Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы

В двух частях
11 класс (ч. 2)

+CD

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

KELESHEK
2030
КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
С60

Солтан Г. Н.

С60 **Геометрия.** Учебник для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы. В двух частях. 11 класс (ч. 2) +CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 128 с.

ISBN 978-601-317-518-8
ISBN 978-601-317-520-1

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/geom_ogn_11ru.php

Предлагаемый учебник продолжает линию учебников по предмету «Геометрия» авторов Г. Н. Солтана, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадиловой издательства «Келешек-2030» по программе обновленного содержания образования. Учебник адресован учащимся классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы и состоит из двух частей: 10 класс – часть 1, 11 класс – часть 2.

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72

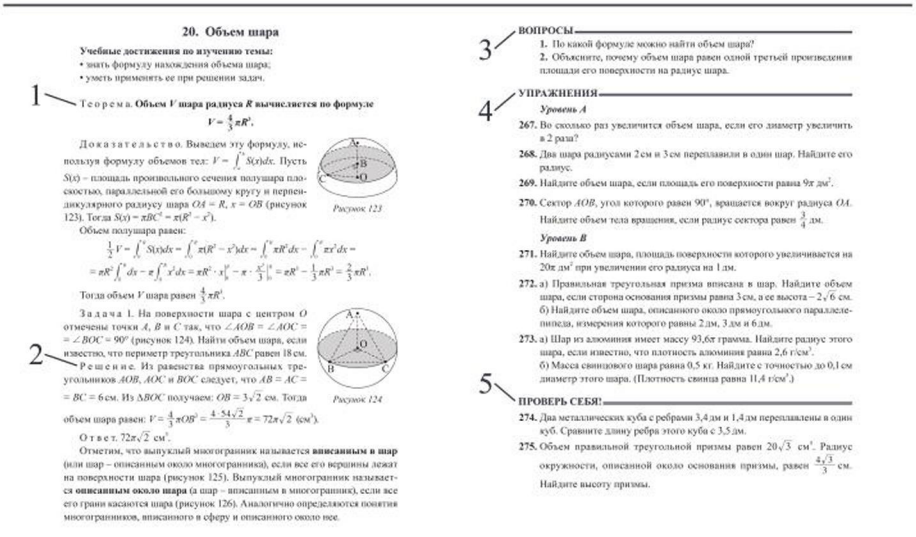
ISBN 978-601-317-520-1
ISBN 978-601-317-518-8
© ИП Келешек-2030 баспасы, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие выпускники! В этом учебном году вы завершите изучение предмета «Геометрия». В курсе стереометрии 11 класса рассматриваются многогранники и площади их поверхностей, тела вращения, их элементы и площади поверхностей, объемы тел. Большое внимание вы будете уделять решению задач на применение теоретических знаний. При этом потребуется использование материала, изученного в курсах планиметрии, стереометрии 10 класса, алгебры и начал анализа.

Содержание данного учебника состоит из теоретического и практического материала для занятий по каждой теме учебной программы. Определения понятий, аксиомы, теоремы, следствия из них выделены специальными шрифтами (1). К каждой теме предлагаются решения типовых задач (2) и контрольные вопросы (3) для проверки усвоения теории. Далее даны упражнения двух уровней сложности (А и В) для формирования практических умений и навыков (4). В конце каждого раздела имеются задания под рубрикой «Проверь себя!» (5) и исторические сведения. К упражнениям даются указания и ответы.



20. Объем шара

Учебные достижения по изучению темы:
- знать формулу нахождения объема шара;
- уметь применять ее при решении задач.

1 Теорема. **Объем V шара радиуса R вычисляется по формуле**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Доказательство. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения полушара плоскостью, параллельной его большому кругу и перпендикулярного радиусу шара $OA = R$, $x = OB$ (рисунок 123). Тогда $S(x) = \pi BC^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

Рисунок 123

Объем полушара равен:

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(x)dx = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \int_0^R \pi R^2 dx - \int_0^R \pi x^2 dx =$$
$$= \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^R - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Тогда объем V шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

2 Задача 1. На поверхности шара с центром O отмечены точки A, B и C так, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$ (рисунок 124). Найти объем шара, если известно, что периметр треугольника ABC равен 18 см.

Решение. Из равенства прямоугольных треугольников AOB, AOC и BOC следует, что $AB = AC = BC = 6$ см. Из ΔBOC получаем: $OB = 3\sqrt{2}$ см. Тогда объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi OB^3 = \frac{4 \cdot 54\sqrt{2}}{3}\pi = 72\pi\sqrt{2}$ (см³).

Рисунок 124

Ответ. $72\pi\sqrt{2}$ см³.

Отметим, что выпуклый многогранник называется **вписанным в шар** (или шар – описанным около многогранника), если все его вершины лежат на поверхности шара (рисунок 125). Выпуклый многогранник называется **описанным около шара** (а шар – вписанным в многогранник), если все его грани касаются шара (рисунок 126). Аналогично определяются понятия многогранников, вписанного в сферу и описанного около нее.

3 **ВОПРОСЫ**

1. По какой формуле можно найти объем шара?

2. Объясните, почему объем шара равен одной третьей произведения площади его поверхности на радиус шара.

4 **УПРАЖНЕНИЯ**

Уровень А

267. Во сколько раз увеличится объем шара, если его диаметр увеличить в 2 раза?

268. Два шара радиусами 2 см и 3 см переплавили в один шар. Найдите его радиус.

269. Найдите объем шара, если площадь его поверхности равна 9π дм².

270. Сектор AOB, угол которого равен 90°, вращается вокруг радиуса OA. Найдите объем тела вращения, если радиус сектора равен $\frac{3}{4}$ дм.

Уровень В

271. Найдите объем шара, площадь поверхности которого увеличивается на 20π дм² при увеличении его радиуса на 1 дм.

272. а) Правильная треугольная призма вписана в шар. Найдите объем шара, если сторона основания призмы равна 3 см, а ее высота – $2\sqrt{6}$ см.
б) Найдите объем шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 дм, 3 дм и 6 дм.

273. а) Шар из алюминия имеет массу $93{,}6\pi$ грамма. Найдите радиус этого шара, если известно, что плотность алюминия равна 2,6 г/см³.
б) Масса свинцового шара равна 0,5 кг. Найдите с точностью до 0,1 см диаметр этого шара. (Плотность свинца равна 11,4 г/см³.)

5 **ПРОВЕРЬ СЕБЯ!**

274. Два металлических куба с ребрами 3,4 дм и 1,4 дм переплавлены в один куб. Сравните длину ребра этого куба с 3,5 дм.

275. Объем правильной треугольной призмы равен $20\sqrt{3}$ см³. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. Найдите высоту призмы.

Желаем успехов!

Авторы

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ИЗ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ

Основные формулы и теоремы

Произвольный треугольник

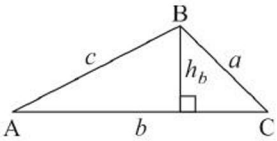


Рисунок 1

a, b, c – стороны;

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – противолежащие им углы;

h_b – высота, проведенная к стороне b;

S – площадь; p – полупериметр;

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности.

Средняя линия треугольника MN (рисунок 2):

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b;\ S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = p \cdot r;\quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A.$$

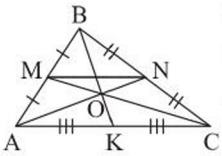


Рисунок 2

Медианы треугольника

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$

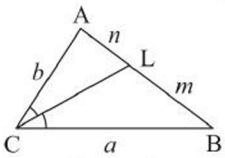


Рисунок 3

Биссектриса треугольника

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.$$

$$CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Прямоугольный треугольник

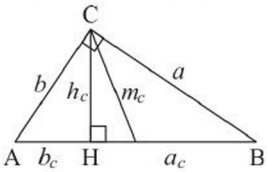


Рисунок 4

a, b – катеты; c – гипотенуза;

a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу;

m_c – медиана, проведенная к гипотенузе;

h_c – высота, проведенная к гипотенузе.

$$S = \frac{1}{2}ab;\qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R;\qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c};\qquad a = \sqrt{c \cdot a_c};\qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

Решение прямоугольного треугольника:

$$a = c \cdot \sin\angle A;\qquad b = c \cdot \cos\angle A;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\angle A;\qquad b = a \cdot \operatorname{ctg}\angle A.$$

Тригонометрические формулы:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Правильный треугольник

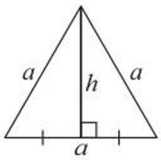


Рисунок 5

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$r = \frac{1}{3}h$;

$R = 2r$.

Квадрат

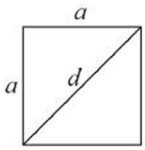


Рисунок 6

$d = a\sqrt{2}$;

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$;

$r = \frac{1}{2}a$;

$R = \frac{1}{2}d$.

Параллелограмм

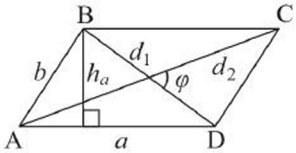


Рисунок 7

a, b – смежные стороны;

d_1, d_2 – диагонали;

φ – угол между диагоналями;

h_a – высота, проведенная к стороне a;

S – площадь.

$S = a \cdot h_a$; $S = ab \cdot \sin\angle A$;

$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Если $d_1 = d_2$, то $ABCD$ – прямоугольник (рисунок 8, *а*).

Рисунок 8

Если $d_1 \perp d_2$, то $ABCD$ – ромб (рисунок 8, *б*).

Трапеция

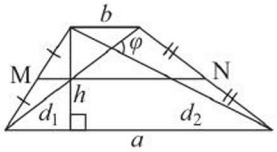


Рисунок 9

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

MN – средняя линия (рисунок 9);

MN параллельна основаниям

и $MN = \frac{a+b}{2}$.

Окружность

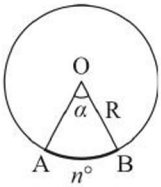


Рисунок 10

C – длина окружности; S – площадь круга;

l – длина дуги AB; $S_{сект.}$ – площадь сектора;

$n°$ – градусная мера дуги AB (центрального угла AOB);

α – радианная мера центрального угла.

$C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = \frac{\pi R n°}{180°}$; $l = R\alpha$.

$S_{сект.} = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$; $S_{сект.} = \frac{1}{2}R^2\alpha$.

Свойства: а) касательных к окружности;

б) касательной и секущей.

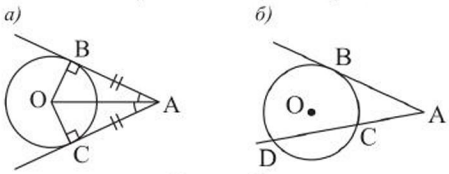


Рисунок 11

$AB^2 = AD \cdot AC$ (рисунок 11, *б*).

Свойство хорд

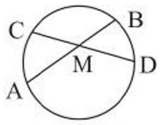


Рисунок 12

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

Угол между: а) касательной и хордой; б) хордами; в) секущими.

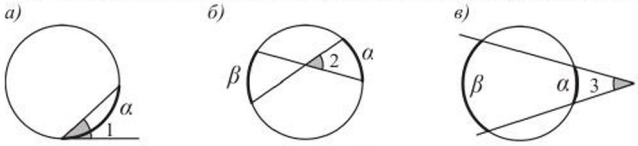


Рисунок 13

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; б) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; в) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Вписанный четырехугольник

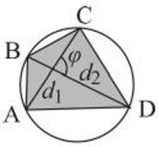


Рисунок 14

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$,

где d_1, d_2 – диагонали;

φ – угол между ними.

Описанный четырехугольник

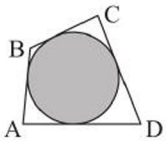


Рисунок 15

$AB + CD = AD + BC$.

$S = rp$,

где r – радиус вписанной окружности;

p – полупериметр четырехугольника.

Подобные треугольники

1) углы равны;

2) стороны пропорциональны.

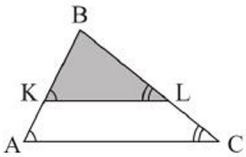


Рисунок 16

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному (рисунок 16).

$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k;$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle KBL}} = k; \ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KBL}} = k^2.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ИЗ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

Аксиомы стереометрии

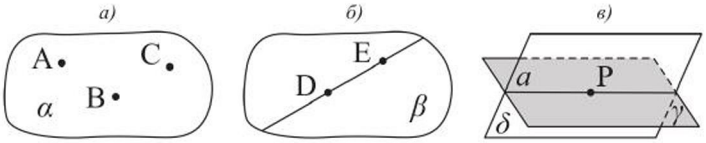


Рисунок 17

1) Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.
2) Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.
3) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, которая проходит через эту точку.

Следствия из аксиом

1) Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести единственную плоскость.
2) Через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.
3) Через две различные точки пространства можно провести единственную прямую.

Теорема. Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

Параллельные и скрещивающиеся прямые

Признак параллельности прямых: если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые параллельны.
Признак скрещивающихся прямых: если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся. На рисунке 18 прямые c и a, c и b, c и d – скрещивающиеся.

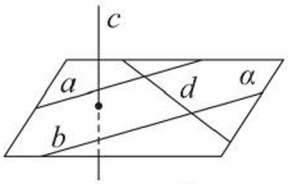


Рисунок 18

Взаимное расположение прямой и плоскости, двух плоскостей

Признак параллельности прямой и плоскости: если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, но не содержится в ней, то она параллельна этой плоскости.
Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. Например, на рисунке 18, если $c \perp b$ и $c \perp d$, то $c \perp \alpha$.

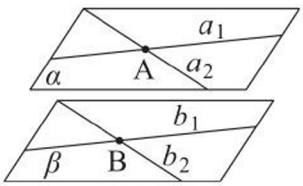


Рисунок 19

Признак параллельности двух плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (рисунок 19).
Признак перпендикулярности плоскостей: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Перпендикуляр и наклонная

Если из одной точки к плоскости проведены две наклонные, то:

1) наклонные, имеющие равные проекции, равны и обратно, равные наклонные имеют равные проекции (рисунок 20);

2) из двух наклонных, имеющих неравные проекции, больше та, проекция которой больше и обратно, большая наклонная имеет большую проекцию.

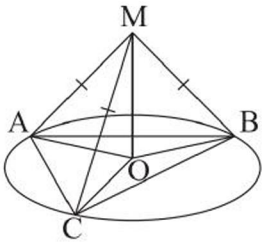


Рисунок 20

Т е о р е м а (*о трех перпендикулярах*). Если прямая плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Например, на рисунке 21, если $m \perp CB$, то $m \perp AC$.

Т е о р е м а (*обратная теореме о трех перпендикулярах*). Если прямая плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной на данную плоскость.

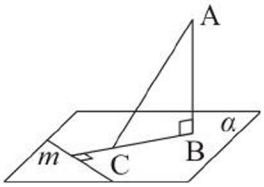


Рисунок 21

Угол между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями

Углом между прямой и не перпендикулярной ей плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Например, на рисунке 22 $\angle MAH = \varphi$ – угол между прямой a и плоскостью α, $0° \le \varphi < 90°$.

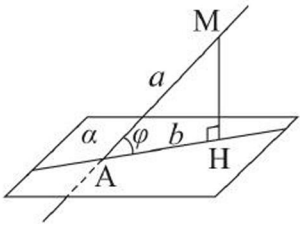


Рисунок 22

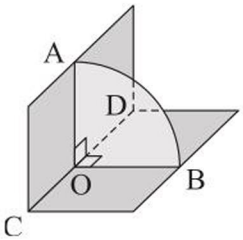


Рисунок 23

Линейным углом двугранного угла называется угол, вершина которого принадлежит его ребру, а стороны лежат в его гранях и перпендикулярны этому ребру. Например, на рисунке 23 угол AOB – линейный угол двугранного угла с ребром CD.

Двугранный угол называется *прямым*, если он равен 90°, *острым*, если он меньше 90°, *тупым*, если он больше 90°, но меньше 180°.

Градусной мерой угла между двумя пересекающимися плоскостями называется градусная мера одного из образованных ими двугранных углов, который не больше каждого из остальных.

Величина угла между пересекающимися плоскостями не больше 90°.

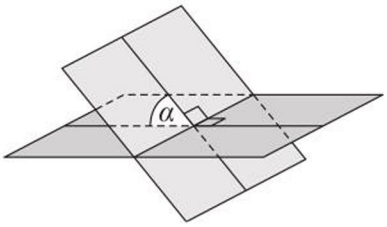


Рисунок 24

Прямоугольная система координат в пространстве

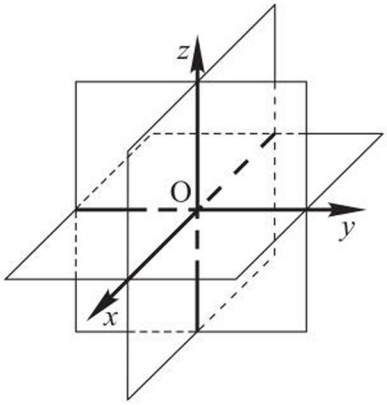


Рисунок 25

Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат.

Если в пространстве даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то расстояние между ними равно: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; координаты точки $C(x, y, z)$ – середины отрезка AB задаются формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $A(a, b, c)$ имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

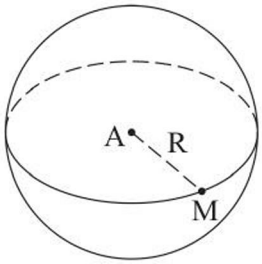


Рисунок 26

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10 КЛАССА

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

1. Три точки A, B и C лежат в одной плоскости, а точка D не принадлежит этой плоскости. Может ли четырехугольник $ABCD$ быть трапецией?

2. Даны параллельные прямые a, b и точка M, не принадлежащая ни одной из них. Расположена ли точка M в одной плоскости с прямыми a и b, если известно, что через точку M можно провести прямую, пересекающую: а) обе прямые a и b; б) только одну из этих прямых?

3. Каково взаимное расположение плоскостей α и β, если прямая a:
а) пересекает обе эти плоскости; б) пересекает одну плоскость и параллельна другой плоскости; в) пересекает одну плоскость и принадлежит другой плоскости?

4. а) Может ли плоскость, проходящая через середины двух сторон треугольника, пересечь третью его сторону?
б) Имеются две плоскости, каждая из которых параллельна одной и той же прямой. Каково может быть взаимное расположение этих плоскостей?

5. Верно ли, что если линии пересечения двух плоскостей α и β плоскостью γ параллельны, то плоскости α и β параллельны?

6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEK$ и проведен перпендикуляр AH к его плоскости. Объясните, почему отрезки HE и DE взаимно перпендикулярны.

7. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2 м, пересечены прямой, образующей с каждой из этих плоскостей угол 45°. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между плоскостями.

8. Расстояния от точек A и B до плоскости α соответственно равны 12,5 см и 3,5 см. Длина проекции отрезка AB на эту плоскость равна 12 см. Найдите расстояние между точками A и B. Рассмотрите случаи, когда отрезок AB не пересекает или пересекает α.

9. Дан треугольник с координатами вершин $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$. Вершина C треугольника лежит на положительной полуоси Oz. Найдите длину медианы CM, если $\frac{AB^2}{CB^2} = \frac{2}{5}$.

10. Через сторону AD прямоугольника $ABCD$ со сторонами 2 дм и 4 дм проведена плоскость α. Проекция прямоугольника на плоскость α – квадрат. Найдите угол наклона прямой CD к плоскости α.

Уровень B

11. На одной из трибун спорткомплекса «Барыс Арена» лестница состоит из n ступенек, высота каждой из которых равна h. Составьте формулу для нахождения длины l перил вдоль этой лестницы, если угол наклона их к основанию равен α.

Спорткомплекс «Барыс Арена», г. Нур-Султан

12. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 6 см и 8 см, а боковое ребро – 10 см. Найдите сумму углов, образованных его диагональю с плоскостью основания и любой из боковых граней.

13. Плоскости правильного треугольника ABC и квадрата $ACDE$ перпендикулярны. Найдите расстояние между точками B и D, если $AC = 8$ см.

I. МНОГОГРАННИКИ

В результате изучения раздела надо

знать

- определение многогранника; его элементы;
- понятие развертки многогранника;
- определение и свойства: призмы, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, усеченной пирамиды;
- формулы площадей боковой и полной поверхностей: призмы, пирамиды, усеченной пирамиды;
- определение правильного многогранника.

уметь

- изображать на плоскости: призму, пирамиду, усеченную пирамиду;
- строить развертки многогранников;
- решать задачи на нахождение элементов многогранников;
- применять формулы площадей боковой и полной поверхностей призмы, пирамиды, усеченной пирамиды при решении задач;
- распознавать виды правильных многогранников.

1. Понятие многогранника. Прямоугольный параллелепипед и его свойства

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения многогранника и его элементов, понятие развертки многогранника;

• знать определение и свойства прямоугольного параллелепипеда и уметь изображать его на плоскости;

• уметь решать задачи на нахождение элементов параллелепипеда.

Понятие многогранника рассматривалось в предыдущем классе. Изучим теперь многогранники различных видов и их свойства более подробно. Напомним, что **многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников**. Отметим, что любые два из этих многоугольников, имеющие общую сторону, не лежат в одной плоскости. Параллелепипеды, пирамиды – примеры многогранников.

Многоугольники, из которых состоит поверхность многогранника, называются его **гранями**, стороны этих многоугольников – **ребрами**, а их вершины – **вершинами** многогранника. Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей каждую его грань (рисунок 27, *а*); **невыпуклым**, если он имеет хотя бы одну грань по одну сторону от плоскости, в которой он не расположен (рисунок 27, *б*). В школьном курсе геометрии изучаются преимущественно выпуклые многогранники, поэтому если слово «выпуклый» не используется, то предполагается, что рассматривается именно такой многогранник.

а) *б)*

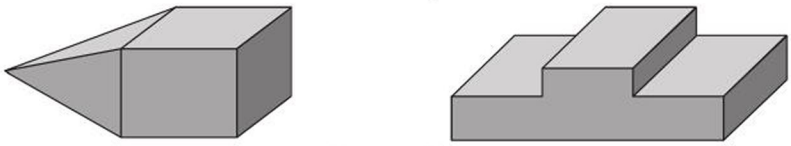


Рисунок 27

Грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками, углы этих многоугольников с указанными вершинами называются **плоскими углами** многогранника при этих вершинах. Грани выпуклого многогранника, имеющие общее ребро, называются *смежными* (или *соседними*). **Двугранным углом многогранника** называется двугранный угол между полуплоскостями, содержащими две его смежные грани.

Диагональю выпуклого многогранника называется отрезок, соединяющий две его вершины, не принадлежащие одной грани. **Сумма площадей всех граней многогранника называется площадью его поверхности.**

Поверхность многогранника можно разрезать по нескольким ребрам и разместить все его грани в одной плоскости так, что получится некоторый многоугольник. Этот многоугольник называется **разверткой** поверхности многогранника (или кратко **разверткой многогранника**). На рисунках 28, *б*, *в* показаны развертки поверхности многогранника, изображенного на рисунке 28, *а*. На практике для получения модели многогранника, например, при изготовлении ее из картона, сначала надо изготовить развертку его поверхности.

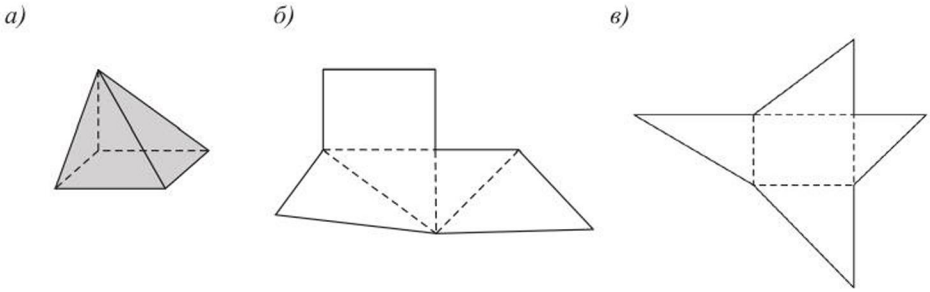


Рисунок 28

З а д а ч а 1. Существует ли многогранник, имеющий только 7 ребер?

Р е ш е н и е. Допустим, что такой многогранник существует. Если все его m граней – треугольники, то ребер в нем $\frac{3m}{2}$, так как каждое его ребро принадлежит двум граням. По условию $\frac{3m}{2} = 7$, откуда $m = \frac{14}{3}$, чего быть не может, так как m – натуральное число, не меньшее 4. Если хотя бы одна грань многогранника является n-угольником, где $n \geq 4$, то он имеет не менее 8 ребер. Следовательно, многогранника, имеющего только 7 ребер, не существует.

О т в е т. Не существует.

Одним из наиболее простых многогранников является прямоугольный параллелепипед. Напомним, что **параллелепипедом называется многогранник, имеющий 6 граней – параллелограммов** (рисунок 29, *а*). Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Если все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, то он называется **прямоугольным параллелепипедом**.

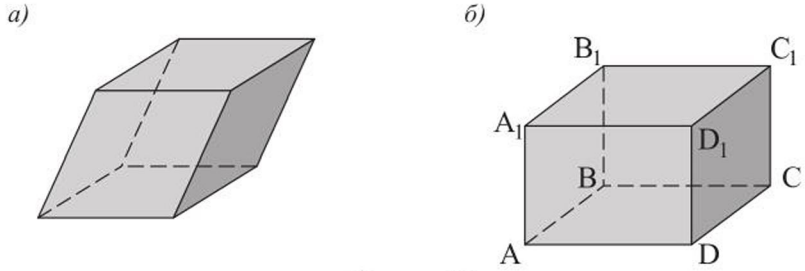


Рисунок 29

Если дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 29, *б*), то обычно грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называют его **основаниями**, а остальные грани – **боковыми гранями**. Сумма площадей всех боковых граней параллелепипеда называется **площадью его боковой поверхности**. Любое боковое ребро прямоугольного параллелепипеда, как и его длину, называют его **высотой**.

Сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и боковое ребро, называют **диагональным сечением**. Например, на рисунке 30, *а* изображено диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда – четырехугольник BB_1D_1D, а четырехугольник AB_1C_1D на рисунке 30, *в* не является диагональным сечением.

В прямоугольном параллелепипеде диагонали равны, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Используя рисунок 30, докажите эти свойства самостоятельно.

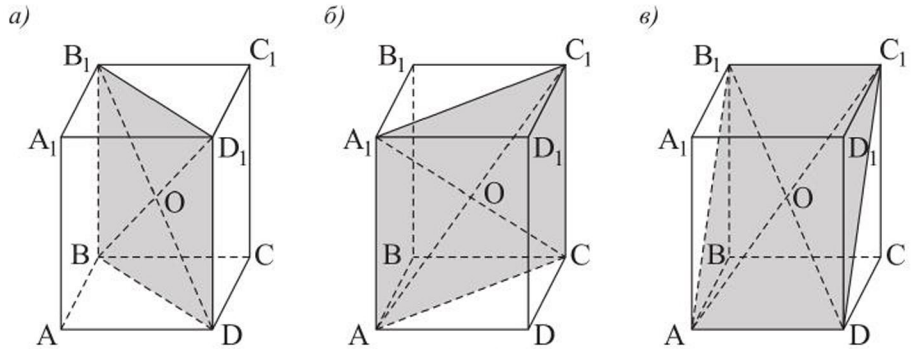


Рисунок 30

Напомним, что **квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, выходящих из одной точки.** Если a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда, а d – его диагональ, то $\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$.

В частности, диагональ d куба с ребром a равна: $\boldsymbol{d = a\sqrt{3}}$.

З а д а ч а 2. Диагональ бруса формы прямоугольного параллелепипеда равна 1 м, а сумма трех его измерений равна 2 м. Найти площадь поверхности бруса.

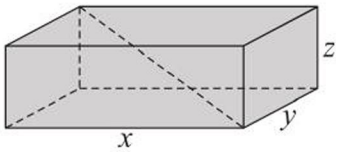


Рисунок 31

Р е ш е н и е. Обозначим измерения бруса x м, y м, z м (рисунок 31). Найдем площадь его поверхности, равную $2xy + 2xz + 2yz$.

По условию задачи $x + y + z = 2$. По свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Возведем в квадрат левую и правую части равенства $x + y + z = 2$, отсюда $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$. Учитывая, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, получим $2xy + 2xz + 2yz = 3$.

О т в е т. 3 м^2.

ВОПРОСЫ

1. Что называется многогранником? Приведите примеры многогранников.

2. Укажите на примере многогранника его какую-либо: а) вершину; б) грань; в) ребро; г) диагональ.

3. Какой многогранник называется выпуклым, а какой – невыпуклым?

4. Объясните, что такое развертка многогранника.

5. Дайте определение прямоугольного параллелепипеда и перечислите его свойства, известные вам.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

14. Какое наименьшее число: а) граней; б) ребер; в) вершин может иметь многогранник?

15. На рисунке 32 изображен многогранник $ABCDE$, все грани которого правильные треугольники. Назовите:

а) его смежные грани;

б) плоские углы при вершине D;

в) диагональ этого многогранника.

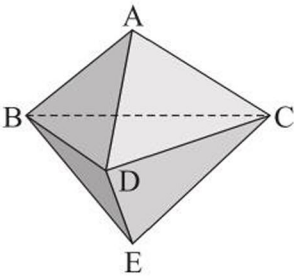


Рисунок 32

16. Изобразите многогранник, являющийся объединением двух четырехугольных пирамид $PABCD$ и $SABCD$. Сколько в нем:

а) граней; б) ребер; в) вершин; г) диагоналей?

17. Чему равна сумма плоских углов при каждой вершине:
а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильного тетраэдра?

18. Изобразите куб и четырехугольную пирамиду, основание которой совпадает с нижней гранью куба, а вершина – с одной из вершин его верхней грани. Сколько общих ребер у этой пирамиды и куба?

19. Выберите неверное утверждение: а) куб является прямоугольным параллелепипедом; б) все грани куба равны; в) диагональ куба с ребром a равна $a\sqrt{3}$; г) диагональное сечение куба является квадратом.

20. Площадь диагонального сечения куба равна $16\sqrt{2}$ см^2. Найдите: а) длину ребра куба; б) диагональ его основания; в) диагональ куба; г) площадь его поверхности.

21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, через ребра AD и B_1C_1 которого проведена плоскость. Найдите площадь поверхности куба, если площадь его сечения этой плоскостью равна $98\sqrt{2}$ см^2.

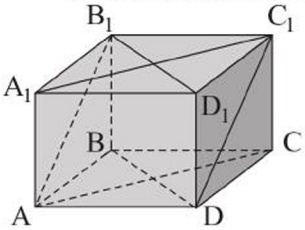


Рисунок 33

22. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 33):
а) $(B_1C_1C) \parallel (AA_1D_1)$;
б) $AB_1 \parallel (D_1DC)$;
в) $CC_1 \perp (ABD)$;
г) $A_1D_1 \perp C_1D$;
д) AB_1C_1D – прямоугольник;
е) диагональные сечения равны.

23. Может ли диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда являться квадратом? Если может, то укажите при каком условии.

24. Длина, ширина и высота складского помещения соответственно равны 8 м, 6 м, 3 м. Найдите площадь: а) пола; б) всех его стен.

25. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 12 см, 8 см и 24 см. Найдите: а) диагональ параллелепипеда; б) площадь его поверхности.

26. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 14 см, а его основанием является квадрат площадью 144 см^2. Найдите длину диагонали параллелепипеда.

27. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 24 см и 10 см, а его диагональ образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите боковое ребро этого параллелепипеда.

28. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 16 см и 12 см, а площадь его диагонального сечения 200 см^2. Найдите высоту параллелепипеда.

29. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ м, а диагональ его боковой грани 10 м.

30. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 8 см, а диагональ его квадратного основания $4\sqrt{2}$ см. Найдите угол между диагональю параллелепипеда и диагональю его боковой грани.

31. Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 6 дм и наклонена к его плоскости под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности этого параллелепипеда.

32. Нарисуйте развертку поверхности:
а) правильного тетраэдра, ребро которого равно 2 см;
б) прямоугольного параллелепипеда с измерениями 1 см, 2 см, 3 см.

Уровень В

33. Существует ли пятигранник, каждая грань которого – треугольник?

34. Изобразите многогранник, который получится, если от куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отрезать пирамиду $A_1AB_1D_1$. Верно ли, что у этого многогранника столько вершин, сколько и граней?

35. Изготовьте модель невыпуклого многогранника, который получится, если: а) к каждой грани тетраэдра приклеить равный ему тетраэдр; б) к каждой грани куба приклеить равный ему куб; в) к каждой грани куба приклеить четырехугольную пирамиду, основание которой равно грани куба.

36. Деревянный куб, площадь поверхности которого равна 24 см^2, распилили на 8 одинаковых кубиков. Чему равна площадь поверхности одного такого кубика?

37. Найдите площадь поверхности куба, площадь диагонального сечения которого равна 1 м^2.

38. а) Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием наклонена к нему под углом 60°. Найдите синус угла между этой диагональю и боковой гранью параллелепипеда.
б) Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием образует с его боковой гранью угол 30°. Найдите угол между этой диагональю и плоскостью основания параллелепипеда.

2. Призма и ее элементы. Площадь поверхности призмы

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определения призмы, ее элементов, виды призм, уметь изображать их на плоскости;

• уметь решать задачи на нахождение элементов призмы;

• знать формулы площади боковой и полной поверхностей призмы и уметь применять их при решении задач.

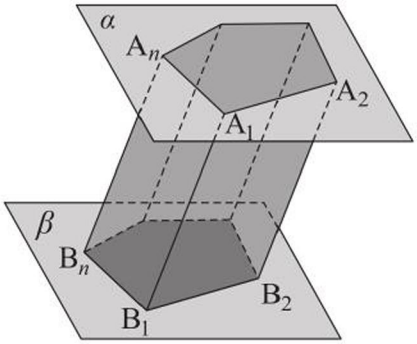


Рисунок 34

Многогранник, две грани которого – равные *n*-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные *n* граней – параллелограммы, называется *n*-угольной призмой (рисунок 34).

Два равных *n*-угольника, расположенных в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы, параллелограммы – *боковыми гранями* призмы, а ребра призмы, не являющиеся сторонами ее оснований – *боковыми ребрами*. Из определения понятия призмы следует, что **все ее боковые ребра равны, а каждые два боковых ребра параллельны.**

В зависимости от числа сторон основания призмы называют треугольными, четырехугольными, пятиугольными и т. д. (рисунки 35, 36). Если основание призмы – параллелограмм, то она является параллелепипедом (рисунок 35, *а*).

Рисунок 35

Если боковые ребра призмы перпендикулярны ее основаниям, то призма называется **прямой** (рисунок 36), а если не перпендикулярны – **наклонной** (рисунок 35).

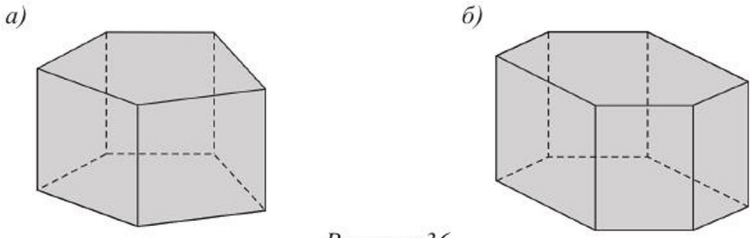


Рисунок 36

Сечение призмы плоскостью, проходящей через ее диагональ и боковое ребро, называется *диагональным сечением* призмы. В прямой призме каждая боковая грань и каждое диагональное сечение являются прямоугольниками.

Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к плоскости другого основания призмы, называется ее **высотой**. Высотой призмы называют также длину этого перпендикуляра, равную расстоянию между ее основаниями. Например, на рисунке 37 A_1H – высота наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.*

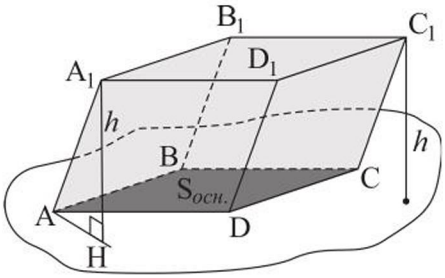


Рисунок 37

Призма называется правильной, если она прямая и ее основания – правильные *n*-угольники. На рисунке 36, *б* изображена правильная шестиугольная призма. В правильной призме все боковые грани – равные прямоугольники.

Фигура, образованная боковыми гранями призмы, называется ее *боковой поверхностью*. **Площадью полной поверхности призмы** называется сумма площадей всех ее граней, а площадью *боковой поверхности* призмы – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь $S_{п.п.}$ полной поверхности призмы выражается через площадь $S_{бок.}$ боковой поверхности и площадь $S_{осн.}$ основания призмы формулой: $\boldsymbol{S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}}$.

Теорема. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на длину бокового ребра.**

Доказательство. Все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих прямоугольников, то есть сумме произведений длин сторон

основания призмы на длину ее бокового ребра. Отсюда получаем формулу $\boldsymbol{S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h}$, где $P_{осн.}$ – периметр основания призмы, h – длина бокового ребра призмы.

Сечение призмы плоскостью, пересекающей каждое боковое ребро и перпендикулярной им, называется **перпендикулярным сечением призмы**. Например, на рисунке 38 четырехугольник $MNPK$ – перпендикулярное сечение наклонного параллелепипеда.

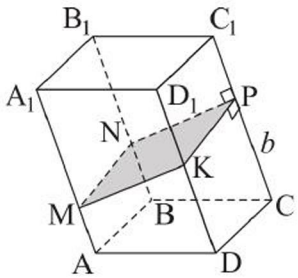


Рисунок 38

Теорема. **Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на длину ее бокового ребра.**

Доказательство. Все боковые грани наклонной призмы – параллелограммы, а все боковые ребра равны. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей этих параллелограммов. Перпендикулярное сечение призмы – многоугольник, каждая сторона которого является высотой параллелограмма (боковой грани призмы). Следовательно, $\boldsymbol{S_{бок.} = P_{перп.сеч.} \cdot b}$, где $P_{перп.сеч.}$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, b – длина ее бокового ребра.

Задача 1. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, основания которой равны 2 см и 10 см, а ее боковая сторона 5 см. Известно, что диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найти площадь полной поверхности призмы.

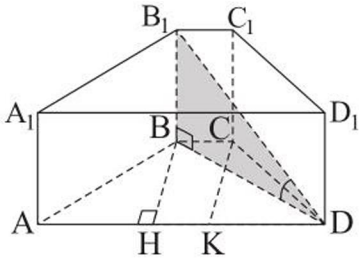


Рисунок 39

Решение. Пусть дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AD = 10$ см, а диагональ B_1D образует с плоскостью основания угол B_1DB, равный 30° (рисунок 39). Площадь полной поверхности этой призмы равна: $S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$.

Найдем площадь основания. Для этого проведем высоты BH и CK трапеции $ABCD$. Тогда $AH = KD = \frac{10-2}{2} = 4$ (см), $BH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см), $S_{осн.} = \frac{2+10}{2} \cdot 3 = 18$ (см^2).

Найдем площадь боковой поверхности призмы по формуле $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$. Так как призма прямая, то высота h равна ее боковому ребру BB_1. В прямоугольном ΔBB_1D сторона $B_1B = BD \cdot \operatorname{tg} 30°$. Из прямоугольного ΔBHD имеем: $BD = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (см). Тогда $B_1B = 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{15}$ (см), $S_{бок.} = 22 \cdot \sqrt{15}$ см^2.

Итак, $S_{п.п.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = (22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

Ответ. $(22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

Задача 2. В наклонной треугольной призме боковое ребро равно $\sqrt{3}$ дм и удалено от двух других ее боковых ребер на расстояние, равное 1 дм, а двугранный угол при этом ребре равен 120°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Решение. Пусть дана наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $CC_1 = \sqrt{3}$ дм. Построим ее перпендикулярное сечение – треугольник KMN, в котором $MN = MK = 1$ дм (рисунок 40). При этом $\angle KMN$ является линейным углом двугранного угла при ребре CC_1, $\angle KMN = 120°$. Тогда площадь боковой поверхности призмы равна: $S_{бок.} = (KN + KM + MN) \cdot CC_1$. Из ΔKMN по теореме косинусов найдем $KN^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$. Тогда $S_{бок.} = (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{3} = (3 + 2\sqrt{3})$ (дм^2).

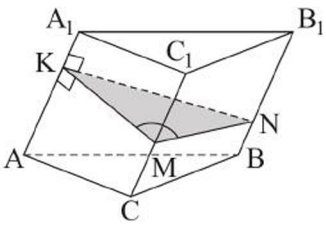


Рисунок 40

Ответ. $(3 + 2\sqrt{3})$ дм^2.

Задача 3. Найти высоту наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором основание – прямоугольник $ABCD$, $BB_1 = 7$ см, угол между основанием и гранью AA_1B_1B равен 60°, а угол между этим основанием и гранью BB_1C_1C равен 45°.

Решение. К сторонам BA и BC построим перпендикуляры B_1M, MF и B_1N, NE соответственно (рисунок 41). Обозначим точку O пересечения прямых MF и NE.

Тогда $AB \perp (B_1MO)$, значит, $AB \perp B_1O$ и $BC \perp (B_1NO)$, откуда $BC \perp B_1O$, следовательно, $B_1O \perp (ABC)$. То есть отрезок B_1O – высота параллелепипеда, пусть $B_1O = h$.

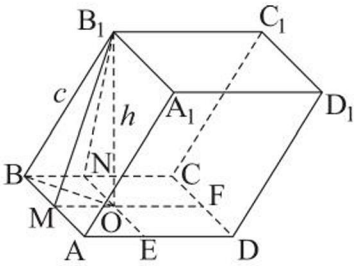


Рисунок 41

В ΔB_1MO $\angle B_1MO = 60°$, $MO = \frac{h}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

В ΔB_1NO $\angle B_1NO = 45°$, $NO = h$. Причем $NO = BM$, так как $MONB$ – прямоугольник.

В ΔBMO: $BO^2 = h^2 + \frac{h^2}{3} = \frac{4h^2}{3}$.

В ΔBB_1O: $7^2 = \frac{4h^2}{3} + h^2$, откуда $49 \cdot 3 = 7h^2$, $h = \sqrt{21}$ (см).

Ответ. $\sqrt{21}$ см.

ВОПРОСЫ

1. Что называется призмой?

2. Какая призма называется: а) прямой; б) наклонной; в) правильной?

3. Что называется боковой поверхностью призмы?

4. По какой формуле можно найти площадь полной поверхности: а) прямой призмы; б) наклонной призмы?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

39. а) Какое наименьшее число граней может иметь призма?

б) Какой n-угольник является основанием призмы, у которой 10 вершин?

40. Укажите верные утверждения: а) основания призмы равны; б) грани призмы равны; в) все боковые грани призмы являются параллелограммами; г) все грани призмы являются параллелограммами; д) все боковые ребра параллельны между собой.

41. а) Чем отличается четырехугольная прямая призма от прямого параллелепипеда?

б) Есть ли различия между прямым и прямоугольным параллелепипедами?

42. Докажите, что если плоскости диагональных сечений прямого параллелепипеда перпендикулярны, то его основанием является ромб.

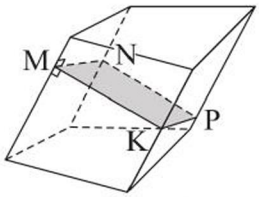


Рисунок 42

43. Верно ли, что: а) число ребер любой призмы кратно 3; б) сумма двугранных углов при всех боковых ребрах четырехугольной призмы равна 360° (рисунок 42); в) все диагональные сечения правильной призмы равновелики?

44. Изготовьте модель правильной:

а) треугольной призмы, все ребра которой равны;

б) шестиугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше ее высоты.

45. На рисунке 43 изображена развертка поверхности правильной треугольной призмы. Используя данные рисунка, найдите площадь полной поверхности этой призмы.

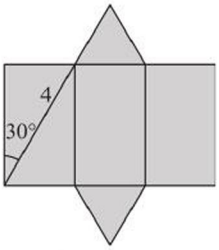


Рисунок 43

46. Найдите сторону основания и высоту правильной четырехугольной призмы, если площадь ее полной поверхности равна 40 дм^2, а площадь боковой поверхности на 8 дм^2 меньше.

47. а) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 дм и 8 дм, а угол между ними равен 30°. Боковое ребро параллелепипеда равно 5 дм. Найдите площадь полной поверхности этого параллелепипеда.

б) Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 м и 15 м, а угол между ними равен 60°. Меньшая из площадей его диагональных сечений равна 65 м^2. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

48. а) Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы, стороны основания которой равны 5 дм, 5 дм и 8 дм, а ее высота равна меньшей высоте основания.

б) Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы, стороны основания которой равны 21 см, 17 см, 10 см, а диагональ меньшей боковой грани равна 26 см.

49. а) Большая диагональ основания правильной шестиугольной призмы равна 8 см, а высота призмы равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

б) Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если сторона ее основания равна 2 дм, а меньшая из диагоналей призмы 4 дм (рисунок 44).

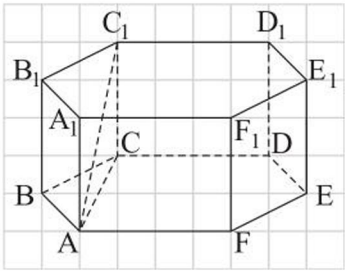


Рисунок 44

50. а) В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с углом 45°, одно основание которой на 8 см больше другого, а ее сред-

няя линия равна 7 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если ее высота равна 5 см.

б) Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 2 см. Диагональ большей боковой грани составляет с ее боковым ребром угол 45°. Найдите площадь полной поверхности призмы, если известно, что в ее основание можно вписать окружность.

51. а) Расстояния между параллельными прямыми, на которых лежат боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см. Боковое ребро призмы равно 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Сечение наклонной треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, – равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 8 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 5 см.

Уровень В

52. а) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 5 м и 3 м, меньшая диагональ основания 4 м, а меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности этого параллелепипеда.

б) Основанием прямого параллелепипеда является ромб. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 40 см^2 и 60 см^2, а его меньшая диагональ наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

53. а) В наклонной треугольной призме две боковые грани равны, угол между ними 60°. Общее ребро этих граней равно $2\sqrt{3}$ м и удалено от противоположной боковой грани на расстояние, равное 4 м. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) Угол между двумя боковыми гранями наклонной треугольной призмы равен 120°, а расстояния от их общего ребра, равного 12 дм, до остальных ребер – 7 дм и 8 дм. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

54. Основание наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат со стороной 4 см, высота призмы равна $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если ее высотой является отрезок:

а) D_1O, где O – точка пересечения диагоналей основания (рисунок 45, *а*);

б) D_1M, где M – середина ребра AD (рисунок 45, *б*).

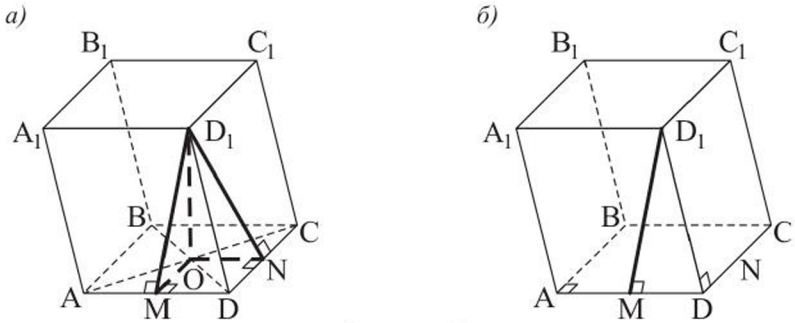


Рисунок 45

55. В наклонной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является прямоугольник со сторонами $CD = 6$ м и $AD = 10$ м. Известно, что боковая грань ABB_1A_1 – квадрат, а двугранный угол при ребре AB равен 135°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

56. Изготовьте модель наклонной четырехугольной призмы, четыре грани которой являются квадратами.

3. Пирамида и ее элементы

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения пирамиды, ее элементов, виды пирамид;
- уметь изображать их на плоскости;
- уметь решать задачи на нахождение элементов пирамиды.

Многогранник, одна грань которого *n*-угольник, а *n* остальных граней – треугольники с общей вершиной, называется *n*-угольной пирамидой.

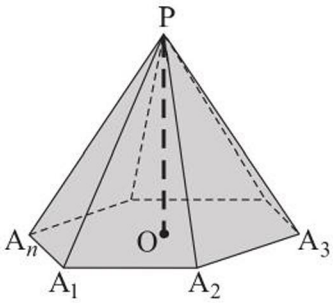


Рисунок 46

Отметим, что *n*-угольная пирамида имеет $n + 1$ грань. Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ называется *основанием* пирамиды (рисунок 46). Точка *P* называется *вершиной* пирамиды, отрезки PA_1, PA_2, …, PA_n – *боковыми ребрами*, треугольники PA_1A_2, PA_2A_3, …, $PA_{n-1}A_n$ – *боковыми гранями* пирамиды. Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости ее основания, называется **высотой** пирамиды, например, отрезок *PO* на рисунке 46. Высотой пирамиды называют также длину этого перпендикуляра. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее боковое ребро и диагональ основания, называется **диагональным сечением** пирамиды.

Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а все боковые ребра равны. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины к стороне основания, называется **апофемой** пирамиды. Центр основания правильной пирамиды является проекцией ее вершины на плоскость этого основания.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой вершине меньше 360°. Это свойство имеет простое наглядное объяснение. Если мы хотим из листа картона склеить *n*-угольную пирамиду, то сумма плоских углов при любой ее вершине должна быть меньше 360°. Если бы сумма плоских углов при ее вершине была равна 360°, то они образовали бы плоскость, в которой лежат смежные грани пирамиды, что невозможно.

Отметим также, что в тетраэдре сумма двух плоских углов при любой вершине больше третьего угла при этой вершине. (Наглядное объяснение этого свойства предложите самостоятельно.)

З а д а ч а 1. В правильной треугольной пирамиде *DABC* сторона основания равна 1 дм, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под

углом α, равным 60°. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону AB основания и перпендикулярной ее боковому ребру DC.

Р е ш е н и е. Проведем высоту BF треугольника DBC, тогда AF – высота треугольника ADC, а равнобедренный треугольник ABF – указанное сечение, FE – его высота (рисунок 47).

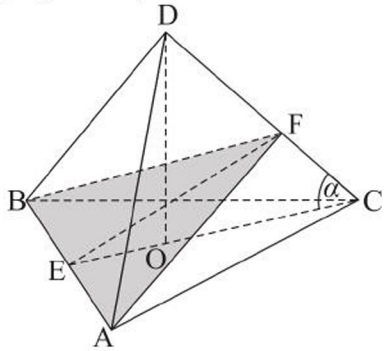


Рисунок 47

$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot EF$. В прямоугольном ΔEFC $EF = CE \cdot \sin 60° = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$ $= \frac{3}{4}$ (дм). Тогда $S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (дм^2).

О т в е т. $\frac{3}{8}$ дм^2.

З а д а ч а 2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β, апофема пирамиды равна k. Найти высоту пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $PABCD$ данная пирамида (рисунок 48), PO – ее высота, PH – апофема пирамиды. По условию $PH = k$, $\angle PAO = \beta$. Пусть $PO = x$, тогда $AO = x \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $OH = AO \cdot \sin 45° = \frac{x \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \sqrt{2}}{2}$.

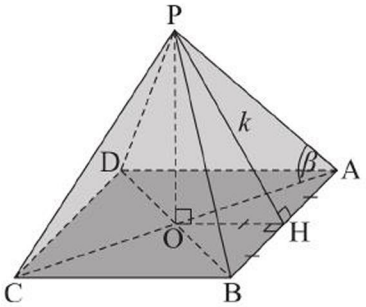


Рисунок 48

В ΔPOH по теореме Пифагора имеем: $PO^2 + OH^2 = PH^2$. Отсюда получим равенство: $x^2 + \frac{x^2 \cdot \text{ctg}^2\beta}{2} = k^2$.

Преобразуем его: $x^2(2 + \text{ctg}^2\beta) = 2k^2$ и найдем $x = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \text{ctg}^2\beta}}$.

Ответ. $\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \text{ctg}^2\beta}}$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется пирамидой?

2. Какая пирамида называется правильной?

3. Что такое апофема правильной пирамиды?

4. Какое свойство имеет сумма плоских углов при вершине любой пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

57. а) Объясните, почему любая пирамида имеет четное число ребер. б) Сколько граней и ребер у пирамиды, в которой 15 вершин? в) Сколько вершин и граней у пирамиды, в которой 16 ребер?

58. Можно ли изготовить клин в виде тетраэдра, имеющего следующие плоские углы при его вершине:

а) 130°, 85°, 36°;
б) 100°, 70°, 40°;
в) 160°, 130°, 80°;
г) 150°, 120°, 90°?

59. а) Основанием пирамиды является параллелограмм. Две соседние ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а длина меньшего бокового ребра равна 17 см. Найдите высоту пирамиды.

б) Основанием пирамиды является квадрат, сторона которого равна 4 дм. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а противоположное ему ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите высоту пирамиды.

60. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, каждое ребро которой равно 9 см. Найдите:

а) плоский угол пирамиды при ее вершине S;
б) угол наклона бокового ребра к плоскости основания;
в) косинус угла наклона боковой грани к плоскости основания;
г) высоту пирамиды.

61. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ плоские углы при вершине D прямые, а сторона основания ΔABC равна 12 см. Найдите:

а) апофему пирамиды;

б) угол между ее ребром BC и медианой DM грани DAB;

в) высоту пирамиды.

62. Объясните, почему: а) все боковые ребра пирамиды равны и образуют равные углы с плоскостью основания, если проекцией вершины пирамиды является центр окружности, описанной около ее основания (рисунок 49, *а*); б) все боковые грани пирамиды образуют с основанием равные углы, если проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр вписанной в него окружности (рисунок 49, *б*).

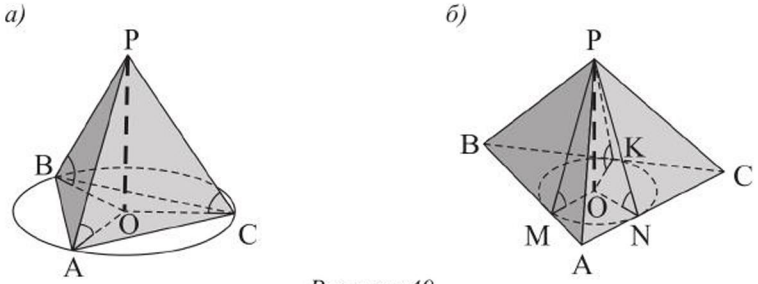


Рисунок 49

в) Верны ли утверждения, обратные утверждениям, данным в задачах а) и б)?

Уровень В

63. Изобразите высоту пирамиды и найдите ее длину, если основанием пирамиды является: а) прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10 дм, а каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°; б) тупоугольный треугольник со сторонами 6 см, 6 см, $6\sqrt{3}$ см, а каждое боковое ребро пирамиды равно 10 см.

64. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 10 м, 10 м, 12 м. Боковые грани пирамиды образуют с основанием равные двугранные углы по 45°. Найдите высоту этой пирамиды.

65. Изготовьте модель пирамиды, основанием которой является:

а) прямоугольный треугольник, а две боковые грани перпендикулярны основанию;

б) прямоугольник, а основание высоты – центр окружности, описанной около него.

4. Усеченная пирамида

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение усеченной пирамиды, ее элементов;

• уметь изображать ее на плоскости;

• уметь решать задачи на нахождение элементов усеченной пирамиды.

Многогранник, вершинами которого являются вершины основания *n*-угольной пирамиды и вершины многоугольника – ее сечения плоскостью, параллельной основанию, называется *n*-угольной усеченной пирамидой.

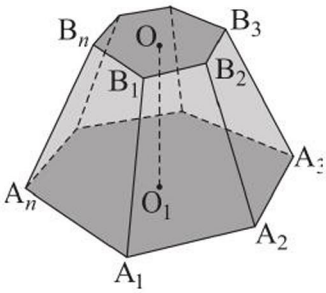


Рисунок 50

Например, на рисунке 50 многогранник $A_1A_2 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ – усеченная пирамида. Многоугольники $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ называются **основаниями** усеченной пирамиды, трапеции $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3, \ldots, A_nB_nB_1A_1$ – *боковыми гранями* усеченной пирамиды. Отрезок, перпендикулярный основаниям, концы которого принадлежат им, называется **высотой** усеченной пирамиды, длина этого отрезка также называется ее высотой. Сечение усеченной пирамиды, содержащее ее боковое ребро и диагональ основания, называется ее **диагональным сечением.**

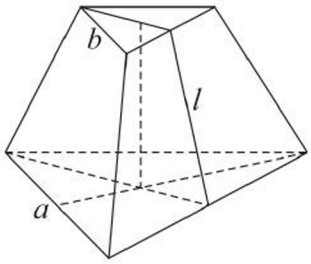


Рисунок 51

Многогранник, вершинами которого являются вершины основания правильной пирамиды и вершины ее сечения, параллельного основанию, называется **правильной усеченной пирамидой.** Все боковые грани правильной усеченной пирамиды являются равными равнобедренными трапециями, высоты этих трапеций называются **апофемами** правильной усеченной пирамиды. Например, на рисунке 51 изображена правильная треугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой равны a и b, апофема – l.

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:

1) *сечением пирамиды является многоугольник, подобный основанию;*

2) *боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные отрезки;*

3) *площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.*

Обоснуйте эти свойства самостоятельно, используя рисунок 52.

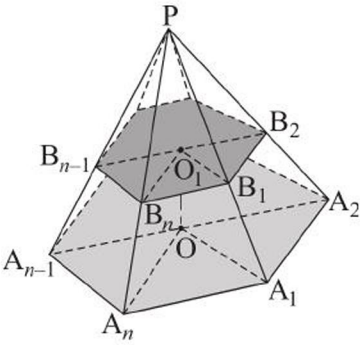


Рисунок 52

Чтобы построить усеченную пирамиду, можно разделить три боковых ребра полной пирамиды в одном и том же отношении, считая от вершины, и провести через три полученные точки деления плоскость. Эта плоскость единственная, она отсечет от полной пирамиды усеченную пирамиду, так как сечением полной пирамиды этой плоскостью является многоугольник, параллельный и подобный основанию полной пирамиды.

Отметим, что не всякий многогранник, две грани которого лежат в параллельных плоскостях, а остальные грани – трапеции, будет усеченной пирамидой. Например, на рисунке 53 изображен такой многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отсеченный от многогранника $MNABCD$.

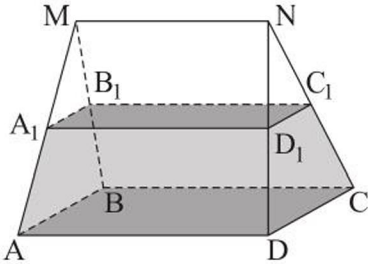


Рисунок 53

З а д а ч а 1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований равны S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$), а боковое ребро наклонено к основанию под углом 45°. Найти площадь диагонального сечения этой пирамиды.

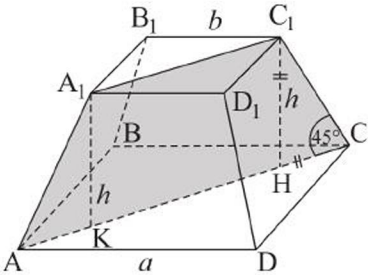


Рисунок 54

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная четырехугольная усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 54). Искомая площадь равна площади равнобедренной трапеции AA_1C_1C.

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot h = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC^2}{2} - \frac{A_1C_1^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(S_1 - S_2).$$

О т в е т. $0{,}5(S_1 - S_2)$.

З а д а ч а 2. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники. Сторона нижнего основания равна 2 м, одно из ее боковых ребер – 1,5 м, а сторона верхнего основания и каждое из остальных ее боковых ребер – 1 м. Найти двугранный угол пирамиды при стороне основания, противолежащей большему боковому ребру, и изобразить высоту пирамиды, из которой получена данная усеченная пирамида.

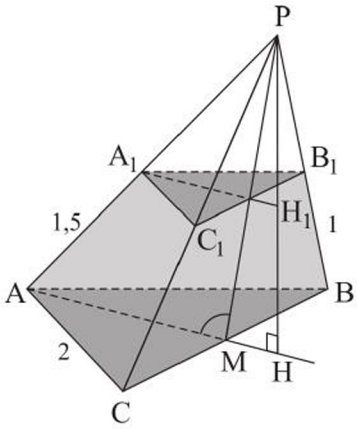


Рисунок 55

Р е ш е н и е. Пусть в усеченной пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ $AB = BC = AC = 2$ м, $AA_1 = 1{,}5$ м, $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1 = BB_1 = CC_1 = 1$ м. Достроим ее до пирамиды $PABC$ (рисунок 55).

Из условия задачи следует, что $\Delta PBC \sim \Delta PB_1C_1$ и $\Delta PAC \sim \Delta PA_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным 2, следовательно, $PB_1 = PC_1 = 1$ м, $PA_1 = 1{,}5$ м.

Значит, $\Delta PBC = \Delta ABC$ и равны их высоты: $PM = AM = \sqrt{3}$ м.

Из ΔAPM найдем: $\cos\angle PMA = \dfrac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 3^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\angle PMA = 120°$, а основание высоты PH пирамиды лежит на продолжении медианы AM.

О т в е т. 120°.

ВОПРОСЫ

1. Что называется усеченной пирамидой?
2. Какая усеченная пирамида называется правильной?
3. Что такое апофема правильной усеченной пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

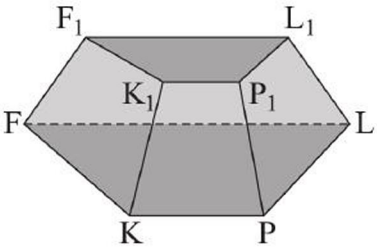


Рисунок 56

Уровень А

66. Объясните, почему не является усеченной пирамидой многогранник, изображенный на рисунке 56.

67. а) Верно ли, что число ребер любой n-угольной усеченной пирамиды делится на $3n$?

б) Может ли высота усеченной пирамиды быть равной одному из ее боковых ребер?

в) Могут ли боковые ребра усеченной пирамиды быть равными, если ее основаниями являются ромбы, но не квадраты?

68. а) Постройте треугольную усеченную пирамиду, площади оснований которой относятся как 1 : 4. б) В пирамиде через точку M ее высоты PO проведено сечение, параллельное основанию, площадь которого вдвое меньше площади основания. В каком отношении точка M делит высоту PO?

69. Верно ли, что если основаниями усеченной пирамиды являются прямоугольники и одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, то все ее боковые грани – прямоугольные трапеции? Ответ объясните.

70. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 8 см и 4 см, а угол между ее боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите: а) высоту этой усеченной пирамиды; б) площадь ее диагонального сечения.

71. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 8 см и 16 см, а ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту этой усеченной пирамиды.

72. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 5 см и 11 см, а ее высота – 13 см. Найдите апофему данной усеченной пирамиды.

Уровень В

73. Площадь основания пирамиды равна 512 см^2, а ее высота 16 см. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, площадь которого равна 50 см^2?

74. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды относятся как 1 : 2, а ее высота равна 6 см. Найдите площади оснований этой пирамиды, если угол между ее боковой гранью и плоскостью основания равен 45°.

75. Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды – равные прямоугольные трапеции с острым углом 45° и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен 120°.

Найдите тангенс угла наклона третьей боковой грани этой пирамиды к ее основанию.

76. Один из барханов имеет форму правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны основания которой равны 50 м и 2 м, а площадь боковой грани 988 м^2. Найдите с точностью до 1 м высоту бархана.

Поющий бархан, Национальный парк «Алтын-Эмель», Алматинская область

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

77. Сколько граней, ребер, вершин имеет: а) пятиугольная призма; б) шестиугольная пирамида? Изобразите такие многогранники.

78. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно 4 см. Найдите: а) площадь полной поверхности этой призмы; б) расстояние от ее вершины B_1 до центра окружности, вписанной в ΔABC.

79. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб, в котором $\angle BAD = 60°$. Высота призмы равна 8 см. Расстояние от вершины B_1 до прямой AC равно 10 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

80. В наклонном параллелепипеде четыре грани являются квадратами со сторонами 8 см, а его боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

81. Каждый плоский угол при вершине P правильной пирамиды $PABCD$ равен 60°. Найдите: а) угол APC; б) апофему пирамиды, если $AB = 4$ см.

82. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит ее высоту в отношении 2 : 3 (считая от вершины). Найдите площадь сечения, если известно, что оно меньше площади основания на 84 см^2.

83. Найдите площади диагональных сечений пирамиды, основание которой – квадрат со стороной 8 см, если две соседние боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости ее основания, а каждая из остальных наклонена к нему под углом 30°.

84. В правильной усеченной шестиугольной пирамиде стороны оснований равны 8 см и 6 см, а ее высота 9 см. Найдите наибольшую площадь диагонального сечения этой усеченной пирамиды.

5. Площадь поверхности пирамиды

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулы площадей боковой и полной поверхностей пирамиды;
- уметь применять эти формулы при решении задач;
- знать свойства площадей поверхностей равных и подобных многогранников.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней, а площадью *боковой поверхности* – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь $S_{п.п.}$ полной поверхности пирамиды выражается через площадь $S_{бок.}$ боковой поверхности и площадь $S_{осн.}$ основания пирамиды формулой: $\boldsymbol{S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.}}$

Теорема. **Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему.**

Доказательство. Пусть сторона основания правильной пирамиды равна a, число сторон основания n, а ее апофема l. Тогда площадь боковой поверхности пирамиды равна $(0{,}5a \cdot l) \cdot n = p \cdot l$, где p – полупериметр основания, то есть $\boldsymbol{S_{бок} = p \cdot l}$.

Если проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является центр вписанной в него окружности, то все ее боковые грани образуют с основанием равные углы. Тогда *площадь боковой поверхности такой пирамиды равна частному площади ее основания и косинуса указанного двугранного угла*. Например, на рисунке 57 $\boldsymbol{S_{бок.}} = \dfrac{\boldsymbol{S_{осн.}}}{\cos\angle SKO}$.

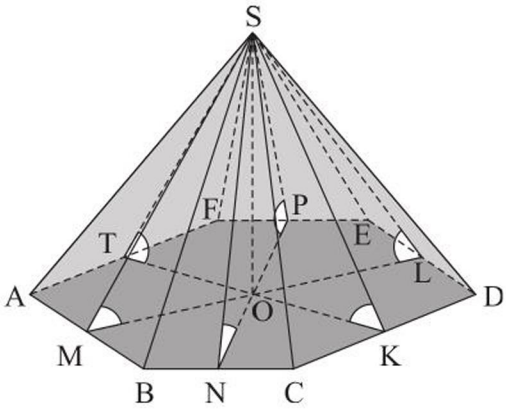


Рисунок 57

З а д а ч а 1. Основание пирамиды $PABCD$ – ромб с диагоналями 12 см и 16 см, пересекающимися в точке O, PO – высота пирамиды, причем $PO = 2$ см (рисунок 58). Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Р е ш е н и е. 1) $S_{осн.} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ (см^2).

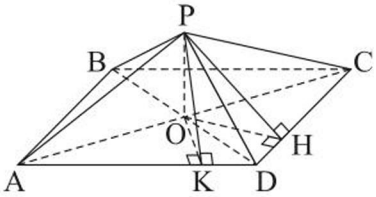


Рисунок 58

2) В прямоугольном ΔDOC катеты равны 6 см и 8 см, следовательно, гипотенуза $DC = 10$ см, $OH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).

3) Так как $\Delta AOD = \Delta COD$, то $OK = OH$. Значит, $PK = PH$, то есть высоты в боковых гранях равны. Поэтому $S_{бок} = p \cdot PH$, где p – полупериметр основания.

4) В ΔPOH гипотенуза $PH = \sqrt{2^2 + 4{,}8^2} = 5{,}2$ (см). $S_{бок} = 20 \cdot 5{,}2 = 104$ (см^2).

5) Искомая площадь $S_{п.п.} = 96 + 104 = 200$ (см^2).

О т в е т. 200 см^2.

З а д а ч а 2. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13 м, 14 м и 15 м, все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть дана пирамида $PABC$, в которой $AB = 13$ м, $AC = 14$ м, $BC = 15$ м, PO – высота пирамиды, отрезки PH, PK, PL – высоты в ее боковых гранях (рисунок 59). Так как $\angle OHP = \angle OKP = \angle OLP = 45°$, то точка O – центр окружности, вписанной в ΔABC. Поэтому площадь боковой поверхности данной пирамиды равна: $S_{бок.} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos 45°}$. Используя формулу Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр ΔABC, a, b, c – его стороны, найдем $S_{\Delta ABC} = 84$ (м^2). Тогда $S_{бок} = 84\sqrt{2}$ (м^2).

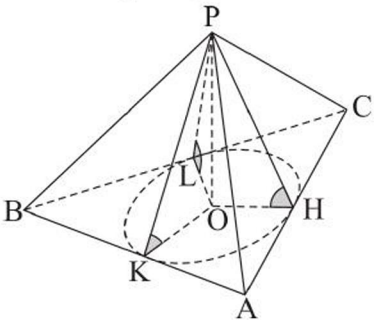


Рисунок 59

О т в е т. $84\sqrt{2}$ (м^2).

З а д а ч а 3. Основание тетраэдра – прямоугольный равнобедренный треугольник, все его боковые грани равновелики и каждое боковое ребро равно 1 дм. Найти площадь боковой поверхности тетраэдра.

Р е ш е н и е. Пусть в данном тетраэдре $DABC$ треугольник ABC – основание, $AC = BC = a$ дм, $AB = a\sqrt{2}$ дм, $DA = DB = DC = 1$ дм (рисунок 60).

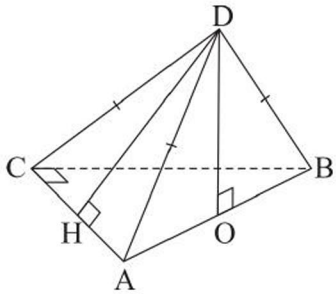


Рисунок 60

Тогда середина O гипотенузы AB является основанием высоты DO этого тетраэдра (по свойству равных наклонных и их проекций). Учитывая, что $S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC}$, то есть $\frac{1}{2}AB \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot DH$, получим уравнение $a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Решим это уравнение, разделив его левую и правую части на a и возведя их в квадрат $\frac{2(4-2a^2)}{4} = \frac{4-a^2}{4}$, $3a^2 = 4$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Тогда искомая площадь равна: $3 \cdot S_{\Delta ADC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \times$ $\times \sqrt{1-\frac{4}{12}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}$ (дм^2).

Ответ. $\sqrt{2}$ дм^2.

Отметим, что понятия преобразования, равенства и подобия фигур в пространстве определяются аналогично, как и в планиметрии. *Преобразование, при котором сохраняется неизменным расстояние между каждыми двумя точками A и B фигуры F и поставленными им в соответствие точками A_1 и B_1 фигуры F_1, называется движением* (или перемещением). **Две фигуры называются равными, если они совмещаются движением**. Например, при перемещении в определенном направлении на данное расстояние, т. е. при преобразовании, называемом параллельным переносом, куб отображается на равный ему куб (рисунок 61).

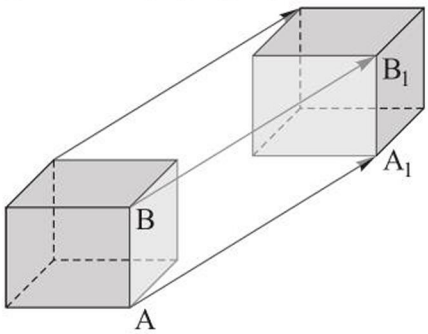


Рисунок 61

Преобразование, при котором для каждых двух точек A и B фигуры F и соответствующих им точек A_1 и B_1 фигуры F_1 выполняется равенство

$A_1B_1 = k \cdot AB$, *где* $k > 0$, *называется преобразованием подобия*. При этом положительное число k называется *коэффициентом подобия*. **Две фигуры называются подобными, если они могут быть получены одна из другой преобразованием подобия**. Например, на рисунке 62 изображены подобные тетраэдры $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$.

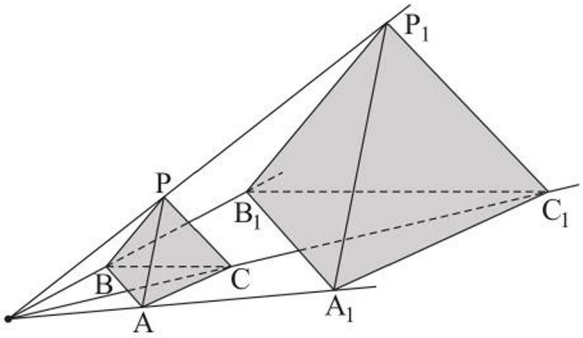


Рисунок 62

Площади поверхностей равных многогранников равны, а отношение площадей поверхностей подобных многогранников равно квадрату их коэффициента подобия.

ВОПРОСЫ

1. Что называется площадью полной поверхности и площадью боковой поверхности пирамиды?

2. По каким формулам можно найти площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

85. а) Найдите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна 48 см^2, а сторона основания 8 см.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 10 см и плоским углом при ее вершине 60°.

86. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см. Какую длину имеет высота этой пирамиды, если площадь ее полной поверхности равна 96 см^2?

87. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10 см, а ее апофема 8 см. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

88. Высота пирамиды равна 4 м и совпадает с одним из боковых ребер. Найдите площадь ее полной поверхности, если основанием пирамиды является:

а) квадрат со стороной 3 м;

б) равносторонний треугольник со стороной $2\sqrt{3}$ м.

89. а) Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 12 см и 5 см, а проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является точка пересечения его диагоналей. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды, если ее высота равна 8 см.

б) Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см, а угол между боковой гранью и плоскостью основания 45°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

90. а) Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота приближенно равна 137 м. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды (ответ округлите до сотен м^2).

Пирамида Хеопса, Египет

Дворец Мира и Согласия, г. Нур-Султан

б) Дворец Мира и Согласия в г. Нур-Султане имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, высота и сторона основания которой равны 62 м. Найдите с точностью до 1 м^2 площадь боковой поверхности этой пирамиды.

91. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь ее боковой поверхности, если известен угол в 60° между плоскостью основания пирамиды и:

а) боковой гранью; б) боковым ребром.

92. Основание пирамиды – ромб с углом 45°. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если радиус вписанной в ромб окружности равен $\sqrt{2}$ дм.

93. а) Найдите двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью боковой грани правильной пирамиды, площадь основания которой равна $25\sqrt{2}$ см^2, а площадь боковой поверхности 50 см^2.

б) Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна $2\sqrt{3}$ дм, а угол между плоскостями боковой грани и основания 30°.

94. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4 см, а сторона основания – $2\sqrt{3}$ см. Сравните площади боковых поверхностей этой пирамиды и пирамиды с такими же основанием и высотой, если высота совпадает с одним из ее боковых ребер.

95. Изготовьте модель правильной треугольной пирамиды и найдите площадь ее поверхности.

Уровень В

96. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды равна $112\sqrt{3}$ см^2, а площадь ее боковой поверхности $96\sqrt{3}$ см^2. Найдите с точностью до 0,1 см высоту этой пирамиды.

97. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 3$ м, $BC = 6$ м, $BB_1 = 12$ м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды B_1ABC.

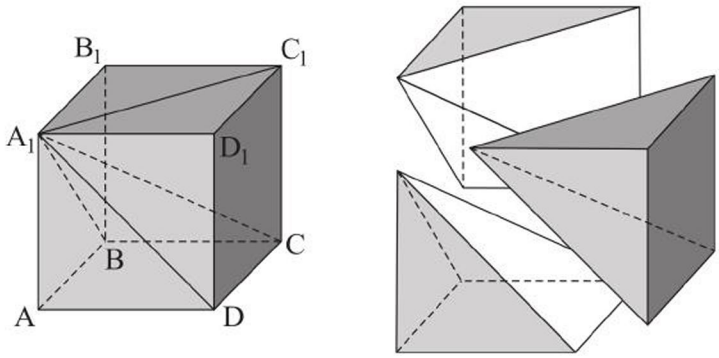


Рисунок 63

98. Деревянный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 дм, распилили на три пирамиды A_1ABCD, $A_1BCC_1B_1$, $A_1DCC_1D_1$ (рисунок 63).

Объясните, почему эти пирамиды равны и найдите площади их полных поверхностей.

99. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является:

а) прямоугольный треугольник, площадь которого равна 32 см^2;

б) правильный треугольник, площадь которого равна $2\sqrt{3}$ дм^2.

100. а) Основанием пирамиды $PABC$ является ΔABC, в котором $AB = 21$ см, $BC = 8$ см, $AC = 15$ см. Известно, что $PA \perp (ABC)$, $PA = 3{,}5\sqrt{5}$ см. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

б) Высотой пирамиды $PABC$ является отрезок PA, равный 5 дм. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды, если $AB = 13$ дм, $BC = 14$ дм, $AC = 15$ дм.

6. Площадь поверхности усеченной пирамиды

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей усеченной пирамиды;

• уметь применять эти формулы при решении задач;

• знать понятие симметрии относительно плоскости.

Площадью полной поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей всех ее граней, а площадью *боковой поверхности* усеченной пирамиды – сумма площадей всех ее боковых граней. Площадь $S_{п.п.}$ полной поверхности пирамиды выражается через площадь $S_{бок.}$ боковой поверхности и площади S_1 и S_2 ее оснований формулой: $\boldsymbol{S_{п.п.} = S_{бок.} + S_1 + S_2}$.

Т е о р е м а. **Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.**

$$\boldsymbol{S_{бок.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l}.$$

Доказательство проведите самостоятельно.

За д а ч а. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 12 м и 6 м, а ее высота – 1 м.

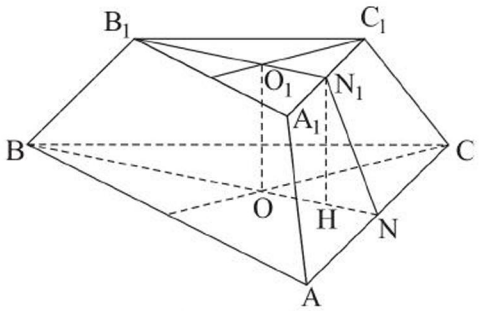


Рисунок 64

Р е ш е н и е. Пусть дана правильная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AB = 12$ м, $A_1B_1 = 6$ м, высота $N_1H = 1$ м, апофема N_1N (рисунок 64). Искомую площадь определим, используя формулу $S_{бок.} = \frac{3 \cdot AB + 3 \cdot A_1B_1}{2} \cdot N_1N$.

Апофему N_1N найдем из прямоугольного ΔN_1HN. В нем $HN = ON - O_1N_1 = \frac{12\sqrt{3}}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ (м), тогда $N_1N = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ (м).

$S_{бок} = \frac{1}{2}(36 + 18) \cdot 2 = 54$ (м^2).

Ответ. 54 м^2.

Отметим, что одним из важных свойств, которыми может обладать фигура, является ее симметричность. Понятия центральной и осевой симметрий, центрально-симметричных и осесимметричных фигур были рассмотрены в планиметрии. Определения этих понятий сохраняются и в стереометрии.

В пространстве, кроме этих видов симметрии, рассматривается симметрия относительно плоскости. *Две точки C и C_1 называются симметричными относительно плоскости α (плоскости симметрии), если отрезок CC_1 перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам* (рисунок 65, *а*).

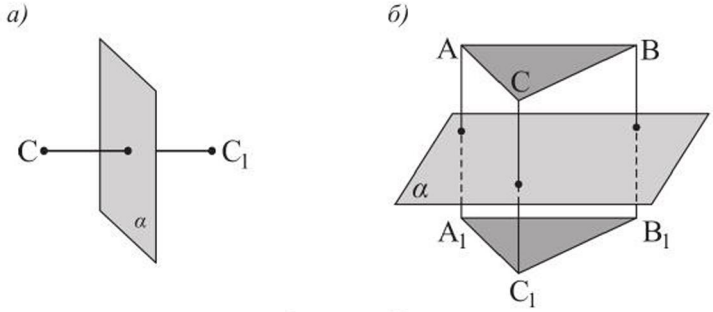


Рисунок 65

Две фигуры F и F_1 называются симметричными относительно плоскости α, если для каждой точки фигуры F существует симметричная ей точка фигуры F_1 относительно плоскости α и наоборот. При этом каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости. Например, на рисунке 65, *б* треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно плоскости α.

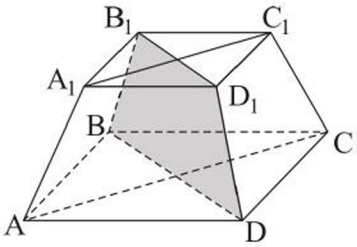


Рисунок 66

Фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой плоскости. Эта плоскость называется плоскостью симметрии данной фигуры, а сама фигура – *симметричной относительно этой плоскости*. Симметрию относительно плоскости называют также зеркальной симметрией. Например, плоскость, содержащая диагональное сечение правильной четырехугольной усеченной

пирамиды, является плоскостью ее симметрии (рисунок 66). Эта плоскость делит ее на две равные фигуры, площади полных поверхностей которых равны.

Симметрию можно наблюдать в природе, она широко используется в практической деятельности людей.

ВОПРОСЫ

1. Что называется площадью полной поверхности и площадью боковой поверхности усеченной пирамиды?

2. По какой формуле можно найти площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

101. В правильной усеченной пирамиде стороны оснований равны 4 см и 6 см, ее апофема – $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности этой усеченной пирамиды, если ее основания:
а) четырехугольники; б) треугольники.

102. Найдите площадь полной поверхности правильной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 8 см и 6 см, если она:
а) четырехугольная и ее высота 7 см;
б) шестиугольная и ее высота $2\sqrt{6}$ см.

103. Найдите площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, стороны оснований которой равны 12 см и 18 см, если она:
а) треугольная и ее высота $3\sqrt{21}$ см;
б) четырехугольная и угол в ее боковой грани 60°.

104. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 15 дм и 5 дм, а площадь диагонального сечения – $40\sqrt{3}$ дм^2. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

105. а) В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны $4\sqrt{3}$ см и $10\sqrt{3}$ см. Найдите площадь ее боковой поверхности, если острый двугранный угол при ребре основания 60°.
б) Диагонали оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 12 см и 4 см, а двугранный угол при ребре нижнего основания – 45°. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды.

106. Стороны оснований и высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $10:4:4$, а площадь ее боковой поверхности равна $280\,см^2$. Найдите площади оснований этой пирамиды.

107. Площадь основания правильной треугольной пирамиды $16\sqrt{3}\,см^2$, ее апофема равна $10\,см$. Через середину высоты пирамиды построено сечение плоскостью, параллельной основанию. Найдите площадь полной поверхности получившейся при этом усеченной пирамиды.

108. Апофема правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна $5\,см$, а средняя линия боковой грани – $9\,см$. Синус двугранного угла при ребре нижнего основания равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь полной поверхности этой усеченной пирамиды.

109. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $4\,дм$, а боковое ребро – $3\,дм$. Установите, что многогранник $ABCMB_1N$, где точки M и N – середины отрезков A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, является усеченной пирамидой и найдите площадь ее боковой поверхности.

Уровень В

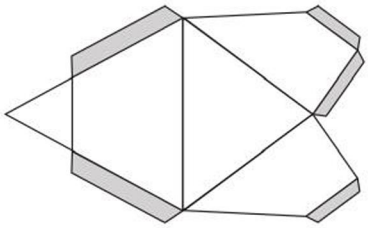


Рисунок 67

110. а) Отрезок B_1B, равный $9\,см$, является высотой треугольной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$. Известны стороны нижнего основания $AB = BC = 10\,см$, $AC = 12\,см$. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды, если отношение площадей ее верхнего и нижнего оснований равно $\frac{4}{25}$.

б) Изготовьте модель усеченной пирамиды, данной в задаче а). На рисунке 67 показана уменьшенная развертка этой усеченной пирамиды с клапанами для склеивания.

111. Верно ли, что если двугранные углы при боковых ребрах треугольной усеченной пирамиды равны, то площадь ее боковой поверхности равна половине произведения суммы периметров ее оснований на высоту любой боковой грани?

112. Проекцией вершины треугольной пирамиды является центр окружности, вписанной в ее основание, стороны которого равны 20 см, 16 см и 12 см. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, отделило от нее усеченную пирамиду, площади оснований которой относятся как 9 : 16. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, если ее высота равна $4\sqrt{3}$ см.

113. Каждое боковое ребро правильной шестиугольной усеченной пирамиды равно $\sqrt{2}$ дм и наклонено к плоскости нижнего основания под углом 45°. Какова площадь ее боковой поверхности, если отношение площадей оснований усеченной пирамиды равно 4?

114. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды относятся как 1 : 2, ее высота равна $2\sqrt{3}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости нижнего основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

115. Боковые грани треугольной усеченной пирамиды – равнобедренные трапеции, сумма оснований каждой из которых равна 12 см. Высота каждой трапеции равна 4 см, а прямые, содержащие их боковые стороны, пересекаются под прямым углом. Найдите площадь боковой поверхности этой усеченной пирамиды.

7. Правильные многогранники

Учебные достижения по изучению темы:

• знать определение правильного многогранника;

• уметь распознавать виды правильных многогранников.

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

Теорема. **Существует пять различных видов правильных многогранников.**

Доказательство. Используем свойство суммы плоских углов при вершине выпуклого многогранника. Пусть из одной вершины исходит n ребер ($n \geq 3$), тогда плоских углов при этой вершине тоже n, причем все они равны между собой. Пусть один из плоских углов равен $x°$, тогда сумма всех плоских углов при этой вершине равна $nx°$. По свойству суммы плоских углов $nx° < 360°$.

1) Пусть грани правильного многогранника правильные треугольники. Тогда в одной вершине их может сходиться 3, 4 и 5, так как $60° \cdot 3 < 360°$, $60° \cdot 4 < 360°$, $60° \cdot 5 < 360°$, но уже $60° \cdot 6 = 360°$. Соответствующие правильные многогранники – правильный *тетраэдр* (четырехгранник), правильный *октаэдр* (восьмигранник), правильный *икосаэдр* (двадцатигранник) (рисунок 68 *а*, *б*, *в*). Следовательно, существует только три вида правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники.

а) *б)* *в)*

Рисунок 68

2) Пусть грани правильного многогранника – квадраты. В одной вершине их может сходиться только 3, так как $90° \cdot 3 < 360°$, но уже $90° \cdot 4 = 360°$. Соответствующий правильный многогранник – хорошо известный всем куб, он же правильный *гексаэдр* (шестигранник) (рисунок 69, *а*). Сле-

довательно, существует только один правильный многогранник, гранями которого являются квадраты.

Рисунок 69

3) Пусть грани правильного многогранника – правильные пятиугольники. В одной вершине их может сходиться только 3, так как $108° \cdot 3 < 360°$, но уже $108° \cdot 4 > 360°$. Соответствующий правильный многогранник – правильный *додекаэдр* (двенадцатигранник) (рисунок 69, *б*). Следовательно, существует только один правильный многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники. Шестиугольными, семиугольными и более грани правильного многогранника не могут быть, так как уже даже $120° \cdot 3 = 360°$. Итак, существует только пять различных видов правильных многогранников. Теорема доказана.

В следующей таблице указано число граней (Г), вершин (В) и ребер (Р) каждого правильного многогранника.

Виды правильного многогранника	**Г**	**В**	**Р**
Правильный тетраэдр	4	4	6
Правильный гексаэдр	6	8	12
Правильный октаэдр	8	6	12
Правильный додекаэдр	12	20	30
Правильный икосаэдр	20	12	30

Отметим, что для любого правильного многогранника, как и для любого выпуклого многогранника, выполняется равенство **Г + В − Р = 2**. Это замечательное свойство выпуклых многогранников называют *эйлеровой характеристикой* в честь открывшего его выдающегося швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783).

В каждом из правильных многогранников имеется единственная точка, равноудаленная как от его граней, так и от вершин, которая называется **центром** правильного многогранника.

З а д а ч а 1. Найти площади диагональных сечений правильного октаэдра, ребро которого равно a.

Р е ш е н и е. Пусть дан правильный октаэдр $EABCDF$ (рисунок 70). Докажем, что диагональные сечения $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ октаэдра являются квадратами.

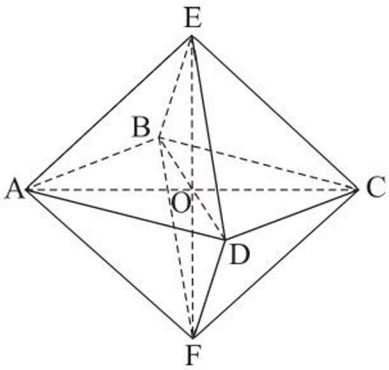


Рисунок 70

1) В равных равнобедренных треугольниках AEF, BEF, CEF, DEF медианы AO, BO, CO, DO равны и являются высотами. Следовательно, прямые AO, BO, CO, DO перпендикулярны прямой EF. Так как через точку O можно провести только одну плоскость, перпендикулярную прямой EF, то точки A, B, C, D лежат в одной плоскости и четырехугольник $ABCD$ – квадрат.

2) Аналогично рассматривая треугольники BDA, BDE, BDC, BDF, устанавливаем, что четырехугольник $AECF$ – квадрат, а рассматривая треугольники ABC, AEC, ADC, AFC, устанавливаем, что четырехугольник $BEDF$ – квадрат.

3) Рассмотренные квадраты равны, поэтому площадь каждого диагонального сечения данного правильного октаэдра равна a^2.

О т в е т. a^2.

З а д а ч а 2. Найти с точностью до 1 см^2 площадь полной поверхности правильного додекаэдра, ребро которого равно 3 см.

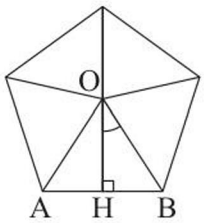


Рисунок 71

Р е ш е н и е. У правильного додекаэдра 12 граней, которые являются равными правильными пятиугольниками. Чтобы найти площадь одного такого пятиугольника, можно разбить его на пять равных треугольников, соединив его вершины с центром O пятиугольника (рисунок 71). Тогда $\angle AOB = 72°$, высота $OH = \frac{3}{2 \cdot \operatorname{tg} 36°}$, а площадь S_1 пятиугольника равна $S_1 = \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot \operatorname{tg} 36°}$. Искомая площадь равна $S = 12 \cdot S_1 = \frac{135}{\operatorname{tg} 36°} \approx \frac{135}{0{,}727} \approx 186$ (см^2).

О т в е т. ≈ 186 см^2.

ВОПРОСЫ

1. Что называется правильным многогранником?

2. Сколько всего видов правильных многогранников существует? Как они называются?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

116. Верно ли, что правильным многогранником является многогранник, в котором все грани:

а) равны; б) правильные многоугольники?

117. Изобразите многогранник, составленный из двух равных правильных тетраэдров. Объясните, почему он не является правильным многогранником.

118. Является ли правильным гексаэдром прямоугольный параллелепипед, если:

а) его диагональное сечение – квадрат;

б) в нем равны диагонали трех граней, выходящие из одной вершины?

119. Чему равна сумма плоских углов при каждой вершине правильного:

а) тетраэдра; б) гексаэдра; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра?

120. Можно ли из куска проволоки длиной 1 м изготовить каркасную модель:

а) куба с ребром 1 дм;

б) правильного тетраэдра с ребром 1,5 дм;

в) правильного октаэдра с ребром 0,5 дм?

121. Верно ли, что если в кубе провести диагонали граней, как показано на рисунке 72, то полученный тетраэдр будет правильным? Ответ объясните.

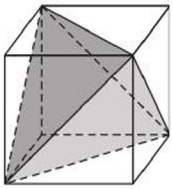


Рисунок 72

122. Из деревянного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выпилена пирамида D_1AB_1C. Найдите отношение площадей полных поверхностей этих куба и пирамиды.

123. В правильном многограннике 8 граней. Найдите:

а) угол между двумя его ребрами, выходящими из одной вершины;

б) косинус двугранного угла при его ребре.

124. Дан правильный многогранник, ребро которого 6 см. Найдите расстояние между центрами двух его соседних граней, если этот многогранник: а) тетраэдр; б) октаэдр.

125. Найдите отношение площадей полных поверхностей правильных тетраэдра и октаэдра, ребро каждого из которых равно a.

126. а) Является ли правильным тетраэдром правильная треугольная пирамида, площадь основания которой равна $\sqrt{3}$ дм^2, а ее апофема $\sqrt{3}$ дм? б) Дана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна $\sqrt{1{,}5}$ дм. Какую длину должна иметь ее высота, чтобы эта пирамида была правильным тетраэдром?

127. Какова площадь полной поверхности правильного тетраэдра, высота которого равна $\sqrt{6}$ м?

128. а) Площадь полной поверхности правильного додекаэдра равна $\frac{135}{\operatorname{tg} 36^\circ}$ см^2. Найдите длину его ребра.

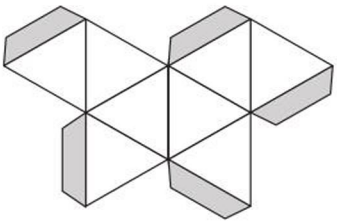


Рисунок 73

б) Найдите длину ребра правильного икосаэдра, площадь полной поверхности которого равна $80\sqrt{3}$ см^2.

129. Изготовьте модель правильного октаэдра, ребро которого равно 8 см. На рисунке 73 показана развертка октаэдра с клапанами для склеивания.

Уровень В

130. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра $PABC$, если расстояние между его ребрами AP и BC равно 1 м.

131. Центры граней правильного тетраэдра являются вершинами нового тетраэдра. Найдите отношение площадей полных поверхностей этих тетраэдров.

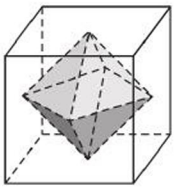


Рисунок 74

132. а) Верно ли, что если в кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек будут вершинами правильного октаэдра (рисунок 74)? Ответ объясните.
б) Найдите площадь полной поверхности многогранника, изображенного внутри куба на рисунке 74, если его вершины являются центрами граней куба, а ребро куба равно 4 дм.

133. От правильного октаэдра $PABCDF$, ребро которого равно 8 см, отрезали две равные правильные пирамиды с вершинами P и F, боковые ребра которых равны 4 см. Найдите площадь полной поверхности получившегося многогранника.

134. Найдите в Интернете развертки правильных додекаэдра и икосаэдра и изготовьте их модели.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

135. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 14,76 м^2, а площадь ее полной поверхности равна 18 м^2. Чему равна апофема этой пирамиды?

136. Плоскость боковой грани правильной треугольной пирамиды составляет угол 60° с основанием. Радиус окружности, описанной около основания, равен 2 дм. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

137. Основание пирамиды – квадрат со стороной 20 дм, а одна из вершин квадрата является основанием высоты пирамиды. Известно, что высота пирамиды равна 15 дм. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

138. Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник со сторонами AC = 13 м, AB = 15 м, BC = 14 м. Боковое ребро DA перпендикулярно плоскости основания и равно 9 м. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

139. Основание пирамиды – ромб, диагонали которого равны 6 м и 8 м. Основанием высоты пирамиды, равной 1 м, является точка пересечения диагоналей ромба. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

140. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 8 дм и 2 дм, а ее высота равна 4 дм. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.

141. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 10 м и 9 м, а ее высота равна 0,5 м. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

142. а) Докажите, что если все плоские углы тетраэдра равны, то он является правильным.

б) Является ли октаэдр правильным, если все его ребра равны?

143. Найдите длину диагонали правильного октаэдра, ребро которого равно 8 см.

144. Сравните площади полных поверхностей куба, правильного октаэдра и правильного икосаэдра, ребро каждого из которых равно 4 см.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Различные виды многогранников и их свойства исследовались учеными на протяжении многих столетий. Теорией правильных многогранников занимались древнегреческие математики, учение о них имелось в XIII книге «Начал» Евклида и считалось «венцом» геометрии. Правильные многогранники называли «идеальными фигурами».

В Древней Греции первоосновой бытия считались четыре стихии: земля, вода, воздух и огонь. Пифагорейцы придавали им форму правильных тетраэдра, октаэдра, гексаэдра и икосаэдра соответственно. Древнегреческий философ Платон (429–348 гг. до н. э.) всему миру в целом придавал форму правильного додекаэдра.

Используя интернет-ресурсы, узнайте:

а) как называли многогранник древнегреческие математики и что в буквальном смысле означало это слово;

б) сведения о невыпуклых правильных многогранниках, изображения которых даны на рисунке 75;

в) имеются ли здания или архитектурные сооружения в форме наклонного параллелепипеда, правильного многогранника.

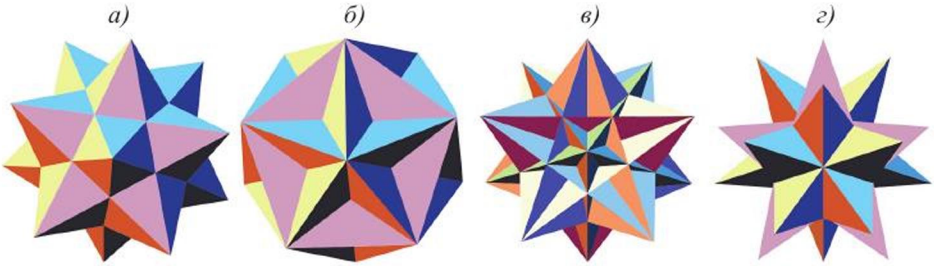


Рисунок 75

II. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятия тела вращения и его развертки;
- понятия: сечения цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара плоскостью;
- определения: цилиндра, конуса, усеченного конуса, сферы, шара и их элементов;
- формулы площадей поверхностей: цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.

уметь

- изображать на плоскости: цилиндр, конус, усеченный конус, сферу, шар и их элементы;
- изображать: сечения цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара плоскостью;
- строить развертки: цилиндра, конуса, усеченного конуса;
- решать задачи на нахождение элементов тел вращения (цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара);
- применять формулы площадей поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара при решении задач.

8. Цилиндр и его элементы. Сечение цилиндра плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения тела вращения, цилиндра и его элементов;
- уметь изображать цилиндр и его сечение плоскостью;
- уметь решать задачи на нахождение элементов цилиндра.

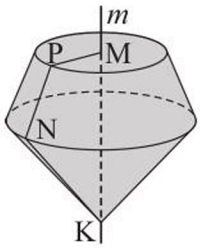


Рисунок 76

Телом вращения называется тело, образованное вращением плоской фигуры вокруг прямой. Эта прямая называется *осью вращения*. Например, при вращении четырехугольника *MPNK* вокруг оси *m* получится тело вращения, изображенное на рисунке 76.

Цилиндром называется тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны. Например, на рисунке 77 дано изображение цилиндра, полученного вращением прямоугольника *ABCD* вокруг его стороны *CD*. При этом его стороны *CB* и *DA* описывают равные круги, лежащие в параллельных плоскостях. Эти круги – **основания** цилиндра. Прямая, содержащая ось вращения (или отрезок, соединяющий центры оснований цилиндра), называется **осью цилиндра**. Сторона *AB*, параллельная оси *CD* цилиндра, описывает поверхность, которая называется **боковой поверхностью** цилиндра.

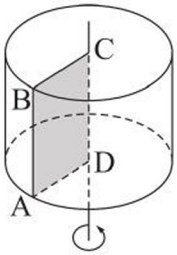


Рисунок 77

Фигура, состоящая из оснований и боковой поверхности цилиндра, называется **полной поверхностью цилиндра**. Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к другому основанию, называется **высотой** цилиндра. Длину этого перпендикуляра также называют высотой цилиндра. Высота цилиндра равна расстоянию между плоскостями его оснований. Отрезок *AB* и каждый отрезок, лежащий на боковой поверхности и параллельный оси *CD*, – **образующие** цилиндра.

Сечение цилиндра, перпендикулярное его оси, является кругом, равным основанию цилиндра (рисунок 78, *а*). Это следует из того, что любая точка *M* образующей *AB* цилиндра удалена от его оси на расстояние, равное радиусу основания цилиндра.

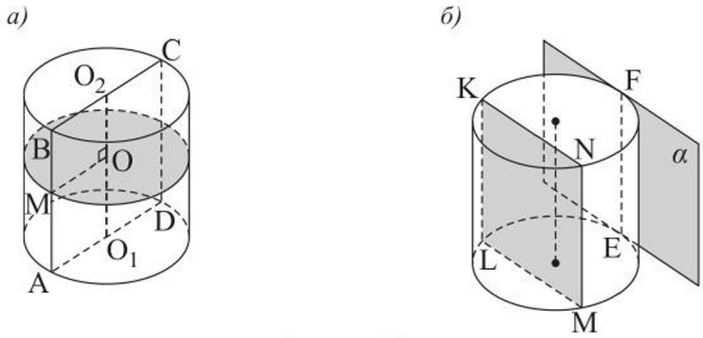


Рисунок 78

Сечением цилиндра, перпендикулярным его основанию, является прямоугольник (например, $ABCD$ или $MNKL$ на рисунках 78, *а*, *б*). Обоснуйте это самостоятельно. Сечение цилиндра, перпендикулярное основанию и проходящее через его центр, называется **осевым сечением** (например, прямоугольник $ABCD$ на рисунке 78, *а*). Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, называется **равносторонним цилиндром**.

Плоскость, содержащая образующую цилиндра и не имеющая с ним других общих точек, называется *плоскостью, касательной к цилиндру* (плоскость α на рисунке 78, *б*).

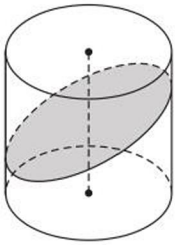


Рисунок 79

Сечение боковой поверхности цилиндра, не параллельное его основанию, является эллипсом (рисунок 79). Например, в наклоненном стакане цилиндрической формы с водой поверхность воды образует фигуру, граница которой – эллипс.

З а д а ч а. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус его основания – 5 см. Построено сечение, параллельное оси цилиндра, являющееся квадратом. Найти расстояние между осью цилиндра и плоскостью этого сечения.

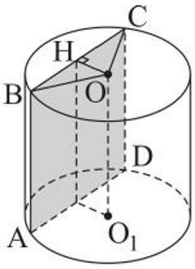


Рисунок 80

Р е ш е н и е. Пусть квадрат $ABCD$ – данное сечение, а прямая OO_1 – ось цилиндра (рисунок 80). Тогда высота OH треугольника OBC – искомое расстояние, так как это расстояние между прямой OO_1 и параллельной ей плоскостью $ABCD$. По условию $AB = BC = 8$ см, следовательно, $BH = HC = 4$ см, а $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

О т в е т. 3 см.

ВОПРОСЫ

1. Что называется цилиндром?
2. Что называется образующей, основанием, высотой цилиндра?
3. Что называется боковой и полной поверхностями цилиндра?
4. Что называется осевым сечением цилиндра?
5. Какой цилиндр называется равносторонним?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

145. На рисунке 81 укажите четырехугольник, при вращении которого вокруг стороны *AB* получится равносторонний цилиндр:

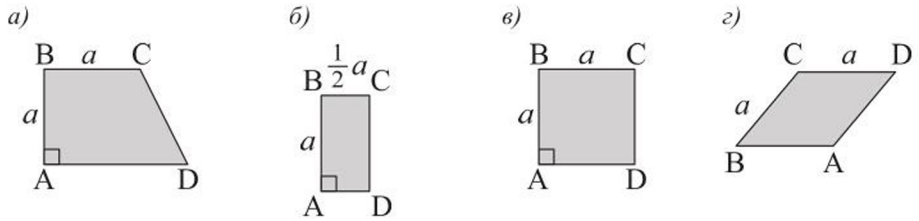


Рисунок 81

146. а) Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра равна $16\sqrt{2}$ см. Чему равен радиус основания цилиндра?

б) Найдите высоту цилиндра, если диагональ его осевого сечения составляет с образующей цилиндра угол 30°, а диаметр его основания равен $4\sqrt{3}$ см.

147. а) Радиус основания цилиндра равен 2,6 см, а образующая – 4,8 см. На каком расстоянии от оси цилиндра находится его сечение – квадрат, параллельное оси?

б) Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является квадратом, площадь которого равна 144 см^2, и удалено от оси на 8 см. Найдите радиус основания цилиндра.

148. а) Высота цилиндра 20 см, а радиус его основания 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной от нее на 1,4 см.

б) Радиус основания цилиндра 7 см. На расстоянии 3 см от оси цилиндра построено сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси. Площадь сечения равна 320 см^2. Найдите высоту цилиндра.

149. Цилиндр получен вращением квадрата около его стороны, равной 15 см. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости его сечения, параллельного ей, площадь которого равна 270 см^2.

Уровень В

150. Радиус основания цилиндра равен 12 см. Найдите расстояние между осевым сечением цилиндра и параллельным ему сечением, площадь которого вдвое меньше.

151. Через две образующие цилиндра проведена плоскость, отсекающая от окружности его основания дугу в 300°. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если его высота равна 1 м, а радиус основания – 1 дм.

152. Образующая цилиндра является общей стороной двух его перпендикулярных сечений, площади которых равны 15 дм^2 и 8 дм^2. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если его высота равна 5 дм.

153. Плоскость пересекает основания цилиндра по хордам, равным 12 см и 16 см, расстояние между которыми равно 18 см. Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 10 см.

9. Развертка, площадь боковой и полной поверхностей цилиндра

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей цилиндра;

• уметь применять эти формулы при решении задач.

Призма называется *вписанной в цилиндр* (а цилиндр – описанным около призмы), если основания призмы вписаны в основания цилиндра. Только прямую призму можно вписать в цилиндр, если ее основание можно вписать в основание цилиндра. Например, на рисунке 82, *а* изображен прямоугольный параллелепипед, вписанный в цилиндр.

Призма называется *описанной около цилиндра* (а цилиндр – вписанным в призму), если основания призмы описаны около оснований цилиндра. Около цилиндра можно описать только прямую призму, основание которой можно описать около основания цилиндра. Например, на рисунке 82, *б* прямая треугольная призма описана около цилиндра.

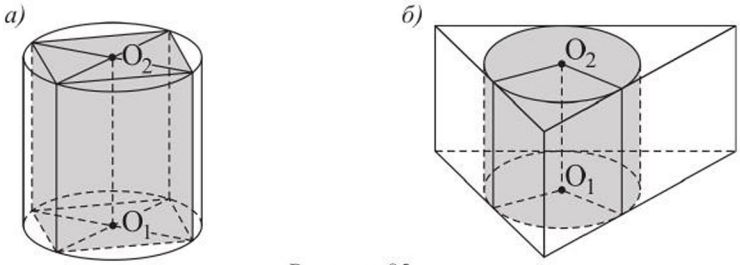


Рисунок 82

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается величина, к которой стремится площадь боковой поверхности правильной призмы, вписанной в цилиндр, при неограниченном увеличении числа сторон ее оснований.

Теорема. **Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на его высоту:**

$$S_{бок.} = 2\pi Rh,$$

где R – радиус основания, h – высота цилиндра.

Доказательство. Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму (рисунок 83). Ее высота равна высоте цилиндра, а площадь боко-

вой поверхности этой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту. Так как основанием призмы является правильный многоугольник, вписанный в окружность, то при неограниченном увеличении числа его сторон периметр многоугольника стремится к длине $2\pi R$ окружности. Тогда площадь боковой поверхности призмы стремится к величине, равной $2\pi Rh$. Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{бок.} = 2\pi Rh$.

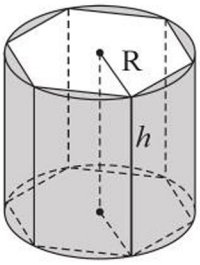


Рисунок 83

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей его оснований и боковой поверхности. **Площадь полной поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на сумму радиуса основания и высоты цилиндра:**

$$S_{п.п.} = 2\pi R(R + h).$$

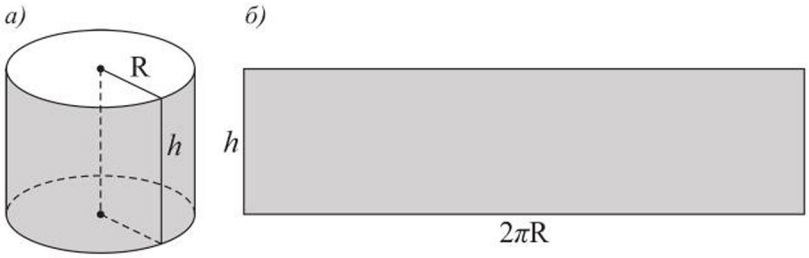


Рисунок 84

Если боковую поверхность цилиндра (рисунок 84, *а*) разрезать по образующей и развернуть ее так, чтобы все образующие лежали в одной плоскости, то получим прямоугольник, который называется *разверткой* боковой поверхности цилиндра (рисунок 84, *б*).

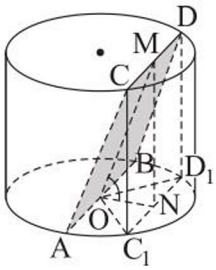


Рисунок 85

З а д а ч а. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра, наклонена к нему под углом 60°. Эта плоскость пересекает верхнее основание цилиндра по хорде, равной 10 см, стягивающей дугу 90°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Р е ш е н и е. Пусть секущая плоскость пересекает основания цилиндра по хордам AB и CD, тогда $AB \parallel CD$ (рисунок 85). Построим хорду $C_1D_1 = CD$ и точки N и M – середины этих хорд, тогда MN – высота цилиндра,

OD_1 – радиус его основания, $\angle MON = 60°$, $\angle C_1OD_1 = 90°$. Из прямоугольных треугольников C_1OD_1 и MON имеем: $ON = ND_1 = 5$ см, $OD_1 = 5\sqrt{2}$ см, $MN = ON \cdot \operatorname{tg} 60° = 5\sqrt{3}$ см. Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{бок.} = 2\pi \cdot OD_1 \cdot MN = 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi\sqrt{6}$ (см^2).

Ответ. $50\pi\sqrt{6}$ см^2.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь поверхности цилиндра?

2. По каким формулам можно найти площади боковой и полной поверхностей цилиндра?

3. Что является разверткой боковой поверхности цилиндра?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

154. Укажите, какой из рисунков 86, *а*, *б*, *в*, *г* является изображением развертки боковой поверхности цилиндра с радиусом основания 3 и образующей 6:

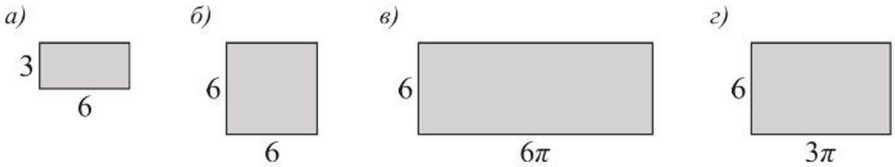


Рисунок 86

155. Существует ли цилиндр, площадь боковой поверхности которого равна сумме площадей его оснований? Ответ объясните.

156. Прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см вращается вокруг: а) его меньшей стороны; б) большей стороны. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

157. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения, равная $10\sqrt{2}$ см, составляет с образующей угол 45°.

158. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, площадь основания которого равна π дм^2, а площадь его осевого сечения – 2 дм^2.

159. Каким должен быть радиус основания равностороннего цилиндра, чтобы площадь его полной поверхности была равной: а) 12π м^2; б) площади поверхности куба с ребром 2 м?

160. Найдите площадь полной поверхности равностороннего цилиндра, если площадь его боковой поверхности равна 16π дм^2.

Уровень В

161. Прямоугольник с размерами $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ дм и $\sqrt{\frac{24}{\pi}}$ дм является разверткой боковой поверхности двух разных цилиндров. Найдите разность площадей их полных поверхностей.

162. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если: а) развертка его боковой поверхности – квадрат со стороной 1 дм; б) в развертке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол, равный 60°, а высота цилиндра равна 2 дм.

163. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, отсекает от окружности основания дугу в 90°. Диагональ сечения вдвое больше радиуса цилиндра, равного 4 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

164. Хватит ли 9 м^2 жести для изготовления 20 ведер формы равностороннего цилиндра высотой 30 см, если на швы используется 1 % площади боковой поверхности ведра?

10. Конус и его элементы. Сечение конуса плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения конуса, его элементов;
- уметь изображать конус и его сечение плоскостью;
- уметь решать задачи на нахождение элементов конуса.

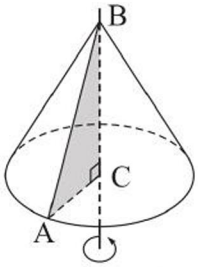


Рисунок 87

Конусом называется тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета. Прямая, содержащая ось вращения конуса (или отрезок, соединяющий его вершину с центром основания), называется **осью конуса.** Например, на рисунке 87 дано изображение конуса, полученного вращением прямоугольного ΔABC вокруг его катета BC. Точка B называется **вершиной** конуса. Гипотенуза BA называется **образующей** конуса. Она описывает поверхность, которая называется **боковой поверхностью** конуса, катет CA описывает круг – **основание** конуса. Перпендикуляр, проведенный из вершины конуса к плоскости его основания, называют **высотой** конуса. Длина этого отрезка также называется высотой конуса. Фигура, состоящая из объединения боковой поверхности конуса и его основания, называется **полной поверхностью конуса**.

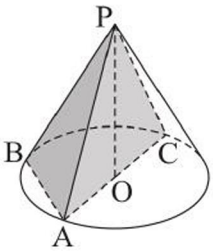


Рисунок 88

Все сечения конуса, содержащие его вершину, являются равнобедренными треугольниками (например, ΔPAB или ΔPAC на рисунке 88).

Сечение конуса, содержащее его вершину и центр основания, называется **осевым сечением** конуса. Конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, называется **равносторонним конусом**.

Сечением конуса плоскостью, параллельной его основанию, является круг.

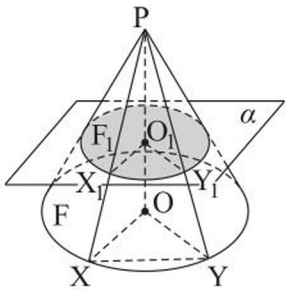


Рисунок 89

Действительно, поставим в соответствие произвольной точке X основания F конуса точку X_1 – пересечения отрезка PX и плоскости сечения, а точке Y – точку Y_1 (рисунок 89). Тогда из подобия прямоугольных треугольников PO_1X_1 и POX имеем: $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{PO_1}{PO} = k$, где k – постоянное число. Так как для любых точек X и Y основания F конуса и соответствующих им точек сечения F_1 верно

равенство $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$, то эти $F_1 \sim F$. Следовательно, сечением конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг.

З а д а ч а. Плоскость проходит через вершину равностороннего конуса и хорду его основания. Образующая конуса равна l. Найти расстояние от центра основания конуса до этой плоскости, если она наклонена к основанию под углом $\alpha = 60°$.

Р е ш е н и е. Пусть ΔSBC – сечение конуса указанной плоскостью, а ΔASC – его осевое сечение, тогда $AS = SC = AC = l$ (рисунок 90). Высота конуса $SO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Угол наклона плоскости SBC к основанию равен углу SHO, где H – середина хорды BC, а расстояние от точки O до плоскости SBC – это высота OK ΔSOH (объясните почему). Так как $OK = OH \cdot \sin\alpha$ (из ΔOKH),

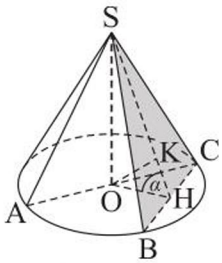


Рисунок 90

$OH = SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (из ΔSOH), то $OK = SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = SO \cdot \cos\alpha = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$.

О т в е т. $\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

ВОПРОСЫ

1. Что называется конусом?

2. Дайте определения вершины, образующей, основания, высоты конуса.

3. Что называется боковой поверхностью конуса и полной поверхностью конуса?

4. Что называется осевым сечением конуса?

5. Какой конус называется равносторонним конусом?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

165. Через точку основания конуса и середину его высоты проведите прямую и отметьте точку пересечения этой прямой с боковой поверхностью конуса.

166. В конусе с радиусом основания 12 см проведены два сечения, параллельные основанию, делящие высоту конуса на три равные части. Найдите площади этих сечений.

167. Найдите высоту конуса и его образующую, если осевое сечение конуса: а) прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 12 см; б) треугольник, площадь которого равна $16\sqrt{3}$ см^2, а один из углов равен 120°.

168. Через вершину конуса проведены две плоскости, образующие равные углы с плоскостью основания. Верно ли, что сечения конуса этими плоскостями равны? Ответ объясните.

169. а) Длины двух сторон осевого сечения конуса равны 4 см и 8 см. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и отсекающей дугу основания в 60°.

б) Один из углов осевого сечения конуса равен 90°. Хорда основания конуса, равная $4\sqrt{3}$ см, стягивает дугу в 120°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и данную хорду основания.

Уровень В

170. Площади осевого сечения конуса и сечения, проведенного через середину его высоты параллельно основанию, равны соответственно 48 см^2 и 9π см^2. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

171. Радиус основания равностороннего конуса равен 10 см. Найдите с точностью до 0,1 см радиус сечения конуса плоскостью, параллельной его основанию, если площадь этого сечения равна площади осевого сечения конуса.

172. Радиус основания конуса равен 6 см, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, если высота конуса образует с этой плоскостью угол 30°.

11. Развертка, площадь боковой и полной поверхностей конуса

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей конуса;

• уметь применять эти формулы при решении задач.

Пирамида называется *вписанной в конус* (или конус – описанным около пирамиды), если их вершины совпадают, а основание пирамиды – многоугольник, вписанный в основание конуса. В конус можно вписать любую пирамиду, боковые ребра которой равны (рисунок 91, *а*). При этом ее боковые ребра являются образующими конуса.

Пирамида называется *описанной около конуса* (а конус – вписанным в пирамиду), если их вершины совпадают, а основание пирамиды описано около основания конуса. При этом все плоскости боковых граней пирамиды касаются боковой поверхности конуса (рисунок 91, *б*).

За площадь боковой поверхности конуса принимается величина, к которой стремится площадь боковой поверхности правильной пирамиды, вписанной в конус, при неограниченном увеличении числа сторон ее основания.

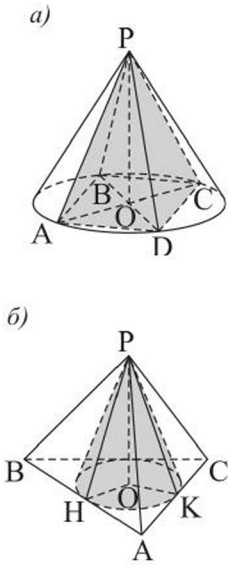


Рисунок 91

Т е о р е м а. **Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую:**

$$S_{бок.} = \pi R l,$$

где R – радиус основания конуса, l – длина его образующей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду (рисунок 92). Площадь боковой поверхности этой пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему. При неограниченном увеличении числа n сторон основания пирамиды площадь ее боковой поверхности стремится к величине, равной $\pi R l$. Следовательно, площадь боковой поверхности конуса равна $S_{бок.} = \pi R l$.

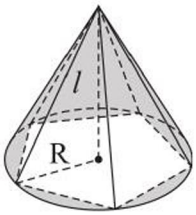


Рисунок 92

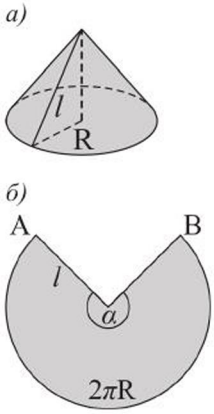


Рисунок 93

Если боковую поверхность конуса (рисунок 93, *а*) разрезать по образующей и развернуть ее так, чтобы все образующие лежали в одной плоскости, то получим круговой сектор, который называется разверткой боковой поверхности конуса (рисунок 93, *б*).

Площадь развертки боковой поверхности конуса равна площади боковой поверхности конуса. По формуле площади сектора имеем: $\boldsymbol{S_{\text{бок.кон.}}} = \dfrac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$, где l – длина его образующей, α – градусная мера дуги AB или центрального угла, которым она измеряется.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей его боковой поверхности и основания. Площадь полной поверхности конуса равна $\boldsymbol{S_{\text{п.п.}}} = \boldsymbol{\pi R(R + l)}$, где R – радиус основания конуса, а l – длина его образующей.

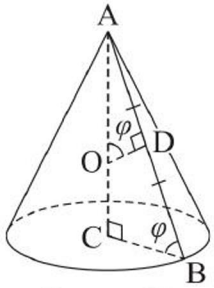


Рисунок 94

З а д а ч а (о площади боковой поверхности конуса). Доказать, что площадь боковой поверхности конуса равна $\boldsymbol{S_{\text{бок.}}} = \boldsymbol{2\pi hd}$, где h – высота конуса, d – длина отрезка серединного перпендикуляра к образующей конуса, один конец которого лежит на ней, а другой – на оси конуса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $S_{\text{бок. кон.}} = \pi Rl$, где $l = 2AD$, $R = BC$ (рисунок 94). Отрезок серединного перпендикуляра к образующей $DO = d$, высота конуса $AC = h$. Так как треугольники ABC и AOD подобны, то $\angle ABC = \angle AOD = \varphi$, тогда $BC = AC \cdot \operatorname{ctg}\varphi = h \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, $AD = DO \cdot \operatorname{tg}\varphi = d \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, $S_{\text{бок. кон}} = 2\pi \cdot BC \cdot AD = 2\pi h \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot d \cdot \operatorname{tg}\varphi = 2\pi hd$.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь полной поверхности конуса?

2. По каким формулам можно найти площади боковой и полной поверхностей конуса?

3. Что является разверткой боковой поверхности конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

173. а) Может ли площадь боковой поверхности конуса быть равной площади его основания?

б) Радиусы оснований и высоты цилиндра и конуса равны. Могут ли быть равными площади их боковых поверхностей?

174. Как относятся площади основания, боковой поверхности и полной поверхности равностороннего конуса?

175. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если: а) его высота равна 8 дм, а радиус основания – 6 дм; б) образующая конуса наклонена к основанию под углом 45°, а его высота равна 4 дм.

176. Крыша башни имеет форму конуса. Высота крыши 1,5 м, а диаметр основания башни равен 4 м. Найдите с точностью до 0,1 м^2 площадь поверхности крыши.

177. а) Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг.

б) Площадь боковой поверхности конуса втрое больше площади его основания. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

178. Радиус сектора равен 6 дм, а его угол 120°. Сектор свернут в коническую воронку. Найдите радиус основания конуса.

Уровень В

179. Найдите центральный угол развертки боковой поверхности конуса, если: а) площадь полной поверхности конуса 27π, а площадь его боковой поверхности 18π; б) его образующая 5 см, а площадь полной поверхности 24π см^2.

180. Коническая жестяная воронка должна иметь диаметр основания 10 см и высоту 12 см. Найдите размеры ее заготовки (радиус и угол сектора развертки боковой поверхности конуса).

181. Найдите площадь осевого сечения конуса, если его высота равна 6 дм, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

182. Найдите площадь поверхности тела вращения, если: а) равнобедренный треугольник с углом при основании 60° и боковой стороной 8 см вращается вокруг боковой стороны; б) прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг гипотенузы.

12. Усеченный конус и его элементы

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения усеченного конуса, его элементов;
- уметь изображать усеченный конус и его сечение плоскостью;
- уметь решать задачи на нахождение элементов усеченного конуса.

Усеченным конусом называется тело, отсеченное от конуса плоскостью, параллельной его основанию и содержащее это основание (рисунок 95, *а*). При этом основание конуса и его сечение указанной плоскостью называются **основаниями** усеченного конуса. **Высотой** усеченного конуса называется перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания к плоскости другого его основания. Длина этого перпендикуляра также называется высотой усеченного конуса. Отрезок, лежащий на образующей конуса, концы которого находятся на окружностях оснований усеченного конуса, называется **образующей** усеченного конуса. Любое сечение усеченного конуса, содержащее две его образующие, – равнобедренная трапеция. Фигура, состоящая из всех образующих усеченного конуса, называется его *боковой поверхностью*, а объединение оснований усеченного конуса и его боковой поверхности называется *полной поверхностью усеченного конуса*.

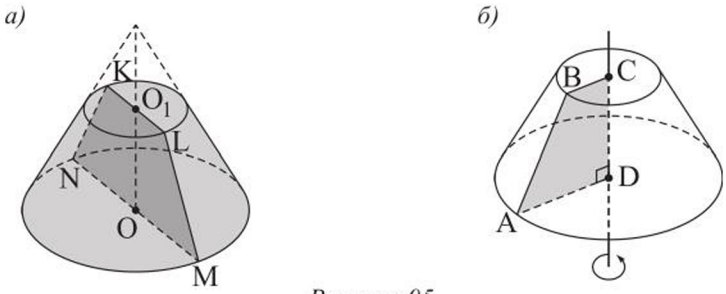


Рисунок 95

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее меньшей боковой стороны. Например, на рисунке 95, *б* дано изображение усеченного конуса, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг ее меньшей боковой стороны CD. Основания BC и AD трапеции описывают круги – основания усеченного конуса, а отрезок AB – его боковую поверхность. Прямую, проходящую через центры оснований усеченного конуса (или отрезок, соединяющий эти центры), называют **осью** усеченного конуса. Любое сечение усеченного конуса, со-

держащее его ось, называется **осевым сечением** усеченного конуса. На рисунке 95, *а* равнобедренная трапеция $MNKL$ – осевое сечение усеченного конуса.

З а д а ч а. Площади оснований усеченного конуса равны 4 см^2 и 16 см^2. Через середину его высоты проведена плоскость, параллельная основаниям усеченного конуса. Найти площадь сечения конуса этой плоскостью.

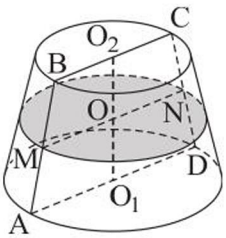


Рисунок 96

Р е ш е н и е. Указанное сечение – круг с диаметром, равным средней линии MN трапеции $ABCD$ – осевого сечения усеченного конуса (рисунок 96). $MN = 0{,}5(AD + BC) = AO_1 + BO_2$. Так как по условию $4 = \pi \cdot BO_2^2$, $16 = \pi \cdot AO_1^2$, то $BO_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $AO_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$.

Значит, $MN = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $MO = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$. Тогда $S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot MO^2 = \pi \cdot \frac{9}{\pi} = 9$ (см^2).

О т в е т. 9 см^2.

ВОПРОСЫ

1. Что называется усеченным конусом?

2. Дайте определения образующей, основания, высоты усеченного конуса.

3. Что называется боковой поверхностью и полной поверхностью усеченного конуса?

4. Что называется осевым сечением усеченного конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

183. Найдите площадь осевого сечения усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 8 см и 14 см, а образующая равна 10 см.

184. Найдите высоту усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 3 м и 6 м, а образующая наклонена к основанию под углом: а) 45°; б) 30°.

185. а) Найдите высоту ведра, имеющего форму усеченного конуса с большим верхним основанием, если его образующая 2,5 дм, а радиусы оснований равны 1,7 дм и 1 дм.

б) Найдите длину образующей усеченного конуса, высота которого равна $\sqrt{30}$ дм, а площади оснований 6π дм^2 и 24π дм^2.

186. Дан усеченный конус, площадь осевого сечения которого равна 32 см^2. Высота усеченного конуса равна диаметру верхнего основания, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите: а) радиусы оснований этого усеченного конуса; б) длину его образующей.

187. а) Дан усеченный конус, высота которого равна 12 см, радиус нижнего основания равен 8 см, а тангенс угла между образующей и основанием равен 2,4. Найдите площадь верхнего основания этого усеченного конуса.

б) Образующая усеченного конуса, равная 16 см, наклонена к основанию под углом 60°. Найдите радиусы оснований этого усеченного конуса, если их отношение равно 3.

188. Сшит колпак формы усеченного конуса, образующая которого 20 см, диаметр верхнего основания 8 см, а высота 16 см. Подойдет ли такая шляпа для головы снеговика, если окружность его головы равна 1 м?

Уровень В

189. Бревно высотой 5 м формы усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 0,25 м и 0,09 м, распилили на три бревна, высоты которых равны. Найдите с точностью до 0,01 м длины образующих полученных усеченных конусов.

190. Образующая усеченного конуса равна 8 см и наклонена к плоскости его нижнего основания под углом 60°. Прямая, содержащая диагональ его осевого сечения, делит этот угол пополам. Найдите радиусы оснований усеченного конуса.

191. а) Найдите длину образующей конуса, от которого отделен усеченный конус с радиусами оснований 18 см, 15 см и образующей 9 см.

б) Высота конуса равна $\sqrt{2}$ м. На каком расстоянии от его вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площади оснований отсеченного усеченного конуса относились как 1 : 2?

13. Площадь поверхности усеченного конуса

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы площадей боковой и полной поверхностей усеченного конуса;

• уметь применять эти формулы при решении задач.

За площадь боковой поверхности усеченного конуса принимается величина, к которой стремится площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус, при неограниченном увеличении числа сторон ее оснований.

Теорема. **Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению половины суммы длин окружностей оснований на его образующую:**

$$S_{бок.} = \pi(R_1 + R_2) \cdot l,$$

где R_1, R_2 – радиусы оснований усеченного конуса, l – длина его образующей.

Доказательство. Впишем в усеченный конус правильную n-угольную усеченную пирамиду (рисунок 97). Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды равна произведению суммы полупериметров ее оснований на апофему. При неограниченном увеличении числа n сторон оснований усеченной пирамиды периметры ее оснований стремятся к величинам $2\pi R_1$ и $2\pi R_2$, а апофема усеченной пирамиды – к длине образующей усеченного конуса. Тогда площадь ее боковой поверхности стремится к величине, равной $\pi l(R_1 + R_2)$. Следовательно, площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок.} = \pi l(R_1 + R_2)$.

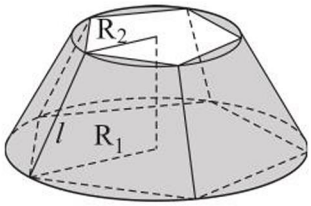


Рисунок 97

Площадью полной поверхности усеченного конуса называется сумма площадей его боковой поверхности и оснований. Площадь полной поверхности усеченного конуса равна $S_{п.п.} = \pi R_1^2 + \pi l(R_1 + R_2) + \pi R_2^2$, где R_1, R_2 – радиусы оснований усеченного конуса, l – длина его образующей.

Задача (о площади боковой поверхности усеченного конуса). Доказать, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна: $S_{бок.} = 2\pi hd$, где h – высота усеченного конуса, d – длина отрезка серединного перпендикуляра к образующей усеченного конуса, один конец которого лежит на ней, а другой – на оси конуса.

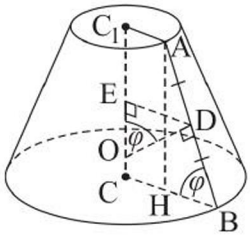


Рисунок 98

Доказательство. $S_{бок.ус.кон.} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, где $l = AB$, $R_1 = BC$, $R_2 = AC_1$ (рисунок 98). Отрезок серединного перпендикуляра к образующей $DO = d$, высота усеченного конуса $CC_1 = h$. Проведем $AH \perp BC$ и $DE \perp CC_1$, тогда $\angle ABC = \angle DOE = \varphi$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и $AH = CC_1 = h$. Из ΔABH имеем: $AB = \frac{AH}{\sin\varphi} = \frac{h}{\sin\varphi}$.

В трапеции $ABCC_1$ по свойству ее средней линии $BC + AC_1 = 2DE$. Из ΔDOE имеем: $DE = DO \cdot \sin\varphi = d \cdot \sin\varphi$. Следовательно, $S_{бок.ус.кон.} = \pi \cdot AB \cdot 2DE = \pi \cdot \frac{h}{\sin\varphi} \cdot 2d \cdot \sin\varphi = 2\pi hd$.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь полной поверхности усеченного конуса?

2. По каким формулам можно найти площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

192. Равнобедренная трапеция с основаниями 4 см, 10 см и боковой стороной 5 см вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь поверхности тела вращения.

193. Образующая усеченного конуса равна 6 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности этого усеченного конуса, если диаметр его верхнего основания равен 10 см.

194. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса, если площади его оснований равны 4π см^2 и 100π см^2, а площадь осевого сечения – 180 см^2.

195. Образующая усеченного конуса равна 10 см, высота – 8 см, а площадь боковой поверхности – 140π см^2. Найдите радиусы его оснований.

196. а) Найдите с точностью до 1 см^2 площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого относятся как 1 : 2, высота равна 8 см, а его образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°.

б) Сколько квадратных сантиметров материала нужно для изготовления рупора в виде усеченного конуса, образующая которого равна 2 дм, а радиусы оснований 2 см и 4 см? Ответ дайте с точностью до 1 см^2.

Уровень В

197. Существует ли усеченный конус, площадь боковой поверхности которого равна сумме площадей его оснований?

198. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если диагонали его осевого сечения перпендикулярны, а образующая, равная 12 см, наклонена к плоскости нижнего основания под углом 60°.

199. Через две образующие усеченного конуса, угол между которыми 60°, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, равным 6 см и 4 см. Каждая из этих хорд стягивает дугу 90°. Найдите площадь боковой поверхности этого усеченного конуса.

200. Какую высоту будет иметь ведро, если в заготовке для получения его боковой поверхности величины дуг равны по 60°, а их радиусы – 72 см и 48 см? Ответ дайте с точностью до 0,1 см.

14. Сфера и шар. Сечение шара плоскостью

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения сферы, шара;
- знать взаимное расположение сферы и плоскости;
- уметь изображать сферу, шар и их сечения плоскостью;
- уметь решать задачи на нахождение элементов сферы, шара.

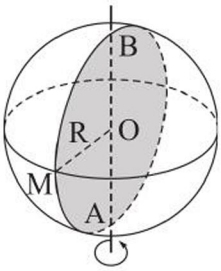


Рисунок 99

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки на одно и то же расстояние, а шаром – множество всех точек пространства, находящихся от некоторой точки на расстоянии, не большем данного. Данную точку называют *центром сферы* (или шара). Шар – это тело, поверхностью которого является сфера.

Сфера может быть получена вращением окружности вокруг прямой, содержащий ее диаметр, а шар – вращением круга вокруг такой прямой (рисунок 99). Центр этого круга – *центр шара* и соответственно центр сферы, являющейся поверхностью шара.

Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой его поверхности, называется **радиусом шара** или радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется **хордой сферы** или хордой шара, границей которого является эта сфера. Хорда, которой принадлежит центр сферы, называется **диаметром сферы** (шара). Любая хорда шара не больше его диаметра. Прямую, содержащую диаметр шара (или сам диаметр шара), называют **осью шара**.

Сфера (или шар) может иметь с плоскостью только одну общую точку, не иметь общих точек или иметь бесконечно много общих точек. Если плоскость и сфера имеют более одной общей точки, то эта плоскость называется *секущей плоскостью*. Множество всех общих точек сферы и секущей плоскости называется *сечением сферы*, а множество всех общих точек шара и секущей плоскости – *сечением шара*.

Т е о р е м а. **Сечение сферы плоскостью является окружностью.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть плоскость α пересекает сферу и не содержит ее центр. Возьмем произвольную точку M на линии их пересечения (рисунок 100). Из центра O сферы проведем перпендикуляр OH к плоскости α. $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2}$ – величина постоянная для любой точки M.

Так как все точки линии пересечения сферы и плоскости лежат в плоскости α и одинаково удалены от точки H, то все они лежат на окружности с центром в точке H. Кроме того, для любой точки N этой окружности выполняется равенство $ON^2 = NH^2 + OH^2$. Поскольку $MH = NH$, то эта точка принадлежит сфере.

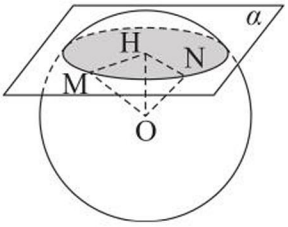


Рисунок 100

Если секущая плоскость проходит через центр сферы, то каждая ее точка пересечения со сферой удалена от этого центра на расстояние, равное радиусу сферы, следовательно, и в этом случае сечение сферы плоскостью – окружность. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что:

1) любое сечение шара плоскостью является кругом;
2) сечения шара плоскостями, одинаково удаленными от его центра, равны;
3) сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называемое **большим кругом шара**, имеет наибольшую площадь, а все большие круги шара равны.

Если к некоторому большому кругу шара проведен перпендикулярный ему диаметр, то концы диаметра называются *полюсами*, окружность большого круга – *экватором*, а окружности больших кругов, проходящие через полюсы, – *меридианами*. Сечения сферы плоскостями, параллельными экватору, называются *параллелями*. Сферу и шар изображают в проекции, например, как на рисунке 101.

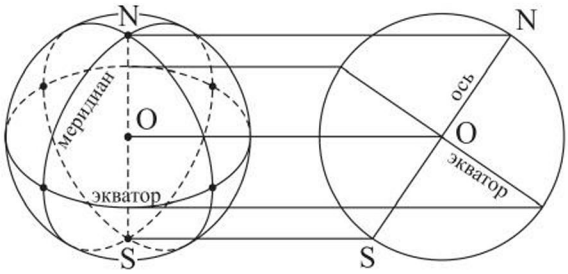


Рисунок 101

Отметим, что планету Земля условно считают шаром, на котором два полюса (Северный и Южный) и множество связанных с ними параллелей и меридианов. На сфере, как и на плоскости, можно ввести систему координат.

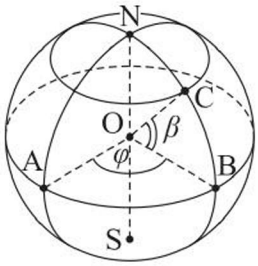


Рисунок 102

Обычно пользуются географической системой координат: долготой и широтой.

Долгота – это угол φ ($0° \le \varphi \le 360°$), измеряемый в плоскости экватора от начального (нулевого) меридиана против часовой стрелки до меридиана, на котором лежит данная точка (рисунок 102).

Широта – угол β ($-90° \le \beta \le 90°$), измеряемый в плоскости меридиана данной точки от экватора до радиуса, на котором лежит эта точка; знак «плюс» – к Северному полюсу, «минус» – к Южному.

Плоскостью, **касательной к сфере**, называется плоскость, имеющая с ней единственную общую точку, а эта точка – их точкой касания. *Плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.*

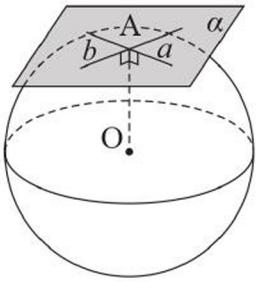


Рисунок 103

Если прямая имеет со сферой только одну общую точку, то она называется касательной к сфере. Любая прямая, лежащая в плоскости, касательной к сфере, и проходящая через точку касания, имеет со сферой только одну общую точку. Все такие прямые являются касательными к сфере (рисунок 103). Сфера и прямая могут иметь только одну общую точку, не иметь общих точек или иметь только две общие точки.

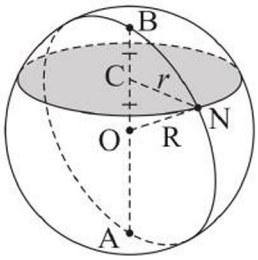


Рисунок 104

З а д а ч а 1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Найти отношение площади сечения шара этой плоскостью к площади его большого круга.

Р е ш е н и е. Пусть радиус шара равен R (рисунок 104). Найдем радиус r круга, являющегося сечением шара: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда искомое отношение равно: $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$.

О т в е т. 0,75.

З а д а ч а 2. На поверхности шара даны три точки, расстояния между которыми равны 6 дм, 8 дм, 10 дм. Радиус шара 13 дм. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C – три данные точки, O – центр шара, BC = = 6 дм, AC = 8 дм, AB = 10 дм, $OA = OB = OC$ = 13 дм (рисунок 105). Сечением шара плоскостью ABC будет круг, окружность которого описана около прямоугольного ΔABC (по теореме, обратной теореме Пифагора). Искомое расстояние – отрезок OO_1, где O_1 – середина отрезка AB, центр окружности, описанной около ΔABC. Тогда $OO_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (дм).

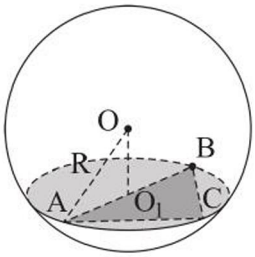


Рисунок 105

О т в е т. 12 дм.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение: а) сферы; б) шара.
2. Что является сечением: а) сферы плоскостью; б) шара плоскостью?
3. Какая плоскость называется плоскостью, касательной к сфере?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

201. Плоскость проходит через центр сферы и пересекает ее по окружности, длина которой 31,4 см. Найдите диаметр сферы с точностью до 1 см.

202. а) Площадь сечения шара плоскостью равна 36π см^2. Найдите расстояние от секущей плоскости до центра шара, если радиус шара равен 10 см.

б) Площадь сечения шара плоскостью в 4 раза меньше площади его большого круга. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения, если радиус сечения равен 2 см.

203. а) Арбуз формы шара радиуса 16 см разделен сечением, проходящим через середину одного из его радиусов, перпендикулярным ему. Какова площадь этого сечения?

б) Дан шар радиуса 8 см. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

204. Сечение шара плоскостью удалено на 5 см от его центра. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в это сечение, если радиус шара равен 7 см.

205. Точка плоскости, касательной к сфере радиуса 5 см, удалена от точки касания на 12 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

Уровень В

206. Длина окружности колодца приближенно равна 3,5 м. Можно ли накрыть его крышей формы полусферы, высота которой 0,6 м?

207. Составьте уравнение сферы радиуса 3 с центром в точке $A(2; -4; 7)$ и определите:

а) пересекает ли она координатные плоскости;

б) наименьшее расстояние от точек сферы до плоскости xOy.

208. Город X находится на 60° северной широты. Найдите длину пути, который совершает этот пункт за сутки вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли считать равным 6370 км. Ответ округлите до десятков километров.

15. Площадь поверхности шара

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулу площади поверхности шара;

• уметь применять ее при решении задач.

Рассмотрим правильный многоугольник с четным числом сторон, вписанный в круг. При вращении этого многоугольника вокруг оси симметрии круга, на которой лежит его наибольшая диагональ, получится тело, содержащееся в шаре (рисунок 106). Поверхность этого тела состоит из боковых поверхностей конусов, усеченных конусов и цилиндра. При неограниченном удвоении числа сторон многоугольника площадь поверхности такого тела вращения стремится к некоторой величине. Эту величину принимают за площадь поверхности шара. Площадь поверхности шара называют **площадью сферы**, являющейся его границей.

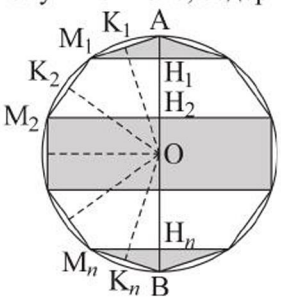


Рисунок 106

Площадь поверхности шара (площадь сферы) радиуса *R* равна:

$$S_{сф.} = 4\pi R^2.$$

Выведем эту формулу. Пусть шар образован вращением круга радиуса R вокруг своего диаметра AB. Впишем в окружность большого круга шара правильный многоугольник с четным числом n сторон (рисунок 106). Из его вершин M_1, M_2, M_3, …, M_n, лежащих по одну сторону от прямой AB, проведем перпендикуляры к диаметру $AB(M_1H_1 \perp AB, \ldots, M_nH_n \perp AB)$. При вращении вокруг прямой AB стороны многоугольника будут описывать боковые поверхности конусов или усеченных конусов, или цилиндра. Проведем перпендикуляры OK_1, OK_2, …, OK_n из центра окружности к сторонам многоугольника. Длины всех этих перпендикуляров равны, пусть $OK_1 = OK_2 = \ldots = OK_n = d$. Тогда, используя формулу площади боковой поверхности конуса и усеченного конуса $S_{бок.} = 2\pi hd$, получим, что площадь S поверхности тела вращения равна:

$$S = 2\pi d(AH_1 + H_1H_2 + \ldots + H_nB) = 2\pi d \cdot AB.$$

При неограниченном увеличении числа n сторон рассматриваемого многоугольника значение d стремится к R, а значение выражения $2\pi d \cdot AB$ – к $2\pi R \cdot 2R$, равному $4\pi R^2$. Следовательно, $S_{сф.} = 4\pi R^2$.

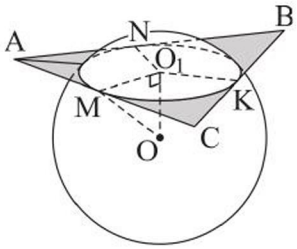


Рисунок 107

З а д а ч а 1. Шар касается всех сторон правильного треугольника, периметр которого равен 18 см. Найти площадь поверхности шара, если расстояние от его центра до плоскости треугольника равно 3 см.

Р е ш е н и е. Пусть точки M, N, K – точки касания шара со сторонами ΔABC (рисунок 107). Проведем из центра O шара перпендикуляр OO_1 к плоскости треугольника, по условию $OO_1 = 3$ см. Тогда точка O_1 – центр окружности, вписанной в ΔABC. Так как ΔABC – правильный со стороной 6 см, то радиус O_1M этой окружности равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см). Из прямоугольного ΔMOO_1 найдем радиус шара $OM = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$ (см). Тогда площадь поверхности шара равна 48π см^2.

О т в е т. 48π см^2.

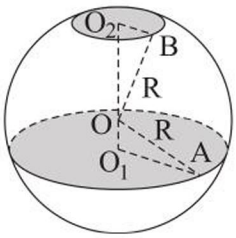


Рисунок 108

З а д а ч а 2. В шаре проведены два параллельных сечения, радиусы которых 7 см и 2 см. Найти площадь поверхности шара, если расстояние между сечениями равно 9 см.

Р е ш е н и е. Пусть O – центр шара, O_1, O_2 – центры кругов – сечений шара, O – точка отрезка O_1O_2, $O_1A = 7$ см, $O_2B = 2$ см, $OB = OA = R$, $OO_2 = x$ см, тогда $OO_1 = (9 - x)$ см (рисунок 108).

Из прямоугольных треугольников BO_2O и AO_1O имеем: $R^2 = x^2 + 4$ и $R^2 = (9 - x)^2 + 49$. Решив уравнение $x^2 + 4 = (9 - x)^2 + 49$, получим $x = 7$. Тогда $R^2 = 53$, $4\pi R^2 = 212\pi$ (см^2).

Точка O_1 не может принадлежать отрезку OO_2, так как получим $OO_1 = x - 9 < 0$.

О т в е т. 212π см^2.

ВОПРОСЫ

1. Что принимается за площадь поверхности шара?
2. По какой формуле можно найти площадь поверхности шара?

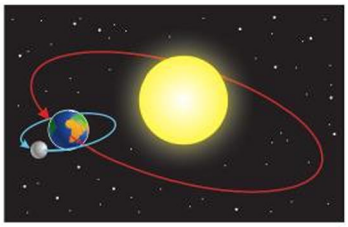
УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

209. а) Верно ли, что площадь поверхности шара равна произведению длины окружности его большого круга на диаметр? б) Как изменится площадь поверхности шара, если его диаметр увеличить в 3 раза?

210. Чему равна площадь поверхности чаши формы полушара, диаметр которого 8 см?

211. Известно, что диаметр Луны составляет $\frac{3}{11}$ диаметра Земли. Найдите отношение площади поверхности Земли к площади поверхности Луны, считая их шарами.



Вращение Земли и Луны вокруг Солнца

212. Длина линии пересечения сферы и плоскости равна 8π см, а расстояние от центра сферы до этой плоскости равно 5 см. Найдите площадь данной сферы.

213. а) В каком случае расходуется больше материала: на никелировку двух шаров диаметра 5 см каждый или десяти шаров диаметра 2 см каждый? б) Что больше: площадь поверхности двух сфер диаметра 1 дм каждая или площадь полной поверхности правильного тетраэдра с ребром 2 дм?

214. Самое большое в мире сферическое здание Нур Алем имеет диаметр, равный 80 м. Найдите с точностью до 1 м^2 площадь этой сферы, считая $\pi \approx 3{,}1416$.

Нур Алем, г. Нур-Султан

Уровень В

215. Сфера задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 10$. Найдите ее площадь.

216. а) Сфера касается сторон треугольника ABC, плоскости которого принадлежит ее центр. Найдите площадь сферы, если $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см.

б) Каждая сторона ромба, равная $6\sqrt{2}$ см, касается шара, а плоскость ромба удалена от центра шара на расстояние, равное 4 см. Найдите площадь поверхности шара, если площадь ромба равна $36\sqrt{2}$ см^2.

217. Докажите, что:

а) площадь полной поверхности равностороннего конуса равна площади сферы, диаметр которой равен высоте конуса;

б) сумма площадей сфер, диаметры которых равны катетам прямоугольного треугольника, равна площади сферы с диаметром, равным его гипотенузе.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

218. Дан равносторонний цилиндр. Выразите площадь его полной поверхности через радиус основания цилиндра R.

219. Хорда нижнего основания цилиндра, равная 6 дм, удалена от его центра на расстояние 4 дм, а от центра верхнего основания – на 5 дм. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

220. Найдите площадь боковой поверхности конуса, у которого образующая равна $6\sqrt{3}$ см и наклонена к плоскости основания под углом 60°.

221. Найдите площадь полной поверхности равностороннего конуса, высота которого равна $2\sqrt{3}$ см.

222. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°. Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности этого конуса.

223. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 4 см. Найдите площадь сечения этого усеченного конуса плоскостью, параллельной основаниям и проходящей через середину его высоты.

224. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1 : 3, его высота равна 8 см, а образующая наклонена к нижнему основанию под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности этого усеченного конуса.

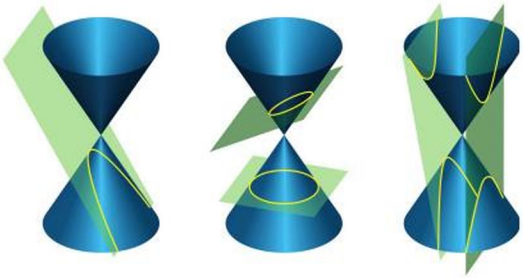
225. Шар радиуса 6 см касается всех сторон правильного треугольника со стороной $4\sqrt{3}$ см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости этого треугольника.

226. Сравните площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата вокруг его стороны, равной a, и площадь сферы радиуса a.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Тела вращения и их свойства исследовались древнегреческими учеными Евклидом, Архимедом, Аполлонием и другими. При этом рассматривались и сечения этих тел. Например, Аполлоний Пергский (262–190 гг. до н. э.) посвятил им целый труд под названием «Конические сечения». По историческим сведениям формулы площадей поверхностей цилиндра, конуса, усеченного конуса и шара впервые вывел Архимед и изложил эти результаты в труде «О шаре и цилиндре».

Аполлоний Пергский



Конические сечения: парабола, эллипс, гипербола

Используя интернет-ресурсы, найдите сведения о том:

1) как понятие цилиндра определял Евклид;

2) как формулу площади боковой поверхности конуса записывал Архимед.

III. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятие объема тела;
- свойства объемов тел;
- формулы объемов: призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.

уметь

- применять свойства объемов пространственных тел;
- применять формулы объемов призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара при решении задач.

16. Общие свойства объемов тел. Объем призмы

Учебные достижения по изучению темы:

• знать и применять свойства объемов пространственных тел;

• знать формулу нахождения объема призмы;

• уметь применять ее при решении задач.

С понятием объема некоторых тел вы знакомы, например, знаете формулу объема прямоугольного параллелепипеда, единицы объема. **Объемом тела** называется положительная величина, для которой выполняются следующие **свойства** (аксиомы):

1) *равные тела имеют равные объемы*;

2) *если тело разделено на конечное число тел, то его объем равен сумме их объемов*;

3) *куб, ребро которого равно единице длины, имеет объем, равный единице.*

Основными единицами измерения объема являются: 1 мм^3, 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3, 1 км^3. Напомним, что 1 дм^3 равен 1 литру.

Из аксиом объема следует, что:

- если тело содержится внутри другого тела, то его объем меньше объема этого тела;
- объем куба, ребро которого равно $\frac{1}{n}$ единицы длины ($n \in N$), равен $\frac{1}{n^3}$ кубической единицы;
- при увеличении длины ребра куба в k раз его объем увеличивается в k^3 раз.

Два тела, имеющие одинаковые объемы, называются **равновеликими**.

Теорема. **Объем V призмы равен произведению площади S ее основания на высоту h призмы:**

$$V = S \cdot h.$$

Доказательство. Для доказательства этой формулы используем формулу объема тела, известную из курса алгебры и начал анализа:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения призмы плоскостью, параллельной ее основанию

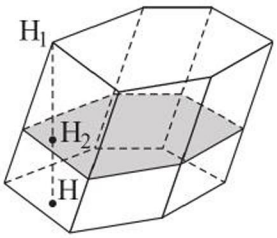


Рисунок 109

и перпендикулярной высоте $H_1H = h$ призмы, $x = H_1H_2$ (рисунок 109). Так как $S(x) = S$, то объем V призмы равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = Sh.$$

З а д а ч а. Найти объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно b, а ее плоские углы при вершине A равны.

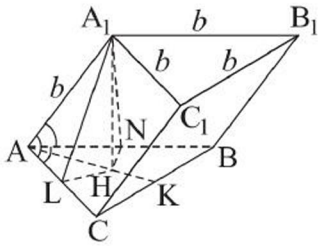


Рисунок 110

Р е ш е н и е. Искомый объем равен $S_{\Delta ABC} \cdot A_1H$, где A_1H – высота призмы (рисунок 110), причем точка H лежит на биссектрисе AK ΔABC. Это следует из равенства прямоугольных треугольников ALH и ANH, где HL и HN – проекции высот A_1L и A_1N граней AA_1C_1C и ABB_1A_1 соответственно на плоскость основания призмы.

Из условия задачи следует, что каждый из плоских углов при вершине A равен 60°, так как равен углу равностороннего ΔABC. $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Найдем высоту A_1H. Из ΔA_1AL имеем $AL = \frac{b}{2}$, $A_1L = b \cdot \sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Из ΔALH имеем $LH = AL \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Тогда из ΔA_1HL находим $A_1H = \sqrt{\frac{3b^2}{4} - \frac{b^2}{12}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Искомый объем равен $V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

О т в е т. $\frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основные свойства объемов тел.

2. Назовите основные единицы измерения объема и укажите соотношения между ними.

3. Сформулируйте повествовательным предложением и запишите формулу объема: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) призмы.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

227. Верно ли, что если два тела равновелики, то они равны?

228. Деревянный куб, площадь поверхности которого равна 24 см^2, распилили на 8 равных кубиков. Чему равен объем одного малого кубика?

229. Объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 8 дм^3. Точки M и M_1 – середины ребер DC и D_1C_1 соответственно. Найдите объем призмы $ADMA_1D_1M_1$.

230. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, которая имеет высоту 5 дм и площадь полной поверхности 78 дм^2.

231. Кирпич имеет размер 25 × 12 × 6 см. Найдите объем стены, выложенной из 10000 кирпичей, с учетом того, что раствор увеличивает объем на 15 %.

232. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 4 см и 5 см, а угол между ними 45°. Найдите объем параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна $54\sqrt{2}$ см^2.

233. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с ее боковым ребром угол 30°. Найдите объем этой призмы.

234. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 м, 6 м и 9 м, а боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите ее объем.

Уровень В

235. При рытье котлована, имеющего форму правильной четырехугольной призмы со стороной основания, равной 3 м, было вынуто 25 тонн земли, плотность которой равна $1{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите с точностью до 0,1 м глубину котлована.

236. Основание прямого параллелепипеда – ромб, меньшая диагональ которого 4 см, а острый угол 60°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна $80\sqrt{3}$ см^2. Найдите объем параллелепипеда.

237. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a = 12 см, b = 7 см, c = 10 см. Ребра, длины которых равны a и b, взаимно перпендикулярны, а третье ребро образует с каждым из них угол φ = 60° (рисунок 111). Найдите объем параллелепипеда.

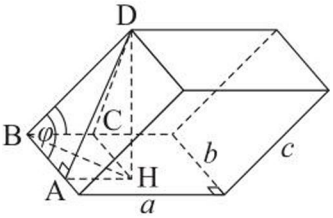


Рисунок 111

17. Объемы пирамиды и усеченной пирамиды

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы нахождения объемов пирамиды и усеченной пирамиды;

• уметь применять эти формулы при решении задач.

Теорема. **Объем V пирамиды равен одной трети произведения площади S ее основания на высоту h пирамиды:**

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$

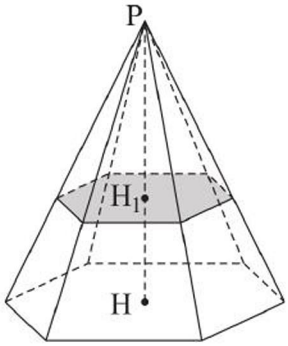


Рисунок 112

Доказательство. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию и перпендикулярной высоте $PH = h$ пирамиды, $x = PH_1$ (рисунок 112). По свойству такого сечения: $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$. Тогда объем V пирамиды равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh.$$

Теорема. **Объем V усеченной пирамиды равен одной трети произведения ее высоты h на сумму площадей S_1, S_2 оснований и их среднего геометрического:**

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

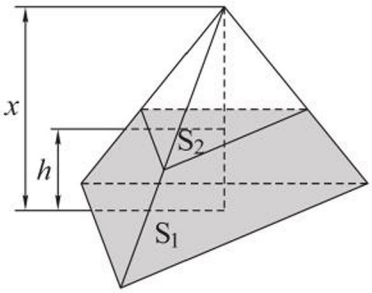


Рисунок 113

Доказательство. Достроим усеченную пирамиду до полной пирамиды (рисунок 113). Пусть высота полной пирамиды равна x. Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$.

Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух пирамид: одной с площадью основания S_1 и высотой x, другой – с площадью основания S_2 и высотой $x - h$.

Преобразуем выражение $x - h$, получим:

$x - h = \frac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h = \frac{h \cdot \sqrt{S_1} - h\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{h \cdot \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$. Выразим объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{3}h \cdot \frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1})^3 - (\sqrt{S_2})^3}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

З а д а ч а 1. Найти объем правильного тетраэдра $PABC$, если расстояние от середины M его высоты PH до вершины A равно d.

Р е ш е н и е. Пусть ребро правильного тетраэдра $PABC$ равно a (рисунок 114), тогда $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$, $MH = \frac{1}{2}PH = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Из треугольника AMH получим: $AM^2 = AH^2 + HM^2$, то есть $d^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}$, $d^2 = \frac{a^2}{2}$, $a^2 = 2d^2$, $a = d\sqrt{2}$.

Тогда $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{d^2\sqrt{3}}{2}$, $PH = \frac{2d\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2d}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $V_{PABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн.} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}d^3$.

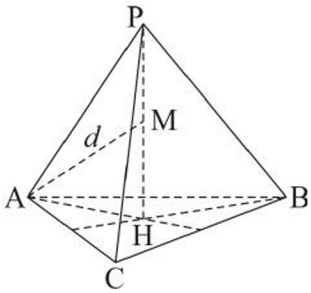


Рисунок 114

О т в е т. $\frac{1}{3}d^3$.

З а д а ч а 2. Найти с точностью до 0,1 м^3 объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 5 м и 2 м, а острый угол α ее боковой грани равен 60°.

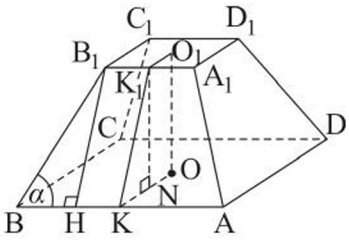


Рисунок 115

Р е ш е н и е. Пусть в данной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$ м, $A_1B_1 = 2$ м, $\angle B_1BA = 60°$ (рисунок 115). Ее объем

$V = \frac{1}{3} \cdot OO_1 \cdot (5^2 + 2^2 + \sqrt{5^2 \cdot 2^2})$, где точки O и O_1 – центры оснований данной усеченной пирамиды.

Найдем высоту OO_1, рассмотрев прямоугольные треугольники KK_1N и BB_1H, где K и K_1 – середины сторон AB и A_1B_1, $K_1N \perp OK$, $B_1H \perp AB$. Так как основаниями правильной усеченной четырехугольной пирамиды являются квадраты, то $BH = KN = \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ (см). Тогда $B_1H =$ $= K_1K = BH \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $O_1O = K_1N = \sqrt{K_1K^2 - KN^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Искомый объем равен: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 39 = \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 27{,}6$ (м^3).

Ответ. $\approx 27{,}6$ м^3.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте повествовательным предложением и запишите формулу объема: а) пирамиды; б) усеченной пирамиды.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

238. а) Из одного металла изготовлены две детали в форме пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты. Равны ли массы деталей?

б) Правильная n-угольная пирамида пересечена плоскостью, содержащей ее высоту. Равны ли объемы многогранников, на которые эта плоскость делит пирамиду?

239. Найдите объем правильной n-угольной пирамиды, каждое ребро которой равно a, если: а) $n = 4$; б) $n = 3$.

240. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 6 см, а тангенс двугранного угла при ребре основания равен $\frac{15}{8}$.

241. Найдите ребро основания правильной треугольной пирамиды, если ее объем равен 9 дм^3, а двугранный угол при ребре основания 45°.

242. В правильной усеченной пирамиде стороны верхнего и нижнего оснований соответственно равны $2\sqrt{3}$ дм и $4\sqrt{3}$ дм, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен 60°. Найдите объем пирамиды, если она: а) четырехугольная; б) треугольная.

243. Котлован для пруда имеет форму правильной усеченной четырехугольной пирамиды, сторона верхнего основания которой равна 12 м, а нижнего – 10 м. Ее боковые грани наклонены к плоскостям оснований под углом 45°. Сколько кубометров воды может вместить этот котлован?

Уровень В

244. Треугольная призма $ABCPB_1C_1$ (рисунок 116, *а*) разделена на три пирамиды, как показано на рисунке 116, *б*. Объясните, почему объемы этих пирамид равны.

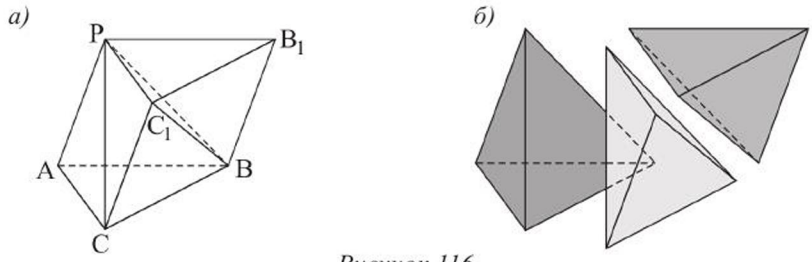


Рисунок 116

245. Можно ли разрезать произвольную треугольную усеченную пирамиду на три равновеликие усеченные пирамиды? Если можно, то объясните, как это сделать.

246. Алмаз массой 42 карата имеет форму правильного октаэдра. Верно ли, что ребро этого октаэдра ≈ 1,72 см? (Плотность алмаза 3,5 г/см^3, 1 карат равен 0,2 г).

247. Силосная яма формы усеченной четырехугольной пирамиды, основания которой прямоугольники, причем стороны нижнего основания равны 13 м и 6 м, а большая сторона верхнего основания 26 м, имеет глубину 5 м. Какова масса силоса, заложенного в ней, если его 1 м^3 весит 0,5 т?

18. Объем цилиндра

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулу нахождения объема цилиндра;

• уметь применять ее при решении задач.

Т е о р е м а. **Объем V цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:**

$$V = \pi R^2 h,$$

где R – радиус основания, h – высота цилиндра.

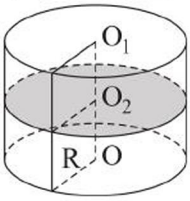


Рисунок 117

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения цилиндра плоскостью, параллельной его основанию и перпендикулярной высоте $O_1O = h$ цилиндра, $x = O_1O_2$ (рисунок 117). Так как $S(x) = S = \pi R^2$, то объем V цилиндра равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh = \pi R^2 h.$$

З а д а ч а 1. Найти объем цилиндра, в который вписана правильная треугольная призма, если известно, что все ее ребра равны и объем призмы равен $16\sqrt{3}$ см^3.

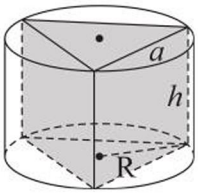


Рисунок 118

Р е ш е н и е. Пусть a – сторона основания. По условию задачи высота призмы $h = a$ (рисунок 118). Зная объем призмы, составим уравнение: $16\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$, откуда $a = 4$. Тогда радиус основания цилиндра $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, а искомый объем равен: $V = \pi R^2 h = \frac{64\pi}{3}$ (см^3).

О т в е т. $\frac{64\pi}{3}$ см^3.

З а д а ч а 2. Можно ли налить 200 литров воды в бочку формы равностороннего цилиндра, площадь осевого сечения которого равна 36 дм^2?

Р е ш е н и е. Пусть h – высота цилиндра, а R – радиус его основания. По условию задачи $h = 2R$, $4R^2 = 36$, откуда $R = 3$ (дм), $h = 6$ (дм). Тогда объем V цилиндра равен: $V = 9 \cdot 6\pi \approx 170$ (дм^3). 170 дм^3 = 170 л.

О т в е т. Нельзя.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте повествовательным предложением и запишите формулу объема цилиндра.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

248. Объем цилиндра увеличился в 25 раз.

а) Во сколько раз увеличилась его высота, если радиус основания остался прежним?

б) Во сколько раз увеличился радиус его основания, если высота не изменилась?

249. У цилиндра, объем которого равен 72 дм^3, высоту увеличили в 3 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Чему равен объем нового цилиндра?

250. Чему равен объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см вокруг: а) его большей стороны; б) его меньшей стороны?

251. Найдите объем равностороннего цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 24π см^2.

252. Найдите объем цилиндра, если развертка его боковой поверхности – квадрат со стороной, равной 8 см.

253. В сосуд с водой формы цилиндра, диаметр дна которого равен 10 см, опустили камень, при этом уровень воды в нем поднялся на 2 см. Найдите с точностью до 1 см^3 объем камня.

254. Длина хорды нижнего основания цилиндра равна 4 см. Треугольник, образованный этой хордой и центром верхнего основания, имеет периметр 12 см и наклонен к плоскости основания цилиндра под углом 60°. Найдите объем цилиндра.

Уровень В

255. Прямоугольник с размерами $2a$ м и a м является разверткой боковой поверхности двух разных цилиндров. Найдите отношение их объемов.

256. а) Около прямой призмы, стороны основания которой равны 6 см, 8 см и 10 см, описан цилиндр. Найдите его объем, если известно, что диагонали осевого сечения цилиндра взаимно перпендикулярны.

б) Найдите объем равностороннего цилиндра, вписанного в прямую треугольную призму со сторонами основания 12 см, 16 см и 20 см.

257. Стальной вал формы цилиндра с образующей 97 см и диаметром основания 8,4 см обтачивается так, что его диаметр уменьшается на 0,2 см. Считая $\pi \approx 3{,}1416$, укажите с точностью до 1 г, на сколько граммов уменьшится масса вала в результате обточки. (Плотность стали 7,4 г/см^3.)

19. Объемы конуса и усеченного конуса

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулы нахождения объемов конуса и усеченного конуса;

• уметь применять эти формулы при решении задач.

Теорема. **Объем V конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту:**

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R – радиус основания конуса, h – высота конуса.

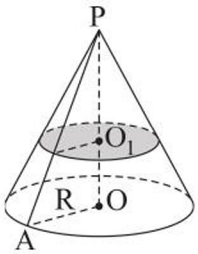


Рисунок 119

Доказательство. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения конуса плоскостью, параллельной его основанию и перпендикулярной высоте $PO = h$, $S = \pi R^2$ – площадь основания конуса, $x = PO_1$ (рисунок 119). Так как $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, то $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$. Тогда объем V конуса равен:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Теорема. **Объем V усеченного конуса равен:**

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2),$$

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, а h – его высота.

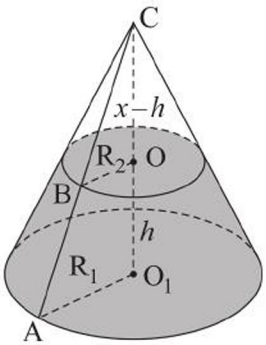


Рисунок 120

Доказательство. Достроим данный усеченный конус до конуса (рисунок 120). Пусть его высота $CO_1 = x$. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух конусов: одного – с радиусом основания R_1 и высотой x, другого – с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$. Из подобия треугольников CAO_1 и CBO имеем: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$.

Преобразуем выражение $x - h$, получим: $\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h = \frac{hR_2}{R_1 - R_2}$. Тогда объем усеченного конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R_1^2 x - \frac{1}{3}\pi \cdot R_2^2(x-h) = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^2 \cdot \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - R_2^2 \cdot \frac{hR_2}{R_1 - R_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\ \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2).$$

З а д а ч а 1. Из круга радиуса 3 дм вырезается сектор, угол φ которого равен 300°, и сворачивается в коническую воронку. Какое количество целых литров воды вмещает эта воронка?

Р е ш е н и е. Обозначим через R и r радиусы круга и основания конуса соответственно (рисунок 121, *а*, *б*). Учитывая, что длина дуги сектора равна длине окружности основания воронки, получим: $\frac{\pi R \cdot 300°}{180°} = 2\pi r$, откуда $r = \frac{5}{6}R = \frac{5}{2}$ (дм). Находим высоту h конуса и его объем V:

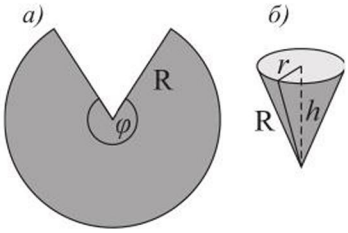


Рисунок 121

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2};\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{25\pi\sqrt{11}}{24}\ (\text{дм}^3) \approx 10{,}85\ (\text{л}).$$

О т в е т. 10 литров.

З а д а ч а 2. Образующая l усеченного конуса равна 8 см и наклонена к нижнему основанию под углом $\alpha = 60°$, а отношение площадей его оснований равно 4. Найти с точностью до 1 см^3 объем этого усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Пусть R и r – радиусы оснований усеченного конуса, h – его высота, а данный угол $\alpha = 60°$ (рисунок 122). Его объем равен: $V = \frac{1}{3}\pi h \times (R^2 + Rr + r^2)$. Проведем высоту BH усеченного конуса. Из ΔABH найдем $AH = 4$ см, $BH = 4\sqrt{3}$. По условию задачи $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = 4$, откуда $R = 2r$. Так как $AH = R - r$, то $r = 4$ см, $R = 8$ см. Тогда искомый объем равен:

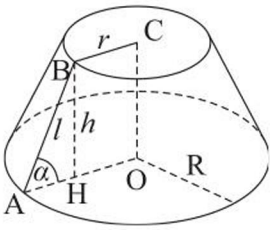


Рисунок 122

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (64 + 32 + 16) = \frac{448\pi\sqrt{3}}{3} \approx 813\ (\text{см}^3).$$

О т в е т. ≈ 813 см^3.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте повествовательным предложением и запишите формулу объема конуса.

2. По какой формуле можно найти объем усеченного конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

258. Докажите, что объем конуса равен одной шестой произведения площади его осевого сечения на длину окружности основания.

259. Равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, а угол при вершине 120°, вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите объем полученного при этом тела вращения.

260. Для изготовления конического сосуда вырезан сектор, угол которого равен 216°. Найдите объем сосуда, если: а) радиус сектора 10 см; б) длина дуги сектора 18π дм.

261. Найдите объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 3 дм и 6 дм, а образующая: а) равна 5 дм; б) наклонена к плоскости основания под углом 30°.

262. Сколько целых литров воды вмещается в сосуд формы усеченного конуса, высота которого 27 см, а длины окружностей оснований 99 см и 33 см?

263. В конусе, диаметр основания которого 4 дм, построено сечение, параллельное основанию. Площадь сечения равна π дм^2. Найдите отношение объемов данного конуса и отсеченного усеченного конуса.

Уровень В

264. Найдите отношение объемов равносторонних конуса и цилиндра, площади поверхностей которых равны.

265. Треугольник, стороны которого равны 15 см, 41 см и 52 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите объем тела вращения.

266. Найдите объем усеченного конуса, если его высота равна: а) 8 см, образующая 10 см, а площадь боковой поверхности равна 100π см^2; б) 12 см, образующая 13 см, а диагонали осевого сечения перпендикулярны.

20. Объем шара

Учебные достижения по изучению темы:

• знать формулу нахождения объема шара;

• уметь применять ее при решении задач.

Т е о р е м а. **Объем V шара радиуса R вычисляется по формуле**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

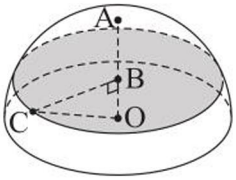


Рисунок 123

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем эту формулу, используя формулу объемов тел: $V = \int_a^b S(x)dx$. Пусть $S(x)$ – площадь произвольного сечения полушара плоскостью, параллельной его большому кругу и перпендикулярного радиусу шара $OA = R$, $x = OB$ (рисунок 123). Тогда $S(x) = \pi BC^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

Объем полушара равен:

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(x)dx = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \int_0^R \pi R^2 dx - \int_0^R \pi x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^R - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Тогда объем V шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

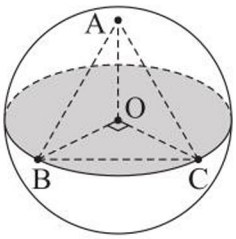


Рисунок 124

З а д а ч а 1. На поверхности шара с центром O отмечены точки A, B и C так, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$ (рисунок 124). Найти объем шара, если известно, что периметр треугольника ABC равен 18 см.

Р е ш е н и е. Из равенства прямоугольных треугольников AOB, AOC и BOC следует, что $AB = AC = BC = 6$ см. Из ΔBOC получаем: $OB = 3\sqrt{2}$ см. Тогда объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi OB^3 = \frac{4 \cdot 54\sqrt{2}}{3}\pi = 72\pi\sqrt{2}$ (см^3).

О т в е т. $72\pi\sqrt{2}$ см^3.

Отметим, что выпуклый многогранник называется **вписанным в шар** (или шар – описанным около многогранника), если все его вершины лежат на поверхности шара (рисунок 125). Выпуклый многогранник называется **описанным около шара** (а шар – вписанным в многогранник), если все его грани касаются шара (рисунок 126). Аналогично определяются понятия многогранников, вписанного в сферу и описанного около нее.

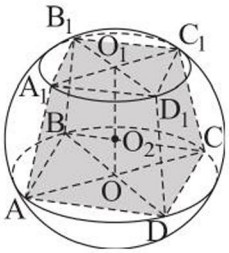


Рисунок 125

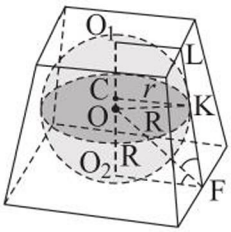


Рисунок 126

З а д а ч а 2. Найти объем шара, вписанного в многогранник, объем которого равен V, а площадь поверхности равна S.

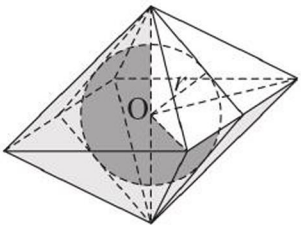


Рисунок 127

Р е ш е н и е. Пусть дан многогранник, в который можно вписать сферу радиуса r. Разобьем его на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а их общей вершиной – центр сферы (рисунок 127). Объем каждой из таких пирамид равен одной третьей произведения площади грани многогранника на радиус шара. Тогда объем V описанного многогранника равен сумме объемов всех таких пирамид, то есть $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$, где S – площадь поверхности многогранника. Отсюда $r = \frac{3V}{S}$, тогда искомый объем равен: $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3V}{S}\right)^3 = 36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

О т в е т. $36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

ВОПРОСЫ

1. По какой формуле можно найти объем шара?

2. Объясните, почему объем шара равен одной третьей произведения площади его поверхности на радиус шара.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

267. Во сколько раз увеличится объем шара, если его диаметр увеличить в 2 раза?

268. Два шара радиусами 2 см и 3 см переплавили в один шар. Найдите его радиус.

269. Найдите объем шара, если площадь его поверхности равна 9π дм^2.

270. а) Площадь сечения шара плоскостью в 9 раз меньше площади поверхности шара. Найдите объем шара, если радиус сечения равен 2 см.

б) Найдите объем шара, площадь большого круга которого равна $\frac{9\pi}{16}$ см^2.

271. Сектор AOB, угол которого равен 90°, вращается вокруг радиуса OA. Найдите объем тела вращения, если радиус сектора равен $\frac{3}{4}$ дм.

272. Радиусы четырех шаров образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 12, а ее разность равна 4. Сравните наибольший из объемов этих шаров с суммой объемов остальных.

Уровень В

273. Найдите объем шара, площадь поверхности которого увеличивается на 20π дм^2 при увеличении его радиуса на 1 дм.

274. а) Правильная треугольная призма вписана в шар. Найдите объем шара, если сторона основания призмы равна 3 см, а ее высота – $2\sqrt{6}$ см.

б) Найдите объем шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 дм, 3 дм и 6 дм.

275. а) Шар из алюминия имеет массу $93{,}6\pi$ грамма. Найдите радиус этого шара, если известно, что плотность алюминия равна 2,6 г/см^3.

б) Масса свинцового шара равна 0,5 кг. Найдите с точностью до 0,1 см диаметр этого шара. (Плотность свинца равна 11,4 г/см^3.)

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

276. Два металлических куба с ребрами 3,4 дм и 1,4 дм переплавлены в один куб. Сравните длину ребра этого куба с 3,5 дм.

277. Объем правильной треугольной призмы равен $20\sqrt{3}$ см^3. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. Найдите высоту призмы.

278. В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань – прямоугольники, их площади соответственно равны 20 дм^2 и 24 дм^2, а угол между их плоскостями 30°. Другая его боковая грань имеет площадь 15 дм^2. Найдите объем параллелепипеда.

279. Из жести вырезан круговой сектор радиусом 18 см и дугой 240°, который свернут в коническую воронку. Сколько целых литров воды вмещает эта воронка?

280. Прямоугольная трапеция, основания которой равны $\sqrt{3}$ дм и $4\sqrt{3}$ дм, вращается вокруг ее меньшей боковой стороны. Найдите объем тела вращения, если известно, что большая боковая сторона трапеции составляет с ее меньшим основанием угол 150°.

281. Около правильной треугольной призмы описан цилиндр. Высота призмы равна 8 см, а диагональ ее боковой грани равна 10 см. Найдите объем цилиндра.

282. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен шар наибольшего радиуса. Сколько процентов материала сточено?

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

По историческим сведениям формулы объемов пирамиды и конуса впервые были найдены древнегреческим ученым Демокритом Абдерским (460–370 гг. до н. э.).

Демокрит Абдерский

Б. Кавальери

В XII книге «Начал» Евклида было изложено доказательство утверждения, что треугольные пирамиды, имеющие равные высоты и равновеликие основания, равновелики. В Древней Греции более полно теория объемов тел была предложена Архимедом.

Большой вклад в развитие теории объемов внес итальянский ученый Бонавентура Кавальери (1598–1647), предвосхитивший идеи применения интеграла для вычисления объемов тел.

1. Используя интернет-ресурсы, узнайте, в чем заключается «принцип Кавальери» для нахождения объемов тел.

2. Решите задачи Архимеда:

а) найти радиус шара, имеющего объем конуса, радиус основания которого равен r, а высота равна h;

б) докажите, что цилиндр, основанием которого является большой круг шара, а высота равна его диаметру, имеет объем, равный $\frac{3}{2}$ объема шара.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 10–11 КЛАССОВ

Уровень А

283. Через сторону правильного n-угольника проведена плоскость. Найдется ли его сторона, параллельная построенной плоскости, если: а) $n = 3$; б) $n = 6$? Ответ объясните.

284. Можно ли провести прямую, параллельную любым двум плоскостям?

285. Верно ли, что две плоскости параллельны, если две прямые одной из них соответственно параллельны двум прямым другой?

286. Сторона правильного треугольника лежит в некоторой плоскости. Может ли быть перпендикулярна этой плоскости: а) другая его сторона; б) медиана треугольника?

287. Могут ли быть перпендикулярными одной плоскости две стороны: а) треугольника; б) трапеции; в) правильного шестиугольника?

288. Правильно ли дано определение понятия? Если нет, то укажите ошибку:

а) две прямые в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек;

б) две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек;

в) пирамидой называется многогранник, одна грань которого многоугольник, а остальные – треугольники.

289. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Прямые AD и BC перпендикулярны этой плоскости и пересекают ее в точках D и C соответственно. Найдите длину отрезка AB, если $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $OC = 1{,}5$ см.

290. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$ см, а боковое ребро – $3\sqrt{3}$ см. Через ребро AB и середину стороны A_1C_1 проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы и площадь сечения.

291. Верно ли, что середина отрезка с концами:

а) $A(3; 5; -7)$ и $B(-3; 9; 7)$ принадлежит оси ординат;

б) $C(3; 4; 5)$ и $D(10; 12; -5)$ принадлежит плоскости Oxy?

292. Верно ли, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки A, B, C лежат: а) на одной прямой; б) на параллельных прямых?

293. Найдите все значения m, при которых векторы $\vec{a}\,(m;\ 4;\ 2)$ и $\vec{b}\,(m+2;\ 6;\ 3)$: а) коллинеарны; б) компланарны; в) перпендикулярны.

294. Долина Киин-Кериш напоминает марсианские пейзажи. Сколько гектаров занимает эта долина, если их количество равно числу, выражающему площадь поверхности куба, ребро которого равно $5\sqrt{2}$ дм?

Долина Киин-Кериш, ВКО

295. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 0,5 м и шириной 37 см. Найдите его высоту, если вместимость аквариума 0,074 м^3.

296. Вычислите площадь полной поверхности:
а) правильной треугольной призмы, каждое ребро которой 6 см;
б) правильного тетраэдра, ребро которого 10 см.

297. Высота конуса равна половине образующей, а радиус его основания равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности этого конуса.

298. Радиусы оснований усеченного конуса равны 8 см и 12 см. Найдите площадь его боковой поверхности, если образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 45°.

299. Сравните объем шара радиуса 1 дм с объемом правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно 2 дм.

Уровень В

300. Дана трапеция $ABCD$, точки M и N – середины ее оснований AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XN} = 0{,}5(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$, где X – произвольная точка пространства.

301. Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ 4;\ 5)$ и $\vec{b}\,(1;\ 0;\ -1)$. Найдите скалярный квадрат суммы этих векторов.

302. Покажите, как можно вырезать развертку поверхности правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1 дм, из квадратного листа картона со стороной, равной 2 дм. Чему равна площадь полной поверхности этой пирамиды?

303. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

304. В основание конуса вписан квадрат со стороной 10 см. Сечение конуса плоскостью, проходящей через сторону квадрата и вершину конуса, имеет угол при вершине 60°. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса.

305. Высшей точкой Казахстана является пик Хан-Тенгри (горы Тянь-Шань). Какова его высота, если она выражается в метрах тем же числом, что и объем тетраэдра в м^3, боковые ребра которого перпендикулярны и равны 5 м, 6 м и 1339 м?

Пик Хан-Тенгри, Алматинская область

306. В цилиндрическую мензурку с водой, наполненную до некоторого уровня, опущены 4 металлических шарика, радиус каждого из которых 5 мм. На сколько миллиметров поднялся уровень воды в мензурке, если диаметр ее основания равен 2,5 см? Ответ дайте с точностью до 0,1 мм.

307. Найдите объем шара, если известно уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ его поверхности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Изображение на плоскости пространственных фигур осуществляется обычно параллельным проектированием. Этот способ изображения фигуры состоит в следующем. Берем произвольную прямую m, пересекающую плоскость α, и проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную прямой m. Тогда точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью α называется изображением точки A, при этом говорят, что прямая m задает направление проектирования. Все прямые, каждая из которых параллельна прямой m, задают одно и то же направление проектирования. Эти прямые вместе с прямой m называются *проектирующими прямыми*. Построив изображение каждой точки фигуры, получаем изображение самой фигуры (рисунок 128).

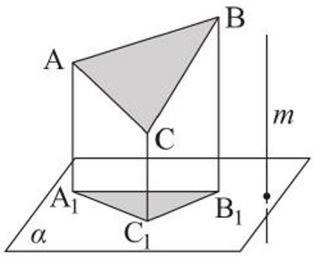


Рисунок 128

При параллельном проектировании для прямых, не параллельных прямой, задающей направление проектирования, и для лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:

1) проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок;

2) проекции параллельных прямых параллельны или совпадают;

3) отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.

Из свойств параллельного проектирования следует, что:

- середина отрезка изображается серединой отрезка – его проекции;
- проекциями медиан треугольника будут медианы треугольника, полученного при его проектировании;
- параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

Было бы нецелесообразно назвать изображением фигуры лишь ее параллельную проекцию на некоторую плоскость. В таком случае мы не смогли бы изобразить, например, в тетради или на доске прямоугольный параллелепипед с измерениями 10 м, 10 м, 20 м.

В стереометрии изображением данной фигуры (оригинала) **называют любую фигуру, подобную фигуре, которая является параллельной проекцией данной на некоторую плоскость**. Изображение фигуры должно быть наглядным и давать верное представление об изображаемой фигуре. Рассмотрим способы изображения некоторых фигур.

Треугольник. Каждый треугольник можно параллельно спроектировать так, что в проекции получится **треугольник любого вида**. Действительно, пусть даны два различных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Покажем, что $\Delta A_1B_1C_1$ может быть проекцией ΔABC.

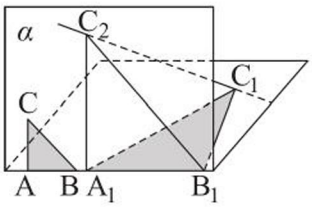


Рисунок 129

Проведем через прямую A_1B_1 плоскость α, пересекающую плоскость $\Delta A_1B_1C_1$. Построим в этой плоскости $\Delta A_1B_1C_2$, подобный ΔABC (рисунок 129). Тогда при проектировании на плоскость α в направлении, заданном прямой C_1C_2, $\Delta A_1B_1C_1$ проектируется на $\Delta A_1B_1C_2$ так, что его проекцией будет треугольник, подобный ΔABC. Поэтому изображением данного ΔABC может быть $\Delta A_1B_1C_1$.

В частности, всякий треугольник можно спроектировать так, что получится равносторонний треугольник, и наоборот, изображением равностороннего треугольника может быть любой треугольник.

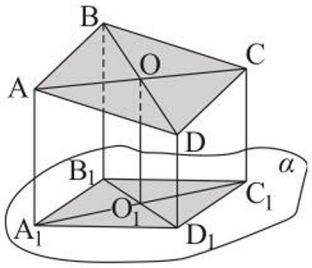


Рисунок 130

Параллелограмм. Изображением параллелограмма может быть **любой параллелограмм**, так как при параллельном проектировании параллельные прямые изображаются параллельными прямыми (рисунок 130).

В частности, изображением квадрата, ромба также может быть параллелограмм любой формы.

Трапеция. Изображением трапеции является **трапеция**, в которой отношение длин оснований равно отношению длин оснований трапеции-оригинала, так как при параллельном проектировании параллельные прямые изображаются параллельными прямыми и сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на них.

Правильный шестиугольник. Пусть дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рисунок 131, *а*). Проведем его диагонали AC и DF, по-

лучим прямоугольник $ACDF$ и два равных треугольника, причем $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Отсюда следует построение изображения (рисунок 131, *б*). Построим изображение прямоугольника $ACDF$ – произвольный параллелограмм $A_1C_1D_1F_1$ и изображение ΔABC – произвольный $\Delta A_1B_1C_1$. Затем построим параллельные отрезки: $D_1E_1 \parallel A_1B_1$; $F_1E_1 \parallel B_1C_1$. Полученный шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ является изображением правильного шестиугольника $ABCDEF$.

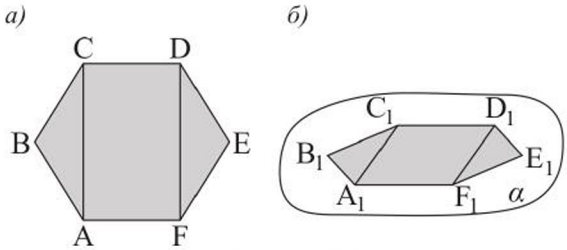


Рисунок 131

О к р у ж н о с т ь. Параллельная проекция окружности является эллипсом (рисунок 132). Из свойств параллельного проектирования следует, что проекция центра O данной окружности является центром симметрии эллипса (точка O_1 на рисунке 132, *б*). Эту точку называют центром эллипса. Эллипс – фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных ее точек неизменна.

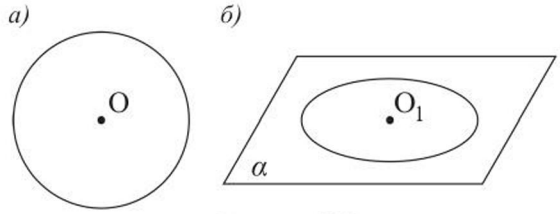


Рисунок 132

Т е т р а э д р. Пусть $ABCD$ – произвольный тетраэдр, а точки A_1, B_1, C_1, D_1 – проекции его вершин (рисунок 133). Тогда фигура, состоящая из четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ с выделенными его диагоналями, является изображением тетраэдра $ABCD$.

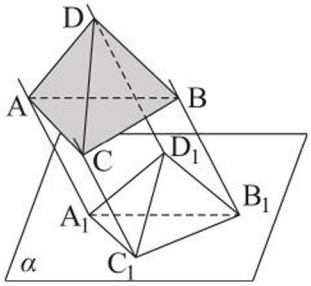


Рисунок 133

П и р а м и д а. Изображение основания пирамиды строят, опираясь на свойства параллельного проектирования, а за изображение ее вершины

принимают любую точку, не принадлежащую изображению основания. Например, на рисунке 134, *а* дано изображение правильной четырехугольной пирамиды.

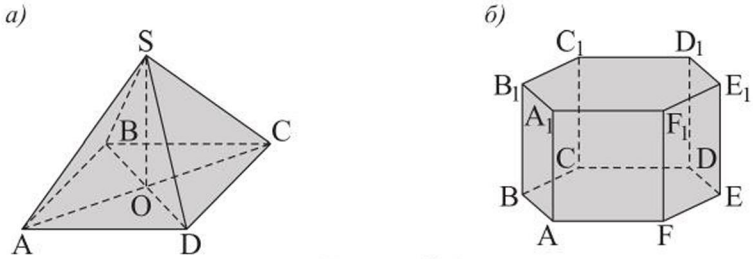


Рисунок 134

П р и з м а. Изображение одного основания строят, опираясь на свойства параллельного проектирования. Изображения боковых ребер строятся однозначно, так как они параллельны и равны. Построив второе основание, получаем изображение призмы. Например, на рисунке 134, *б* дано изображение правильной шестиугольной призмы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Тестовые задания для повторения курса геометрии 10–11 классов

Аксиомы стереометрии.
Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

1. Дан тетраэдр, в котором два его ребра изображены параллельными отрезками. Параллельны ли эти ребра в самом тетраэдре?

1) Да;
2) нет;
3) да, если эти ребра равны;
4) да, если тетраэдр правильный;
5) зависит от вида тетраэдра.

2. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Точки M, N, P, K – середины отрезков AB, BC, CD, AD соответственно. Укажите верное утверждение: а) $MN \parallel KP$; б) $KM \parallel PN$; в) прямые KN и PM пересекаются; г) прямые KN и PM – скрещивающиеся.

1) а, б;
2) в;
3) г;
4) а, б, г;
5) а, б, в.

3. Если каждая из двух прямых, не лежащих в одной плоскости, параллельна некоторой плоскости, то эти прямые:

1) пересекающиеся;
2) скрещивающиеся;
3) параллельные;
4) пересекающиеся или скрещивающиеся;
5) параллельные или скрещивающиеся.

4. Если прямые a, b, c лежат в плоскости α, причем каждая из них параллельна плоскости β, то плоскости α и β:

1) параллельны;
2) не параллельны;
3) пересекаются;
4) могут быть либо параллельными, либо пересекающимися;
5) совпадают.

Углы и расстояния в пространстве

5. Расстояние от точек A и B до плоскости равны соответственно a и b, причем отрезок AB пересекает эту плоскость. Тогда расстояние от середины этого отрезка до плоскости равно:

1) $0{,}5a - b$;
2) $0{,}5|a - b|$;
3) $0{,}5(a - b)$;
4) $0{,}5(a + b)$;
5) $|a - b|$.

6. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{2}$ дм. Расстояние между двумя его ребрами, лежащими на скрещивающихся прямых, равно:

1) 1 дм; 3) $0{,}5\sqrt{2}$ дм; 5) 2 дм.
2) 1,5 дм; 4) $0{,}3\sqrt{3}$ дм;

7. Два равных квадрата лежат в перпендикулярных плоскостях и имеют общую сторону. Угол между диагоналями этих квадратов, проведенных из их общей вершины, равен:

1) 90°; 3) 30°; 5) 120°.
2) 45°; 4) 60°;

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Угол между прямыми A_1D и D_1C равен:

1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 60°.

9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Величина угла между прямыми AB_1 и A_1C равна:

1) 45°; 3) 60°; 5) 90°.
2) ≈ 55°; 4) ≈ 72°;

Прямоугольная система координат и векторы в пространстве

10. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $A(5; 0; 0)$, $C(0; 5; 0)$, $B_1(0; 0; 3)$. Тогда координаты точки пересечения диагоналей грани BB_1C_1C равны:

1) (2,5; 2,5; 2,5); 3) (2; 2; 0); 5) (0; 2,5; 0).
2) (0; 2,5; 1,5); 4) (0; 2; 2);

11. Даны точки $A(3; 4; 5)$ и $B(-2; 1; 6)$. Тогда координаты точки C, принадлежащей плоскости xOz, такой, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, равны:

1) $\left(-\frac{11}{3}; 0; \frac{19}{3}\right)$; 3) $\left(\frac{29}{3}; 0; \frac{11}{3}\right)$; 5) $\left(0; \frac{11}{5}; \frac{28}{5}\right)$.
2) (28; 19; 0); 4) $\left(0; \frac{29}{5}; \frac{22}{5}\right)$;

12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Тогда $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$ равно:

1) 1; 3) –1; 5) $\sqrt{2}$.
2) 0; 4) 2;

13. Угол между вектором $\vec{a}(1; -\sqrt{3}; 0)$ и осью Oy равен:

1) 60°; 4) 150°;
2) 60° или –60°; 5) 30°.
3) 120°;

14. Векторы $\vec{a}$ (–6; 0; 2t) и $\vec{b}$ (3; 0; t) перпендикулярны, если t равно:

1) ±9; 3) –9; 5) ±3.

2) 9; 4) 0;

Многогранники

15. Укажите верные утверждения: а) основания призмы равны; б) грани призмы равны; в) все боковые грани призмы являются параллелограммами; г) все грани призмы являются параллелограммами; д) все боковые ребра призмы параллельны между собой.

1) а, в, д; 3) все, кроме г; 5) все, кроме б.

2) все; 4) а, г;

16. Укажите верные утверждения. Не существует пирамиды, имеющей ровно: а) пять; б) шесть; в) семь; г) девять; д) десять ребер.

1) а; 3) а, в, г; 5) все, кроме а.

2) в; 4) а, в;

17. Какие из тел являются правильными многогранниками: а) куб; б) правильная призма; в) правильная пирамида; г) тетраэдр, в котором все ребра равны; д) многогранник, в котором все грани – равные n-угольники?

1) а, б, в; 3) все, кроме б; 5) а, д.

2) все; 4) а, г;

18. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 14 см, а сторона основания равна 16 см. Тогда боковое ребро этой пирамиды равно:

1) 15 см; 3) 20 см; 5) $\sqrt{300}$ см.

2) 18 см; 4) $\sqrt{330}$ см;

19. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 5 см, а боковое ребро – 6 см. Тогда площадь поверхности этой призмы равна:

1) $(90 + 12{,}5\sqrt{3})$ см^2; 3) 110 см^2; 5) 120 см^2.

2) $(80 + 18\sqrt{3})$ см^2; 4) 105 см^2;

20. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды и ее высота равны a. Тогда площадь полной поверхности этой пирамиды равна:

1) $\frac{3a^2\sqrt{10}}{2}$; 3) $3a^2\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $3a^2\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) $1{,}5a^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$; 4) $\frac{3a^2\sqrt{5}}{2}$;

Тела вращения и их элементы

21. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна 1 дм^2. Тогда площадь основания цилиндра равна:

1) $0{,}25\pi$ дм^2; 3) 1 дм^2; 5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ дм^2.

2) 0,8 дм^2; 4) $0{,}5\pi$ дм^2;

22. Высота цилиндра 6 см, а радиус его основания 5 см. Тогда площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно его оси на расстоянии 4 см от нее, равна:

1) $30\sqrt{2}$ см^2; 3) 24 см^2; 5) 30 см^2.

2) $24\sqrt{3}$ см^2; 4) 36 см^2;

23. Каким должен быть радиус основания равностороннего цилиндра, чтобы площадь его боковой поверхности была равна площади поверхности шара радиуса 1,5 дм?

1) 1 дм; 3) 1,5 дм; 5) 0,5 дм.

2) 2 дм; 4) $\sqrt{\pi}$ дм;

24. Площадь основания конуса равна 1 м^2, а его образующая наклонена к основанию под углом 60°. Площадь боковой поверхности этого конуса равна:

1) 2 м^2; 3) 1,5 м^2; 5) $0{,}75\sqrt{3}$ м^2.

2) 1 м^2; 4) $\sqrt{3}$ м^2;

25. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину его высоты проведено сечение, параллельное основанию. Тогда площадь сечения равна:

1) 8 дм^2; 3) 6 дм^2; 5) 7 дм^2.

2) 10 дм^2; 4) 9 дм^2;

26. На поверхности шара радиуса 13 см даны три точки, расстояния между которыми равны 6 см, 8 см, 10 см. Тогда расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки, равно:

1) 10 см; 3) 6 см; 5) 7 см.

2) 12 см; 4) 8 см;

27. Шар радиуса 3 дм, касается всех сторон правильного треугольника со стороной 6 дм. Тогда расстояние от центра шара до плоскости этого треугольника равно:

1) 2,5 дм; 3) $\sqrt{6}$ дм; 5) $\sqrt{5}$ дм.

2) 3 дм; 4) $2\sqrt{2}$ дм;

Объемы тел

28. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то объем нового куба будет больше объема первоначального куба на 98 см^3. Чему равен объем первоначального куба?

1) 30 см^3; 3) 24 см^3; 5) 36 см^3.
2) 27 см^3; 4) 49 см^3;

29. Диагональ прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием равна 3,5 м, а диагональ его боковой грани равна 2,5 м. Тогда объем этого параллелепипеда равен:

1) 4 м^3; 3) 3,5 м^3; 5) 3 м^3.
2) 6 м^3; 4) 2,5 м^3;

30. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 дм и 17 дм и образуют угол 30°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 1 м^2. Тогда объем этого параллелепипеда равен:

1) 136 дм^3; 3) 1,5 м^3; 5) 2 м^3.
2) 148 дм^3; 4) 1,6 м^3;

31. Ребро правильного тетраэдра равно 6 м. Тогда его объем равен:

1) 24 м^3; 3) $24\sqrt{2}$ м^3; 5) 25 м^3.
2) $18\sqrt{2}$ м^3; 4) $24\sqrt{3}$ м^3;

32. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $5\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, а ее боковое ребро наклонено к основанию под углом 60°. Тогда объем этой пирамиды равен:

1) $78\sqrt{3}$; 3) $234\sqrt{3}$; 5) $80\sqrt{3}$.
2) $58\sqrt{3} + 50\sqrt{6}$; 4) $\frac{78\sqrt{3}}{3}$;

33. Объем цилиндра равен 36 см^3, его высоту увеличили в 3 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Объем нового цилиндра равен:

1) 36 см^3; 3) 12 см^3; 5) 6 см^3.
2) 24 см^3; 4) 18 см^3;

34. Образующая конуса равна 2 м и составляет с плоскостью его основания угол 30°. Объем этого конуса равен:

1) 2π м^3; 3) 3π м^3; 5) $\sqrt{3}\pi$ м^3.
2) π м^3; 4) $1{,}5\pi$ м^3;

35. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Тогда их объемы относятся как:

1) 8 : 27; 3) 16 : 81; 5) 8 : 18.
2) 4 : 9; 4) 64 : 729;

36. Резервуар состоит из цилиндра, закрытого сверху полушаром. Внутренний диаметр основания цилиндра равен 12 м, а высота цилиндра – 4 м. Емкость этого резервуара равна:

1) 800 $м^3$; 3) 300π $м^3$; 5) 288π $м^3$.
2) 750 $м^3$; 4) 298π $м^3$;

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ УГЛОВ ОТ 0° ДО 90°

A	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*	*A*	sin *A*	*B*
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*	*A*	cos *B*	*B*

ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТАНГЕНСОВ УГЛОВ ОТ 0° ДО 89°

A	tg *A*	*A*	tg *A*	*A*	tg *A*
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

2. а) Да; б) нет. **3.** а) Могут быть параллельными или пересекающимися; б), в) – пересекаются. **4.** а) Нет; б) могут быть параллельными или пересекающимися. **5.** Нет. **6.** Используйте теорему о трех перпендикулярах. **7.** $2\sqrt{2}$ м. **8.** 15 см или 20 см. **9.** $6\sqrt{2}$. **10.** 60°. **11.** $l = \frac{nh}{\sin\alpha}$. **12.** ≈ 84°. **13.** $8\sqrt{2}$ см. **14.** а) 4; б) 6; в) 4. **16.** а) 8; б) 12; в) 6; г) 3. **17.** а) 270°; б) 180°. **18.** 5. **19.** г). **20.** а) 4 см; б) $4\sqrt{2}$ см; в) $4\sqrt{3}$ см; г) 96 см^2. **21.** 588 см^2. **23.** Может. **24.** а) 48 м^2; б) 84 м^2. **25.** а) 28 см; б) 11,52 дм^2. **26.** 22 см. **27.** 26 см. **28.** 10 см. **29.** 264 м^2. **30.** 30°. **31.** $18\sqrt{6}$ дм^2. **33.** Не существует. **36.** 6 см^2. **37.** $3\sqrt{2}$ м^2. **38.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 45°. **39.** а) 5; б) 5-угольник. **40.** Верные утверждения: а), в), д). **41.** б) Есть. **43.** в) Неверно. **45.** $14\sqrt{3}$. **46.** 2 дм и 4 дм. **47.** а) 188 дм^2; б) $(120\sqrt{3} + 230)$ м^2. **48.** а) 78 дм^2; б) 1320 см^2. **49.** а) $96\sqrt{3}$ см^2; б) $(12\sqrt{3} + 24)$ дм^2. **50.** а) $(40\sqrt{2} + 126)$ см^2; б) 200 см^2. **51.** а) 45 см^2; б) $(20\sqrt{2} + 40)$ см^2. **52.** а) $(64\sqrt{3} + 24)$ м^2; б) $(40\sqrt{13} + 60)$ см^2. **53.** а) 48 м^2; б) 336 дм^2. **54.** а) 96 см^2; б) $(16\sqrt{3} + 64)$ см^2. **55.** $(60\sqrt{2} + 72)$ м^2. **58.** а), в), г) – нельзя. **59.** а) 17 см; б) $4\sqrt{2}$ дм. **60.** а) 60°; б) 45°; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ см. **61.** а) 6 см; б) 60°; в) $2\sqrt{6}$ см. **62.** в) Обратные утверждения верны, сформулируйте их. **63.** а) $5\sqrt{3}$ дм, основание высоты – середина гипотенузы; б) 8 см, основание высоты – центр окружности, описанной около данного тупоугольного треугольника. **64.** 3 м. **66.** Прямые, содержащие боковые ребра, не сходятся в одной точке. **67.** а) Верно; б) может; в) нет. **68.** б) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **69.** Верно. **70.** а) $2\sqrt{2}$ см; б) 24 см^2. **71.** 4 см. **72.** 14 см. **73.** 11 см. **74.** $108\sqrt{3}$ см^2, $432\sqrt{3}$ см^2. **75.** 2. **76.** ≈ 35 м. **77.** а) 7 граней, 15 ребер, 10 вершин; б) 7 граней, 12 ребер, 7 вершин. **78.** а) $(8\sqrt{3} + 48)$ см^2; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **79.** 384 см^2. **80.** а) $(256 + 64\sqrt{3})$ см^2. **81.** а) 90°; б) $2\sqrt{3}$ см. **82.** 16 см^2. **83.** $\frac{64\sqrt{6}}{6}$ см^2, $\frac{32\sqrt{15}}{3}$ см^2. **84.** 126 см^2. **85.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) $75\sqrt{3}$ см^2. **86.** 4 см. **87.** $(150\sqrt{3} + 240)$ см^2. **88.** а) 36 м^2; б) $16\sqrt{3}$ м^2. **89.** а) 230 см^2; б) $50\sqrt{2}$ см^2. **90.** а) ≈ 82 300 м^2; б) ≈ 8595 м^2. **91.** а) $24\sqrt{3}$ см^2; б) $12\sqrt{39}$ см^2. **92.** $16\sqrt{2}$ дм^2. **93.** а) 45°; б) $8\sqrt{3}$ дм^2. **94.** У второй пирамиды площадь боковой поверхности больше. **96.** ≈ 13,7 см. **97.** $(63 + 9\sqrt{21})$ м^2. **98.** $(2 + \sqrt{2})$ дм^2. **99.** а) $64\sqrt{3}$ см^2; б) $4\sqrt{7}$ дм^2. **100.** а) $(63\sqrt{5} + 56)$ см^2; б) 245 дм^2.

101. а) $(52+40\sqrt{3})$ см^2; б) $43\sqrt{3}$ см^2. **102.** а) $(100+140\sqrt{2})$ см^2; б) $276\sqrt{3}$ см^2. **103.** а) $360\sqrt{3}$ см^2; б) $180\sqrt{3}$ см^2. **104.** 280 дм^2. **105.** а) $126\sqrt{3}$ см^2; б) $64\sqrt{2}$ см^2. **106.** 32 см^2 и 200 см^2. **107.** $(20\sqrt{3}+90)$ см^2. **108.** 360 см^2. **109.** $(18+6\sqrt{3})$ дм^2. **110.** а) 211,68 см^2. **111.** Верно. **112.** 294 см^2. **113.** $4{,}5\sqrt{7}$ дм^2. **114.** $27\sqrt{15}$ см^2. **115.** 72 см^2. **116.** а), б) – неверно, приведите примеры таких многогранников. **118.** а) Не является; б) является. **119.** а) 180°; д) 324°. **120.** а) Нельзя; б), в) – можно. **121.** Верно. **122.** $\sqrt{3}$. **123.** а) 60° или 90°; б) $-\frac{1}{3}$. **124.** а) 2 см; б) $2\sqrt{2}$ см. **125.** $\frac{1}{2}$. **126.** а) Не является; б) 1 дм. **127.** $9\sqrt{3}$ м^2. **128.** а) 3 см; б) 4 см. **130.** $2\sqrt{3}$ м^2. **131.** $\frac{1}{9}$. **132.** а) Верно; б) $16\sqrt{3}$ дм^2. **133.** $(32+96\sqrt{3})$ см^2. **135.** 4,1 м. **136.** $6\sqrt{3}$ дм^2. **137.** 800 дм^2. **138.** 315 м^2. **139.** 26 м^2. **140.** 168 дм^2. **141.** 57 м^2. **142.** б) Является. **143.** $8\sqrt{2}$ см. **144.** Наибольшую площадь имеет икосаэдр, наименьшую – октаэдр. **145.** На рисунке б). **146.** а) 8 см; б) 12 см. **147.** а) 1 см; б) 10 см. **148.** а) 192 см^2; б) $8\sqrt{10}$ см. **149.** 12 см. **150.** $6\sqrt{3}$ см. **151.** 10 дм^2. **152.** 17 дм^2. **153.** $8\sqrt{2}$ см. **154.** Рисунок в). **155.** Существует. **156.** а) 224π см^2; б) 168π см^2. **157.** 150π см^2. **158.** 4π дм^2. **159.** а) $\sqrt{2}$ м; б) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ м. **160.** 24π дм^2. **161.** $\frac{9}{\pi^2}$ дм^2. **162.** а) $\left(\frac{1}{2\pi}+1\right)$ дм^2; б) $\left(\frac{6}{\pi}+4\sqrt{3}\right)$ дм^2. **163.** $32\pi(1+\sqrt{2})$ см^2. **164.** Хватит. **166.** 16π см^2 и 64π см^2. **167.** а) 6 см и $6\sqrt{2}$ см; б) 4 см и 8 см. **168.** Верно. **169.** а) $3\sqrt{7}$ см^2; б) $4\sqrt{15}$ см^2. **170.** $\approx 53°$. **171.** $\approx 7{,}4$ см. **172.** $24\sqrt{2}$ см^2. **173.** а) Не может; б) может. **174.** 1 : 2 : 3. **175.** а) 60π дм^2; б) $16\pi\sqrt{2}$ дм^2. **176.** $\approx 15{,}7$ м^2. **177.** а) 60°; б) $\approx 71°$. **178.** 2 дм. **179.** а) 180°; б) 216°. **180.** 13 см и $\left(138\frac{6}{13}\right)^{\circ}$. **181.** $12\sqrt{3}$ дм^2. **182.** а) $64\pi\sqrt{3}$ см^2; б) $67{,}2\pi$ см^2. **183.** 176 см^2. **184.** а) 3 м; б) $\sqrt{3}$ м. **185.** а) 2,4 дм; б) 6 дм. **186.** а) 2 см и 6 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **187.** а) 9π см^2; б) 4 см и 12 см. **188.** Подойдет. **189.** $\approx 1{,}67$ м. **190.** 4 см и 8 см. **191.** а) 54 см; б) 1 м. **192.** 64π см^2. **193.** 167π см^2. **194.** 308π см^2. **195.** 4 см и 10 см. **196.** а) ≈ 853 см^2; б) ≈ 377 см^2. **197.** Существует, приведите пример. **198.** $72\pi\sqrt{3}$ см^2. **199.** $10\pi\sqrt{2}$ см^2. **200.** $\approx 23{,}7$ см. **201.** ≈ 10 см. **202.** а) 8 см; б) $2\sqrt{3}$ см. **203.** а) 192π см^2; б) 16π см^2. **204.** $36\sqrt{3}$ см^2. **205.** 8 см. **206.** Можно. **207.** а) Пересекает плоскость yOz; б) 4. **208.** $\approx 20\,000$ км. **209.** а) Верно; б) увеличится в 9 раз. **210.** 32π см^2. **211.** $13\frac{4}{9}$. **212.** 164π см^2. **213.** а) На никелировку двух шаров; б) площадь полной поверхности тетраэдра. **214.** $\approx 20\,106$ м^2. **215.** 44π. **216.** а) 64π см^2; б) 100π см^2. **218.** $S=6\pi R^2$. **219.** 80π дм^2. **220.** 54π см^2.

221. 12π см^2. **222.** 180°. **223.** 9π см^2. **224.** $(160\pi + 128\pi\sqrt{2})$ см^2. **225.** $4\sqrt{2}$ см. **226.** Площади равны. **227.** Неверно. **228.** 1 см^3. **229.** 2 дм^3. **230.** 45 дм^3. **231.** 20,7 м^3. **232.** 60 см^3. **233.** 72 см^3. **234.** 100 м^3. **235.** ≈ 1,5 м. **236.** 120 см^3. **237.** $420\sqrt{2}$ см^3. **238.** а) Равны; б) равны. **239.** а) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **240.** 81,92 см^3. **241.** 6 дм. **242.** а) 84 дм^3; б) 21 дм^3. **243.** $121\frac{1}{3}$ м^3. **244.** Объемы пирамид PCC_1B и PC_1B_1B равны, так как в них равны основания – треугольники CC_1B и C_1B_1B и общая высота, проведенная из вершины P. Объемы пирамид $PABC$ и PC_1B_1B также равны, так как, если принять за основания их равные грани APB и PB_1B соответственно, то высоты, проведенные к ним из точек C и C_1 равны, поскольку $CC_1 \parallel (APB_1)$. Следовательно, объемы пирамид $PABC$, PCC_1B и PC_1B_1B равны. **245.** Можно, например, если построить два ее сечения, которые содержат боковое ребро усеченной пирамиды и делят сторону основания на 3 равные части. **246.** Верно. **247.** 455 т. **248.** а) В 25 раз; б) в 5 раз. **249.** 24 дм^3. **250.** а) 96π см^3; б) 144π см^3. **251.** 16π см^3. **252.** $\frac{128}{\pi}$ см^3. **253.** ≈ 157 см^3. **254.** 21π см^3. **255.** 2 или $\frac{1}{2}$. **256.** а) 250π см^3; б) 128π см^3. **257.** ≈ 1872 г. **259.** $24\pi\sqrt{3}$ см^3. **260.** а) 96π см^3; б) 324π дм^3. **261.** а) 84π дм^3; б) $21\pi\sqrt{3}$ дм^3. **262.** 10 л. **263.** $\frac{8}{7}$. **264.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **265.** 1404π см^3. **266.** а) 224π см^3; б) 457π см^3. **267.** В 8 раз. **268.** $\sqrt[3]{35}$ см. **269.** $4{,}5\pi$ дм^3. **270.** а) 36π см^3; б) $\frac{9\pi}{16}$ см^3. **271.** $\frac{9\pi}{32}$ дм^3. **272.** $V_4 = V_1 + V_2 + V_3$. **273.** $\frac{32\pi}{3}$ дм^3. **274.** а) 36π см^3; б) $\frac{343\pi}{6}$ дм^3. **275.** а) 3 см; б) ≈ 4,4 см. **276.** $a < 3{,}5$ дм. **277.** 5 см. **278.** 60 дм^3. **279.** 2 л. **280.** 63π дм^3. **281.** 96π см^3. **282.** $33\frac{1}{3}$ %. **283.** а) Нет; б) найдется. **284.** Можно, объясните как. **285.** Неверно. Сформулируйте правильное утверждение. **286.** а) Нет; б) может. **287.** а) Нет; б), в) – могут. **288.** а) Нет, они могут быть скрещивающимися; б) да; в) нет, так как не указано, что треугольники имеют общую вершину. **289.** 10 см. **290.** 60° и $18\sqrt{3}$ см^2. **291.** а) и б) – верно. **292.** а) Верно; б) нет. **293.** а) $m = 4$; б) при любых m; в) нет таких значений m. **294.** 300 га. **295.** 40 см. **296.** а) $(18\sqrt{3} + 108)$ см^2; б) $100\sqrt{3}$ см^2. **297.** $(12 + 8\sqrt{3})\pi$ см^2. **298.** $80\pi\sqrt{2}$ см^2. **299.** $V_{ш.} > V_{пр.}$. **301.** 48. **302.** $(1 + \sqrt{3})$ дм^2. **303.** 48 см^2. **304.** $50\pi\sqrt{2}$ см^2. **305.** 6695 м. Примите за основание тетраэдра прямоугольный треугольник с катетами 5 м и 6 м, тогда высота тетраэдра будет равна 1339 м. **306.** ≈ 4,3 мм. **307.** $\frac{7\pi\sqrt{7}}{6}$ куб. ед.

Ответы к тестовым заданиям
для повторения курса геометрии 10–11 классов

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2)	5)	2)	4)	2)	1)	4)	5)	5)	2)	1)	3)
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
4)	5)	1)	3)	4)	2)	1)	2)	1)	4)	3)	1)
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
4)	2)	3)	2)	5)	1)	2)	1)	3)	2)	1)	5)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

2. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

3. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: учебник для учащихся 9 класса общеобразовательной школы + CD. – Кокшетау: Келешек-2030, 2019.

4. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия. Учебник для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы. В двух частях. 10 класс (ч. 1). – Кокшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020.

5. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Список фотоснимков,
использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Национальный музей Казахстана – 13 стр.
2. Здание ЭКСПО-2017, г. Нур-Султан – 57 стр.
3. Самый большой шатер в мире – «Хан Шатыр», г. Нур-Султан – 88 стр.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
для учащихся 10 (ч. 1), 11 (ч. 2) классов
общественно-гуманитарного направления
общеобразовательной школы
В двух частях
11 класс (ч. 2)
+CD

Редактор	С. Ш. Алибеков
Художник	А. Б. Жусупов
Технический редактор	Б. К. Еслямов
Дизайн	Е. Е. Велькер
Корректор	М. О. Джусупова

Код **6**13079

ИП Келешек-2030 баспасы
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная),
+7 708 444 18 64, 8 (7162) 44-18-64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz