}{12}$; г) 7,84. **163.** а) 1) 4 см, 5 см; 2) 24 см, 26 см; б) 4,5 см, используйте вывод, полученный при решении задачи 2 пункта 16; в) $\frac{12}{35}$ и $2\frac{11}{12}$; г) $\approx 2,7$ км. **165.** а) 13 см; б) 1) $8\sqrt{3}$ см; 2) $\approx 6,8$ см; 3) ≈ 15 см; в) $\approx 98°$; г) $\approx 6,4$ см. **166.** Пусть даны диаметр AB и хорда BC, тогда ΔABC – прямоугольный с прямым углом C. Далее проведите высоту CD из вершины прямого угла C и выразите синусы угла A и равного ему угла DCB. **167.** а) 1) и 2) 0,2; 0,(3); $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 2; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4. **168.** а) Верно; б) нет, приведите пример. **169.** $3\sqrt{3}$ м. **170.** в) $\cos 70° < \sin 50° < \cos 20°$, т. к. $\sin 50° = \cos 40°$; е) $\operatorname{ctg} 80° < \operatorname{tg} 40° < \operatorname{tg} 60°$, т. к. $\operatorname{ctg} 80° = \operatorname{tg} 10°$. **172.** а) 75°; б) верно, докажите это. **173.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **175.** а) $\sin 20° < \sin 35°$; б) $\cos 15° > \cos 70°$; в) $\sin\alpha > \sin^2\alpha$; г) $\cos\alpha < \cos^{-1}\alpha$. **176.** а) $\sin 60°$; б) $\operatorname{tg} 45°$; в) $\sin^2 60°$; г) $\sin 40° \cdot \cos 20°$, сравните каждый множитель с $\frac{1}{2}$. **177.** а) 0,5; б) –0,5. **178.** а), б) верно. **179.** а) 1) $\approx 44°$, $\approx 46°$; 2) $\approx 54°$, $\approx 36°$; б) 1) 45°; 2) $\approx 40°$. **180.** а) $\approx 6,9$ см; б) $\approx 15,5$ см. **181.** а) $3\sqrt{3}$ см; б) $8\sqrt{3}$ см. **182.** ≈ 13 см. **183.** а) $\frac{5}{13}$, $\frac{5}{12}$; б) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$. **184.** а) Нет; б) существует. **185.** а) 1) и 2) – верно. **187.** а) 24 м, 13,44 м; б) 1) $\approx 1,4$ см; 2) 3,0 см; используйте в 1) $\operatorname{tg} 25°$, во 2) $\cos 10°$. **188.** 0,345. Возведите левую и правую части данного равенства ($\sin\alpha + \cos\alpha = 1,3$) в квадрат, откуда можно выразить произведение $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. **189.** $0,5c^2(d^2 - 1)$. **190.** а) 2,8 см, 6,4 см; б) $1\frac{4}{21}$ дм, $\frac{20}{21}$ дм; в) 5 см, 8 см; г) $\frac{c}{2}$, $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; 0,5. **191.** а) $\approx 48,2$ см, $\approx 66,3$ см; б) $\approx 47,2$ см, ≈ 40 см. **192.** 60°, 120°, 60°, 120°. **193.** а) $\approx 41°$, $\approx 49°$, $3\sqrt{85}$ см; б) $\approx 39°$, $\approx 51°$, $\approx 42,2$ см.

194. а) $(30 + 6\sqrt{3})$ см; б) ≈ 10,9 см, ≈ 8,3 см. **195.** ≈ 35,1 см. **196.** $10(\sqrt{3} + 1)$. **197.** а) 30, $6\sqrt{5}$, $12\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Используйте свойство медианы, проведенной к гипотенузе в прямоугольном треугольнике, и свойство его высоты (п. 16, задача 2). б) ≈ 6,2 дм; в) ≈ 48 м. **198.** ≈ 50°. **199.** ≈ 68°, ≈ 112°, ≈ 37°, ≈ 143°. **200.** ≈ 1,3 см. **201.** 3,6 дм, 1,2 дм. **202.** 5 см, 4 см. Используйте свойство диагонали AN ромба. **204.** а) ≈ 63°; б) ≈ 2,1 м. **205.** Нельзя. **206.** а) ≈ 4,433 км; б) ≈ 16°. **207.** 90°, ≈ 37°; ≈ 53°. Установите, что треугольник с вершинами в центрах окружностей – прямоугольный. **208.** а) 1) 1; 2) 0. Используйте тригонометрические тождества; б) 1) меньше нуля; 2) больше нуля. **209.** а) 7,5 см; б) ≈ 39°, ≈ 51°. **210.** Замените два последних множителя на равные им значения котангенсов. **211.** 1A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2A) 0,6; $\frac{4}{3}$; 4B) m; $m\sqrt{3}$; 5C) $4\frac{8}{13}$ см. **212.** а) Обратное утверждение неверно. **213.** а) Смотрите рисунок 102; б) соедините вершину параллелограмма с серединой противоположной стороны. **214.** а) 26 м; б) 6 см и 10 см; в) 18 см. **215.** а) 60 плиток; б) 400 плиток. **216.** 8 дм^2, 16 дм^2, 8 дм^2. **217.** а) $12{,}5\sqrt{3}$ дм^2; б) 25 см^2; в) 24 см^2; г) 56 см. **218.** а) $12\sqrt{3}$ см^2; б) ≈ 24,2 см^2. **219.** а) 16 листов; б) 340 см^2. **220.** а) В 1000 000 раз; б) 6 км^2; в) 18 000 км^2. **221.** а) На 337 %; б) уменьшилась на 4 %. **222.** а) 24 см^2. Выразив катеты треугольника через гипотенузу и острые углы, получите: $S = 50 \cdot \sin A \cdot \sin B$. Чтобы найти произведение синусов, возведите в квадрат левую и правую части данного равенства и используйте основное тригонометрическое тождество. б) 27 см^2; в) $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ дм^2. Продлите отрезок DC до пересечения со стороной угла AB, например, в точке F. В ΔCBF найдите FC, BF и его площадь. Далее в ΔADF найдите AD, используя tg 60°, и его площадь. Искомая площадь равна разности площадей ΔADF и ΔCBF. **223.** а) 10 см; б) 6 дм или $2\frac{2}{3}$ дм; в) 15 см; г) площадь треугольника увеличится, если $k > n$; уменьшится, если $k < n$; не изменится, если

$k = n$. **224.** а) 1) 48 см^2; 2) 108 см^2; б) 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 4) $3r^2\sqrt{3}$. **225.** а) 15 дм^2; б) 13,5 дм^2. **226.** а) $40\sqrt{3}$; б) $\frac{128}{\sqrt{3}}$. **227.** а) 12,5 см^2; б) $72\sqrt{3}$ см^2. **228.** а) Используйте тождество $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$; б) квадрат. **230.** а) Докажите, что если $\frac{AM}{MC} = \frac{2}{3}$, то $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta CBM} = 2 : 3$. б) 12 см^2; в) 6 дм^2. **231.** а) 120 м^2; б) 4. **232.** а) $4\frac{8}{13}$ см; б) 7,2 см^2. **233.** а) $3\sqrt{2}$ см, $3(1 + \sqrt{3})$ см, $4{,}5(1 + \sqrt{3})$ см^2; б) 120 см^2, установите вид треугольника. **234.** а) $\frac{25\sqrt{2}}{16}$ дм^2; б) 67,5 см^2 или $45\sqrt{6}$ см^2. **235.** а) 8 см; б) существует, т. к. большая сторона меньше суммы двух других сторон. **236.** $12\sqrt{3}$ см^2. **237.** $\frac{Pd}{2}$. **238.** Существует, например, равносторонний треугольник со стороной, равной 0,9 см, и равнобедренный треугольник с основанием 200 см и высотой 0,002 см. **239.** а) Пусть дан параллелограмм *ABCD*, проведите диагональ *BD* и разделите каждый из треугольников на три равновеликих (разделив стороны *AD* и *DC*), тогда 2 части одного треугольника и 4 остальные части параллелограмма составят искомые многоугольники. **240.** а) 22,4 дм^2; б) 27 см^2. **241.** $12\sqrt{3}$ дм^2. **242.** 15 см. **243.** Ромб, 120 см^2. **244.** 45 см^2. Докажите, что указанный четырехугольник – ромб, а средняя линия и высота трапеции являются его диагоналями. **245.** 54 см^2. Через точку *C* проведите $CE \parallel BD$ (точка *E* лежит на прямой *AD*), установите вид ΔACE. Докажите, что площадь трапеции равна площади ΔACE. **246.** 4 см, $4\sqrt{3}$ см. **247.** а) 60,5 см^2; б) 4,5 дм^2. **248.** а) $0{,}5d^2$. **249.** $0{,}5d^2$. Проведите диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* с большим основанием *AD*, пусть *O* – точка их пересечения. Установите вид треугольника *AOD*. **250.** а) 552,25 га; б) можно измерить стороны и два противоположных угла. **251.** а) $192\sqrt{3}$ см^2; б) $(24 + 4\sqrt{2})$ дм, 40 дм^2. **252.** а) 56 см^2; б) $15\sqrt{3}$ см^2. **253.** а) $S = ch$; б) $60\sqrt{2}$ см^2. **254.** а) 96 м^2; б) 1300 га. **255.** а) 174 дм^2; б) 144 см^2. **256.** а) 128 см^2. Пусть дана трапеция *ABCD*, в которой *AD* = 20 см,

$BC = 12$ см и $AC \perp CB$, CH – высота трапеции и прямоугольного треугольника ACD. Используйте свойство высоты прямоугольного треугольника: она является средним пропорциональным между отрезками, на которые делит гипотенузу (задача 2, п. 16); или докажите, что $\angle ADC = \angle ACH$ и запишите равенство, выразив тангенсы этих углов. **257.** а) Проведите диагонали трапеции и высоту через точку их пересечения и используйте свойство полученных равнобедренных прямоугольных треугольников; б) 64 см^2; в) докажите, что перпендикуляры, проведенные из вершин B и C к стороне AD равны. **258.** $12\sqrt{3}$ см^2. Установите, что эта трапеция состоит из трех равных равносторонних треугольников. **259.** а) Используйте вывод, полученный при решении задачи 253 а). Искомая прямая проходит через середину средней линии трапеции. Таких прямых можно построить много. б) Выразите площади треугольников как суммы площадей отсекаемых треугольников и трапеций, обозначив отрезки DF и EO через x и y, например. **260.** а) $\frac{24\sqrt{2}}{7}$ см; б) $\frac{ab}{4}$. Установите, что точка D лежит за пределами треугольника (т. к. биссектриса BD делит сторону AC на части пропорциональные прилежащим сторонам, а $AB > BC$) и постройте перпендикуляр DH к прямой BC – высоту ΔDBC. **261.** а) 9,6 см; б) 12 см. **262.** а) $50(3\sqrt{2} - 1)$ дм^2; б) $\frac{a^2 - b^2}{4}\mathrm{tg}\beta$. **263.** Галапагосский заповедник больше примерно в 21 раз. **264.** а) $\frac{h^2}{4\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$; б) $\frac{5\sqrt{39}}{8}$ см. **265.** 48 см^2. **266.** а) 54 см^2; б) $\approx 17{,}6$ см^2. **267.** 11,52 дм^2. Обозначив длины сторон прямоугольника x и $2x$, составьте равенство, выразив $\mathrm{tg}A$ из ΔACB и ΔADE. **268.** $\approx 16{,}3$ см^2. **269.** б) $5\sqrt{3}$ см. **270.** а) 18 см^2. Пусть O – точка пересечения медиан, найдите длины отрезков AO, CO и вычислите площадь ΔAOC, а затем используйте вывод задачи 269 а). б) $d^2(7\sqrt{3} + 12)$. **271.** а) 1. Соедините вершину трапеции с серединой противолежащей боковой стороны; 2. Проведите через середину боковой стороны прямую, параллельную другой боковой стороне трапеции. б) Сначала докажите, что если данная точка M является серединой искомого отрезка, то площадь ΔABC будет меньше площади ΔAB_1C_1, где B_1C_1 – произвольный отрезок с концами на сторонах угла, содержащий точку M. Для этого через точку B проведите прямую $BD \parallel AC$, тогда площадь ΔAB_1C_1 больше площади ΔABC на величину, равную площади ΔBB_1D (если точка B лежит между точками A и B_1). Чтобы построить отрезок BC, который делится точкой M пополам, используйте свойство диагоналей параллелограмма. Проведите луч AM и отложите на нем отрезок $MA_1 = AM$. Далее через точку A_1 проведите прямые A_1B и A_1C, параллельные сторонам данного угла. **272.** 1A) Сторона квадрата 6 см; 2A) 8 см^2; 3B) 6 дм^2; 4B) 16 см^2; 5C) сначала докажите, что треугольники ABD и ACD равновелики. **273.** а) 1) $(-3; -5)$; 2) $(3; -5)$; 3) $(-3; 5)$; б) ± 8. **274.** 1219 год. **275.** а) 10; б) 5; в) $5\sqrt{5}$. **276.** а) 15; б) постройте серединный перпендикуляр, например, к данному отрезку. **277.** $B(-4; -4)$. **278.** а)$(1; -1)$. **279.** а) $(2,5; 0)$; б) $(-4\frac{1}{3}; -9\frac{1}{6})$. **280.** $\sqrt{53}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{89}$. **281.** $(0; -2)$. **282.** а) Докажите, что выполняется равенство $AB = AC + CB$. **283.** а) $(-3; 0)$; б) $(5; 5)$ или $(5, -5)$. **284.** 10. **285.** $M(5; 3)$, $N(2; 2)$. **286.** а) Например, $(-3; 7)$, $(1; 1)$; б) 1) $y = -(x-2)^2$; 2) $y = (x+2)^2$. **288.** а) $y = -2$; б) $x = 1$. **289.** Представьте данные уравнения в виде $y = kx + p$. **290.** а) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$; б) $y = -x + 3$. **291.** а) 1) $10x - 9y = 0$; 2) $5x + 2y - 17 = 0$; б) 345. **292.** $y = \frac{1}{2}x - 2$. **293.** $2x - 5y + 4 = 0$, $4x - y - 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$. **294.** а) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; б) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. **295.** а) $y = -x + 4$; б) $y = x - 2$. **296.** $-4x + 4y - 5 = 0$ или $4x - 4y + 3 = 0$. **297.** а) $(-2; 0)$, $R = 3$; б) $(0; 4)$, $R = 2\sqrt{2}$; в) $(5; -7)$, $R = 4$. **298.** б) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$. **299.** а) $x^2 + y^2 = 100$; б) $x^2 + y^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 15{,}21$. **300.** б), в), д). **301.** а) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$; б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. **302.** а) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$. **303.** а) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$; б) две. **304.** а) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 13$, пересекает ось Oy в точках $(0; 3)$, $(0; 7)$ и не пересекает ось Ox; б) $(x+0{,}5)^2 + (y-2)^2 = 6{,}25$, $(-0{,}5; -0{,}5)$ и $(-0{,}5; 4{,}5)$. **305.** а) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$; б) $x^2 + (y-3)^2 = 36$. **306.** а) 1; б) 0,5. **307.** а) $(a-b)^2$; б) b^2. **308.** а) $-0{,}5$; б) 1,5. **310.** а) Имеет; б) не имеет. **312.** а) $\approx 0{,}342$; б) $\approx -0{,}643$; в) $\approx -0{,}839$.

313. а) $\approx 11°$ или $\approx 169°$; б) $\approx 127°$; в) $\approx 158°$; г) $\approx 55°$. **314.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) 0,5. **315.** а) 1 или –1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0,5 или –0,5. **316.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\frac{3}{4}$. **317.** 105° или 15°. **318.** $\approx 0,94$. **319.** $\approx -0,26$. **320.** а) –0,75; б) 0,8. **322.** $(x+4)^2+y^2=16$. **323.** $x^2+(y-1)^2=8$. **324.** (–3; 3). Выполните чертеж. **325.** а) $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$; б) $(x+3)^2+(y+3)^2=8$. **326.** $D(c-a;\ d-b)$. **327.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\sqrt{3}$. **328.** Пусть стороны прямоугольника a и b, введите систему координат и обозначьте координаты вершин прямоугольника через a и b. Обозначив координаты точки $M(x;\ y)$ и используя формулу расстояния между двумя точками, установите верность данного равенства. **329.** Пусть стороны параллелограмма a и b, а его острый угол α, введите систему координат, например, так, чтобы одна из вершин параллелограмма совпадала с началом координат и одна из сторон лежала на оси Ox. Обозначьте координаты вершин параллелограмма через a и b и угол α (например, если дан параллелограмм $OABC$, то $O(0;\ 0)$, $A(a \cdot \cos\alpha;\ a \cdot \sin\alpha)$, $B(a \cdot \cos\alpha + b;\ a \cdot \sin\alpha)$, $C(b;\ 0)$). Используя формулу расстояния между двумя точками, составьте равенство $AC^2 = OB^2$. Убедитесь, что из этого равенства следует, что $\cos\alpha = 0$, следовательно, $\alpha = 90°$. **330.** Можно воспользоваться следствием, полученным при решении задачи 1 п. 30, или продлите медиану BM и отложите отрезок $MD = BM$, тогда $ABCD$ – параллелограмм. Введите систему координат, например, так, чтобы сторона AC лежала на оси Ox, а точка M совпадала с началом координат. Обозначьте стороны ΔABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) и острый угол между лучом BM и осью Ox (например, α). Выразите координаты точек A, B, C, D, M через a, b, c и угол α. Далее, используя формулу расстояния между двумя точками, установите верность данного равенства. **331.** 1А) 1), 2), 5), 6); 2А) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3В) $(x-1)^2+(y-1)^2=61$, $\sqrt{2}$; 4В) например, докажите, что середины диагоналей совпадают, диагонали равны и равны две смежные стороны; 5С) постройте окружность с центром в точке $C(2; 0)$ и радиусом 2, соединив центр окружности с точкой A, найдите точку пересечения отрезка AC с окружностью. **336.** а) 150 см^2; б) 811,2 см^2. Пусть дан ромб $ABCD$, O – точка пересечения его диагоналей, OK – высота прямоугольного ΔAOD, она равна половине высоты ромба. а) Для нахождения стороны ромба составьте пропорцию, выразив косинус угла OAD из ΔAOK и ΔAOD. б) Чтобы определить высоту ромба, найдите высоту OK в прямоугольном ΔAOD, выразив синус угла ODK из ΔAOD и ΔKOD. **338.** $\sqrt{2}$. **340.** а) ≈ 202 дм^2; б) ≈ 633 дм^2. **342.** а) 48 см^2; б) 24 см^2. Проведите высоту к большей стороне и обозначьте отрезки, на которые она делит эту сторону (x и $15 - x$); составьте уравнение, выразив квадрат высоты из каждого полученного треугольника… **343.** $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$, $\angle D = 60°$. **344.** $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$, 6. **346.** 1,5 см, 7,5 см^2. **347.** 25 см^2. **348.** а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) квадрат, объясните почему. **349.** 4 дм. **351.** 32 см, $32\sqrt{3}$ см^2. **353.** 60°, 120°, 120°, 60°. Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой $AC \perp CD$ и AC лежит на биссектрисе угла A. Обозначьте $\angle D = \alpha$ и составьте равенство, выразив $\angle ACB$ с одной стороны, используя свойство биссектрисы, с другой – сумму углов трапеции, прилежащих к стороне CD. **358.** а) 12 см; б) 19,2 см. **359.** $0{,}5\sqrt{26}$. **360.** а) 12,5. Найдите длины сторон треугольника и установите его вид; б) 150 см^2. Пусть в ΔABC с прямым углом C, CD – высота, чтобы ее найти, составьте пропорцию, выразив тангенсы углов A и DCB. **361.** б) 8. в) $\approx 6{,}4 \cdot 10^9$ м^2. **362.** $\frac{3}{4}$. **363.** а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; б) 6 см. **364.** а) $3\sqrt{3}$ см^2; б) $9\sqrt{3}$ см^2. **365.** 6 см, $9\sqrt{2}$ см^2. **366.** Используйте свойства и признаки параллелограмма. **367.** Прямоугольник, объясните почему. **368.** Сначала разделите каждый из треугольников, на которые прямоугольник делится диагональю, на 3 равновеликих треугольника. **370.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2. Используя признак биссектрисы угла (если точка равноудалена от сторон угла, то она принадлежит его биссектрисе), докажите, что четырехугольник $ABOC$ – ромб, где ABC – данный треугольник, O – центр окружности. **371.** X – точка пересечения медиан треугольника, докажите это. **372.** Соедините эту точку с вершинами треугольника и сравните сумму площадей получившихся треугольников с площадью данного треугольника. **373.** б) 30 см^2. **374.** Не может. Пусть $\sin A + \sin B = 1$, возведите в квадрат левую и правую части этого равенства и примените основное тригонометрическое тождество. **375.** 1A) $S = \frac{1}{2}ab$, $S = \frac{1}{2}ch$; 2A) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$; 3B) проведите диагонали данного четырехугольника и докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах его сторон – параллелограмм; 4B) 7,5; 5C) $\approx 6{,}9a$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 7–9 классы. – М.: Просвещение, 2010.

2. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 3-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006.

3. Готман Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, АО «Учеб. лит.», 1996.

4. Зеленяк О. П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal / О. П. Зеленяк. – Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008.

5. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

6. Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С. Планиметрия. Геометрия на плоскости. – Висагинас: Альфа, 1998.

7. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Учимся решать задачи по геометрии. – К.: «Магистр-S», 1996.

8. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.

Список фотоснимков, использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Военно-исторический музей Вооруженных сил Республики Казахстан – 19 стр.

2. Государственный театр оперы и балета «Астана Опера» – 74 стр.

3. Высокогорный спортивный комплекс «Медеу» – 106 стр.

4. Запуск ракеты-носителя «Протон-М» с космодрома Байконур – 130 стр.