Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

Екі бөлімді
11-сынып (2-б.)

+CD 3D

Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым министрлігі ұсынған

K 20 30
KELESHEK
2030
КӨКШЕТАУ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72
С64

Солтан Г. Н.

С64 Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған оқулық. Екі бөлімді. 11-сынып (2-б.) +CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Көкшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020. – 194 б.

ISBN 978-601-317-522-5
ISBN 978-601-317-524-9

Оқулықтың электрондық нұсқасы: http://keleshek-2030.kz/books/geom_emn_11kz.php

Ұсынылып отырған оқулық Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилованың авторлығымен «Келешек-2030» баспасында білім берудің жаңартылған мазмұндағы оқу бағдарламасы бойынша әзірленген «Геометрия» оқулықтарының топтамасын жалғастыруда. Оқулық жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы сыныптардың оқушыларына арналған және екі бөлімнен тұрады: 10-сынып – 1-бөлім, 11-сынып – 2-бөлім.

Оқулық 3D форматындағы сызбалардың модельдерін қамтиды. 3D шартты белгісі Simple Study мобильді қосымшасы арқылы объектінің үшөлшемді кескінін алуға болатынын білдіреді.

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151я72

ISBN 978-601-317-524-9
ISBN 978-601-317-522-5

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқушылар! Бұл оқу жылында «Геометрия» пәнін оқуды аяқтайсыңдар. Бұл оқулықта жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныптағы геометрия курсының негізгі мазмұны баяндалған. Теориялық материал жете әрі бірізді баяндалған. Ұғымдардың анықтамалары, аксиомалар, теоремалар мен олардың салдарлары арнайы қаріппен ерекшеленген. Сендердің танымдық белсенділіктеріңді арттыру үшін кейбір күрделі емес теориялық сұрақтар өздігінен жұмыс істеуге ұсынылған. Түсіндірме мәтіннен кейін бақылау сұрақтары берілген. Олар теорияны қаншалықты меңгергендеріңді тексеруге арналған.

Әр тармақта теориялық білімдеріңді бекітуге және практикалық біліктілік пен дағдыларыңды қалыптастыруға арналған күрделілігі бойынша үш деңгейге бөлінген жаттығулар бар. А деңгейінің жаттығулары негізінен үйренуге берілген. В мен С деңгейінің жаттығулары күрделірек, оларды орындағанда геометриядан ғана емес, алгебра мен анализ бастамаларынан және жаратылыстану-математика циклынан бұрын алған білімдерің мен дағдыларыңды жан-жақты қолдану қажет болады. Оқулыққа пәнаралық сипаттағы, соның ішінде Қазақстанның көрікті жерлеріне байланысты есептер, Ғаламторды пайдаланып орындалатын тапсырмалар енгізілген. Сонымен бірге, оқулық электрондық қосымшамен қамтылған, онда әртүрлі қосымша материалдар бар.

Есептерді шығару теориялық білімді бекітудің, практикалық біліктілік пен дағдыны берік қалыптастырудың негізгі құралы болып табылады. Осыны ескере отырып, оқулықтың тармақтарында шешуімен бірге типтік есептер ұсынылған, оларды талдау нәтижесінде жаттығуларды орындау жеңілірек болады. Есептерді шығару кезінде сызбалардың, соның ішінде 3D форматындағы сызбалар, шешуін табуға бағыттайтын нұсқаулар мен жауаптардың да белгілі бір көмегі болады. Әр бөлімнің соңында оны қайталауға және жиынтық бағалауға дайындалуға арналған «Өзіңді тексер!» айдарымен тапсырмалар берілген.

Аталмыш оқулық геометрияны оқуда сендерге сенімді көмекші болады деп үміттенеміз.

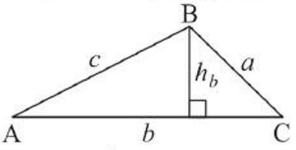
Сәттілік тілейміз!

Авторлар

ПЛАНИМЕТРИЯ КУРСЫНАН АНЫҚТАМАЛЫҚ МАТЕРИАЛ

Негізгі формулалар мен теоремалар

Кез келген үшбұрыш



1-сурет

a, b, c – қабырғалар;

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – оларға қарсы жатқан бұрыштар;

h_b – b қабырғасына жүргізілген биіктік;

S – аудан; p – жарты периметр;

R – сырттай сызылған шеңбердің радиусы;

r – іштей сызылған шеңбердің радиусы.

Үшбұрыштың MN орта сызығы (2-сурет):

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC;$$

$$S = \frac{1}{2}b \cdot h_b;\ S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

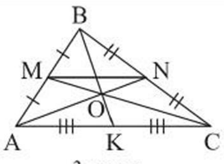
$$S = p \cdot r; \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Синустар теоремасы:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Косинустар теоремасы:

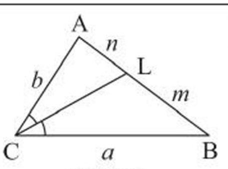
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A.$$



2-сурет

Үшбұрыштың медианалары:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}.$$



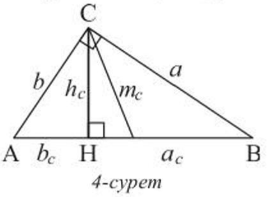
3-сурет

Үшбұрыштың биссектрисасы:

$$\frac{n}{m} = \frac{b}{a}.$$

$$CL = \sqrt{ab - mn}.$$

Тікбұрышты үшбұрыш



4-сурет

a, b – катеттер; c – гипотенуза;

a_c, b_c – катеттердің гипотенузадағы проекциялары;

m_c – гипотенузаға жүргізілген медиана;

h_c – гипотенузаға жүргізілген биіктік.

Тригонометриялық формулалар:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

$$S = \frac{1}{2}ab; \qquad S = \frac{1}{2}c \cdot h_c;$$

$$m_c = \frac{1}{2}c = R; \qquad r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}; \qquad a = \sqrt{c \cdot a_c}; \qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$$

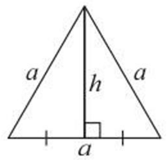
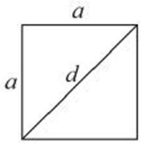
Пифагор теоремасы: $a^2 + b^2 = c^2$.

Тікбұрышты үшбұрышты шешу:

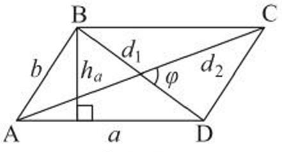
$a = c \cdot \sin\angle A$; $\quad b = c \cdot \cos\angle A$;

$a = b \cdot \mathrm{tg}\angle A$; $\quad b = a \cdot \mathrm{ctg}\angle A$.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Дұрыс үшбұрыш	***Шаршы***
 *5-сурет* $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \dfrac{1}{3}h$; $R = 2r$.	 *6-сурет* $d = a\sqrt{2}$; $S = a^2$; $S = \dfrac{1}{2}d^2$; $r = \dfrac{1}{2}a$; $R = \dfrac{1}{2}d$.

Параллелограмм



7-сурет

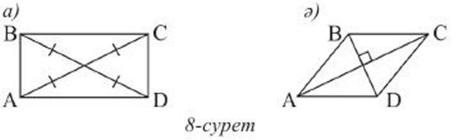
a, b – сыбайлас қабырғалар;
d_1, d_2 – диагональдар;
φ – диагональдардың арасындағы бұрыш;
h_a – a қабырғасына жүргізілген биіктік;
S – аудан.

$S = a \cdot h_a$; $S = ab \cdot \sin \angle A$;

$S = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

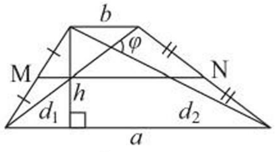
Егер $d_1 = d_2$ болса, онда $ABCD$ – тіктөртбұрыш (8, *а*-сурет).



8-сурет

Егер $d_1 \perp d_2$ болса, онда $ABCD$ – ромб (8, *ә*-сурет).

Трапеция



9-сурет

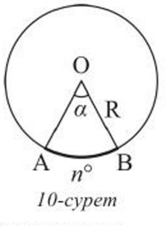
$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \dfrac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$;

MN – орта сызық (9-сурет);

MN табандарына параллель және

$MN = \dfrac{a+b}{2}$.

Шеңбер



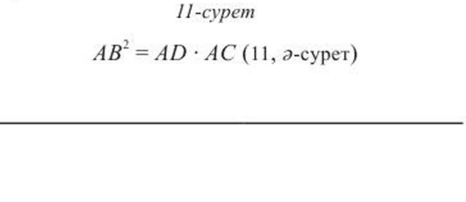
10-сурет

C – шеңбердің ұзындығы;
S – дөңгелектің ауданы;
l – AB доғасының ұзындығы;
$S_{\text{сект.}}$ – сектордың ауданы;
$n°$ – AB доғасының (AOB центрлік бұрышының) градустық өлшемі;
α – центрлік бұрыштың радиандық өлшемі.

$C = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$; $l = R\alpha$;

$S_{\text{сект.}} = \dfrac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$; $S_{\text{сект.}} = \dfrac{1}{2}R^2\alpha$;

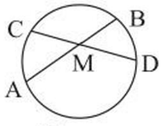
а) Шеңберге жанамалардың;
ә) жанама мен қиюшының қасиеттері.



11-сурет

$AB^2 = AD \cdot AC$ (11, *ә*-сурет)

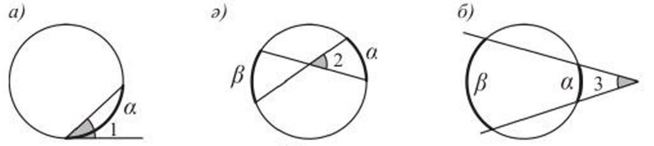
Хордалардың қасиеті



12-сурет

$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$

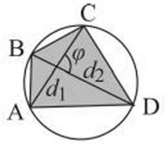
а) Жанама мен хорданың; ә) хордалардың; б) қиюшылардың арасындағы бұрыш.



13-сурет

а) $\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$; ә) $\angle 2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; б) $\angle 3 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Іштей сызылған төртбұрыш



14-сурет

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$

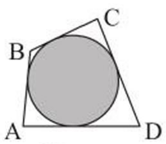
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$,

мұндағы

d_1, d_2 – диагональдар;

φ – олардың арасындағы бұрыш.

Сырттай сызылған төртбұрыш



15-сурет

$AB + CD = AD + BC.$

$S = rp$,

мұндағы

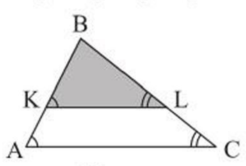
r – іштей сызылған шеңбердің радиусы;

p – төртбұрыштың жарты периметрі.

Ұқсас үшбұрыштар

1) бұрыштары тең;

2) қабырғалары пропорционал.



16-сурет

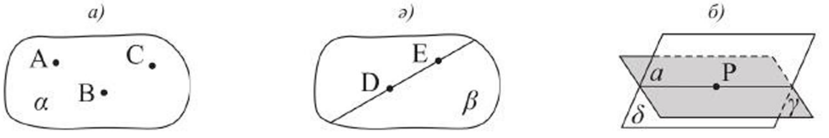
Үшбұрыштың қабырғасына параллель түзу одан берілген үшбұрышқа ұқсас үшбұрыш қияды (16-сурет).

$$\Delta ABC \sim \Delta KBL \Rightarrow \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KL} = \frac{BC}{BL} = k;$$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KBL}} = k; \ \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KBL}} = k^2.$$

10-СЫНЫПТЫҢ СТЕРЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Стереометрия аксиомалары



17-сурет

а) Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.

ә) Жазықтықтың әртүрлі екі нүктесі арқылы өтетін түзу осы жазықтықта жатады.

б) Егер екі жазықтықтың ортақ нүктесі бар болса, онда олардың осы нүктеден өтетін ортақ түзуі бар болады.

Аксиомалардың салдарлары

1) Түзу мен онда жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

2) Қиылысатын екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

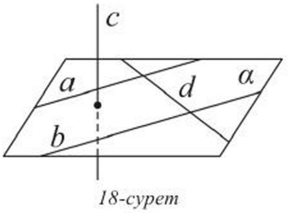
3) Кеңістіктің әртүрлі екі нүктесі арқылы бір ғана түзу жүргізуге болады.

Т е о р е м а. Параллель екі түзу арқылы бір ғана жазықтық жүргізуге болады.

Параллель және айқас түзулер

Түзулердің параллельдік белгісі: егер екі түзудің әрқайсысы үшінші түзуге параллель болса, онда ол екі түзу параллель болады.

Айқас түзулердің белгісі: егер бір түзу жазықтықта жатса, ал басқа түзу осы жазықтықты бірінші түзуде жатпайтын нүктеде қиып өтсе, онда ол екі түзу айқас болады. 18-суреттегі c мен a, c мен b, c мен d – айқас түзулер.



18-сурет

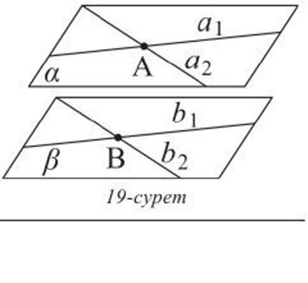
Түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың өзара орналасуы

Түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі: егер жазықтықта жатпайтын түзу сол жазықтықта жататын қандай да бір түзуге параллель болса, онда ол түзу осы жазықтыққа параллель болады.

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі: егер түзу жазықтықта жататын қиылысатын екі түзудің әрқайсысына перпендикуляр болса, онда ол түзу осы жазықтыққа перпендикуляр болады. Мысалы, 18-суретте, егер $c \perp b$ және $c \perp d$ болса, онда $c \perp \alpha$ болады.

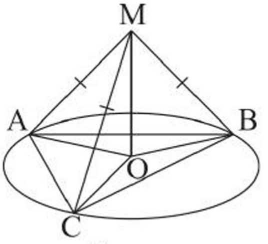
Екі жазықтықтың параллельдік белгісі: егер бір жазықтықтың қиылысатын екі түзуі, сәйкесінше, екінші жазықтықтың екі түзуіне параллель болса, онда ол жазықтықтар параллель болады (19-сурет).

Жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі: егер екі жазықтықтың бірі екінші жазықтыққа перпендикуляр түзу арқылы өтсе, онда ол жазықтықтар перпендикуляр болады.



19-сурет

Перпендикуляр және көлбеу

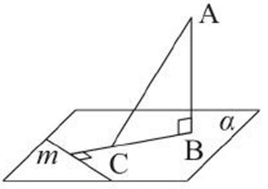


20-сурет

Егер жазықтықтан тыс жатқан бір нүктеден жазықтыққа екі көлбеу жүргізілсе, онда:

1) проекциялары тең көлбеулер тең болады және керісінше, тең көлбеулердің проекциялары тең болады (20-сурет);

2) проекциялары тең емес екі көлбеудің қайсысының проекциясы үлкен болса, сол көлбеу үлкен болады және керісінше, үлкен көлбеудің проекциясы үлкен болады.



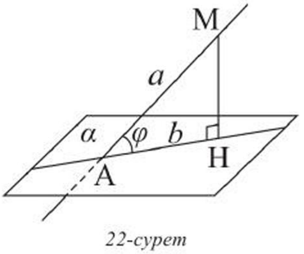
21-сурет

Теорема (*үш перпендикуляр туралы*). Егер жазықтықтағы түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеудің проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.

Мысалы, 21-суретте, егер $m \perp CB$ болса, онда $m \perp AC$ болады.

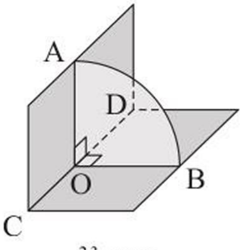
Теорема (*үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теорема*). Егер жазықтықтағы түзу осы жазықтыққа жүргізілген көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол түзу көлбеудің осы жазықтықтағы проекциясына да перпендикуляр болады.

Түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың арасындағы бұрыш



22-сурет

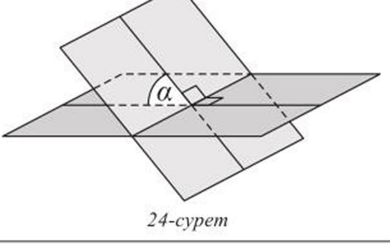
Түзу мен оған перпендикуляр емес жазықтықтың арасындағы бұрыш деп осы түзу мен оның берілген жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы бұрыш аталады. Мысалы, 22-суретте $\angle MAH = \varphi$ – a түзуі мен α жазықтығының арасындағы бұрыш, $0° \le \varphi < 90°$.



23-сурет

Екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы деп төбесі оның қырына тиісті, ал қабырғалары оның жақтарында жататын және сол қырына перпендикуляр бұрыш аталады. Мысалы, 23-суретте AOB бұрышы – қыры CD болатын екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы.

Егер екіжақты бұрыш 90°-қа тең болса, *тік*, 90°-тан кем болса, *сүйір*, 90°-тан артық, бірақ 180°-тан кем болса, *доғал* болады.

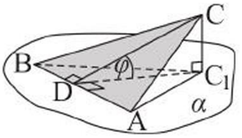


24-сурет

Қиылысатын екі жазықтықтың арасындағы бұрыш деп солардан құралған екіжақты бұрыштардың басқаларының әрқайсысынан үлкен емес біреуінің градустық өлшемі аталады.

Қиылысатын жазықтықтардың арасындағы бұрыштың шамасы 90°-тан артық емес.

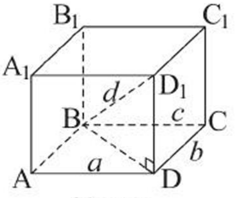
Үшбұрыштың ортогональ проекциясының ауданы



25-сурет

$S_{\Delta ABC_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi.$

Тікбұрышты параллелепипед, куб



26-сурет

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Егер $a = b = c$ болса, онда $d = a\sqrt{3}$.

Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі

Ox – абсциссалар осі, Oy – ординаталар осі, Oz – аппликаталар осі.

Егер кеңістікте $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ және $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нүктелері берілген болса, онда олардың арақашықтығы:

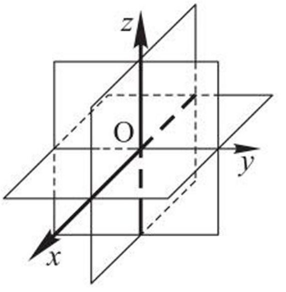
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

AB кесіндісін $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ қатынаста бөлетін $C(x,\ y,\ z)$ нүктесінің координаталары:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n},\ y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n},\ z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}$$

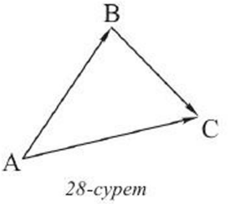
формулаларымен беріледі;

$\overrightarrow{AB}$ векторының координаталары: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

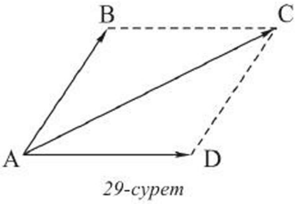


27-сурет

Екі вектордың қосындысы



28-сурет

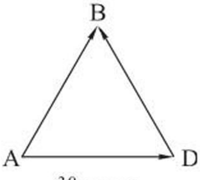


29-сурет

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ үшбұрыш ережесі бойынша;

ә) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ параллелограмм ережесі бойынша.

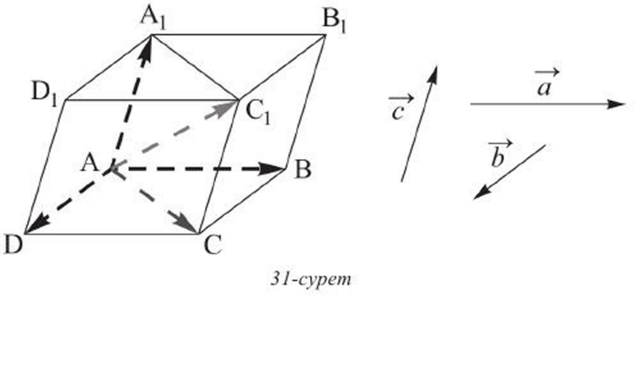
Екі вектордың айырымы



30-сурет

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Компланар емес үш вектордың қосындысы



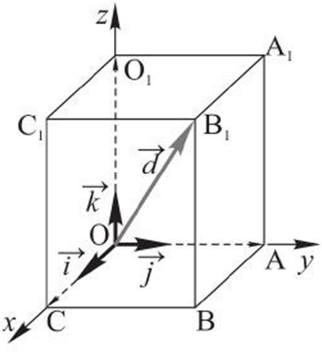
31-сурет

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC_1}$ параллелепипед ережесі бойынша.

Параллель түзулерде немесе бір түзуде жататын нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары **коллинеар** деп аталады. *Векторлардың коллинеарлық шарты*: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, мұндағы k – қайсыбір сан.

Кеңістікте бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда жататын нөлдік емес үш вектор **компланар** векторлар деп аталады. *Үш вектордың компланарлық шарты:* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, мұндағы x және y – қайсыбір сандар, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ – коллинеар емес векторлар.

Бір нүктеден бастап салғанда бір жазықтықта жатпайтын векторлар **компланар емес** векторлар деп аталады.



32-сурет

Векторды компланар емес үш вектор бойынша жіктеу формуласы

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, мұндағы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – берілген компланар емес векторлар, x, y, z – қайсыбір сандар.

Векторларды координаталық векторлар бойынша жіктеу формуласы

$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, мұндағы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – координаталық векторлар, ал x, y, z сандары $\vec{d}$ векторының координаталары.

Векторлардың скаляр көбейтіндісі

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Егер $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Векторлардың арасындағы бұрыш

Егер $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ және $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ болса, онда

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

1. A, B және C нүктелері бір жазықтықта жатыр, ал D нүктесі ол жазықтыққа тиісті емес. $ABCD$ төртбұрышы трапеция болуы мүмкін бе?

2. a, b параллель түзулері мен олардың ешбірінде жатпайтын M нүктесі берілген. Егер M нүктесі арқылы: а) a мен b түзулерінің екеуін де қиятын; ә) осы түзулердің біреуін ғана қиятын түзу жүргізуге болса, M нүктесі a және b түзулерімен бір жазықтықта жата ма?

3. Егер a түзуі: а) α мен β жазықтықтарын қиып өтсе; ә) жазықтықтардың бірін қиып өтіп, екіншісіне параллель болса; б) бір жазықтықты қиып өтсе және екіншісіне тиісті болса, онда α мен β жазықтықтары өзара қалай орналасқан?

4. а) Үшбұрыштың екі қабырғасының орталары арқылы өтетін жазықтық оның үшінші қабырғасын қиып өтуі мүмкін бе?
ә) Екі жазықтықтың әрқайсысы бір түзуге параллель. Осы жазықтықтар өзара қалай орналасуы мүмкін?

5. Егер α мен β жазықтықтарының γ жазықтығымен қиылысу сызықтары параллель болса, онда α мен β жазықтықтары параллель деген ақиқат па?

6. Дұрыс $ABCDEK$ алтыбұрышы берілген және оның жазықтығына AH перпендикуляры жүргізілген. Неліктен HE мен DE кесінділері өзара перпендикуляр болатынын түсіндіріңдер.

7. Арақашықтығы 2 м-ге тең екі параллель жазықтық олардың әрқайсысымен 45° бұрыш жасайтын түзумен қиылған. Осы түзудің жазықтықтардың арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

8. A және B нүктелерінен α жазықтығына дейінгі қашықтық 12,5 см және 3,5 см. AB кесіндісінің осы жазықтықтағы проекциясының ұзындығы 12 см-ге тең. A мен B нүктелерінің арақашықтығын табыңдар. AB кесіндісі α жазықтығын қиятын және қимайтын жағдайларды қарастырыңдар.

9. Төбелерінің координаталары $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ болатын ABC үшбұрышы берілген. C төбесі Oz осінің оң жарты осінде жатыр. Егер $\frac{AB^2}{CB^2} = \frac{2}{5}$ болса, CM медианасының ұзындығын табыңдар.

10. Қабырғалары 2 дм және 4 дм-ге тең $ABCD$ тіктөртбұрышының AD қабырғасы арқылы α жазықтығы жүргізілген. Тіктөртбұрыштың α жазықтығындағы ортогональ проекциясы – шаршы. CD түзуінің α жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, M және N нүктелері, сәйкесінше, оның CB мен A_1B_1 қырларының орталары, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$. а) $\overrightarrow{DN}$; ә) $\overrightarrow{A_1M}$; б) $\overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$; г) $\overrightarrow{CA_1}$ векторларын $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

«Барыс Арена» спорт кешені, Нұр-Сұлтан қ.

В деңгейі

12. «Барыс Арена» кешеніндегі трибуналардың біріндегі баспалдақ әрқайсысының биіктігі h-қа тең n сатыдан тұрады. Егер баспалдақ бойындағы тіреу табанымен α бұрыш жасайтын болса, тіреудің l ұзындығын табу формуласын құрыңдар.

13. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғалары 6 см және 8 см, ал бүйір қыры 10 см. Оның диагоналінің табан жазықтығымен және кез келген бүйір жағымен жасайтын бұрыштарының қосындысын табыңдар.

14. Дұрыс ABC үшбұрышы мен $ACDE$ шаршысының жазықтықтары өзара перпендикуляр. $AC = 8$ см болса, B мен D нүктелерінің арақашықтығын табыңдар.

15. $A(8; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$, $C(0; 7; 0)$, $D(8; 7; 5)$ нүктелері берілген. а) AB мен DC; ә) AC мен BD түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

16. $DABC$ тетраэдрі берілген. Оның ADB жағының DD_1 медианасына $DF : FD_1 = 2 : 3$ болатындай F нүктесі белгіленген. $\overrightarrow{CF}$ векторын $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ және $\overrightarrow{CD}$ векторлары арқылы өрнектеңдер.

С деңгейі

17. Пирамиданың табаны – дұрыс үшбұрыш. Пирамиданың бір бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр, ал басқа екеуі оған α бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір қырларының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

18. $SABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ ромбысы, оның қабырғасы b-ға, A бұрышы 60°-қа тең. SAB және SAD жақтары табан жазықтығына перпендикуляр, ал пирамиданың биіктігі b-ға тең. а) SBD және ABD жазықтықтарымен құралған екіжақты бұрышты; ә) A нүктесінен SBD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

19. Төбелері $A(0; 0; 8)$, $B(8; 0; 0)$, $C(0; 8; 0)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш берілген, O нүктесі – координаталар жүйесінің басы. AOB, BOC, AOC үшбұрыштарының ABC үшбұрышы жазықтығындағы ортогональ проекциялары аудандарының қосындысын табыңдар.

20. Үшбұрышты пирамида өзінің төбелерінің координаталарымен берілген: $A(–6; 0; 2)$, $B(2; 8; 2)$, $C(–10; 4; 6)$, $D(2; 0; 4)$. O нүктесі BCD жағының медианаларының қиылысу нүктесі болса, $\overrightarrow{AO}$ векторының ұзындығын табыңдар.

I. КӨПЖАҚТАР

Бөлімді оқу нәтижесінде

- көпжақтың анықтамасын, оның элементтерін;
- көпжақ жазбасы ұғымын;
- призманың, тікбұрышты параллелепипедтің, пирамиданың, қиық пирамиданың анықтамасы мен қасиеттерін;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын;
- көпжақты бұрыш ұғымын және оның қасиеттерін;
- дұрыс көпжақтың анықтамасын және оның түрлерін ***білу керек.***

- призманы, пирамиданы, қиық пирамиданы және көпжақты бұрышты жазықтықта кескіндей алу;
- көпжақтардың жазбаларын жасай алу;
- көпжақтың жазықтықпен қимасын сала алу;
- көпжақтардың элементтерін табуға есептер шығара алу;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын қорытып шығару және оларды есептер шығаруда қолдана алу;
- дұрыс көпжақтардың түрлерін ажырата ***алу керек.***

1. Көпжақ ұғымы. Призма және оның элементтері

Тақырыпты оқу барысында:

• көпжақтың, оның элементтерінің анықтамасын, көпжақтың жазбасы ұғымын білесіңдер;

• призманың анықтамасы мен қасиеттерін, оның түрлерін білесіңдер;

• призманың түрлерін, олардың жазбаларын және элементтерін жазықтықта кескіндейсіңдер;

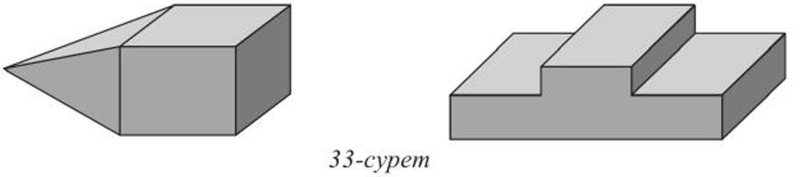
• көпжақтың элементтерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.

Көпжақ ұғымы алдыңғы сыныпта қарастырылған болатын. Енді көпжақтардың түрлері мен олардың қасиеттерін толығырақ оқып-үйренетін боламыз.

Беті саны шектеулі көпбұрыштардан тұратын және олардың ортақ қабырғасы бар кез келген екеуі бір жазықтықта жатпайтын дене көпжақ деп аталады. Параллелепипедтер, пирамидалар – көпжақтардың үлгілері.

Көпжақтың бетін құрайтын көпбұрыштар оның **жақтары** деп, көпбұрыштың қабырғалары **қырлары**, ал олардың төбелері көпжақтың **төбелері** деп аталады. Көпжақтар дөңес және дөңес емес болады. Егер көпжақ өзінің жағын қамтитын әрбір жазықтықтың бір жағында орналасса, оны **дөңес** деп (33, *а*-сурет), ал егер жазықтықтың ол орналаспаған жағында ең болмағанда бір жағы бар болса, оны **дөңес емес** көпжақ деп атайды (33, *ә*-сурет). Мектептегі геометрия курсында негізінен дөңес көпжақтар оқытылады, сондықтан «дөңес» сөзі қолданылмаса, сондай көпжақ қарастырылуда деп есептеледі.

а) *ә)*



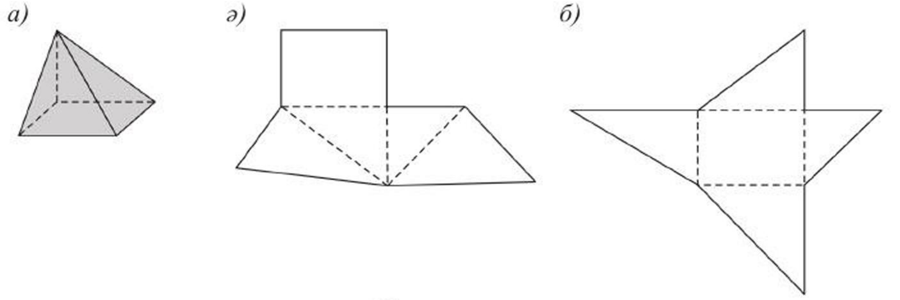
33-сурет

Дөңес көпжақтың жақтары дөңес көпбұрыштар болады, көпбұрыштың төбесі көрсетілген бұрышы көпжақтың сол төбедегі **жазық бұрышы** деп аталады. Дөңес көпжақтың қыры ортақ жақтары *іргелес* (немесе *көршілес*) деп аталады. Көпжақтың іргелес екі жағын қамтитын жарты жазықтықтардың арасындағы екіжақты бұрыш **көпжақтың екіжақты бұрышы** деп аталады.

Дөңес көпжақтың бір жағында жатпайтын екі төбесін қосатын кесінді көпжақтың **диагоналі** деп аталады. **Көпжақтың барлық жақтары аудандарының қосындысы оның толық бетінің (немесе қысқаша бетінің) ауданы деп аталады.**

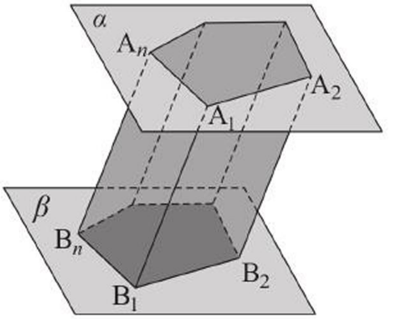
Көпжақтың бетін бірнеше қыры бойымен кесіп, барлық жақтарын қандай да бір көпбұрыш шығатындай етіп бір жазықтыққа жазып орналастыруға болады. Сонда шыққан көпбұрыш көпжақ бетінің **жазбасы** (немесе қысқаша **көпжақтың жазбасы**) деп аталады.

Бір көпжақтың әртүрлі жазбалары болуы мүмкін. 34, *ә*, *б*-суреттерде 34, *а*-суретте кескінделген көпжақ бетінің жазбалары көрсетілген. Іс жүзінде, мысалы, көпжақтың қатырғы қағаздан моделін жасау үшін, алдымен оның бетінің жазбасын дайындап алу керек.



34-сурет

Екі жағы параллель жазықтықтарда жататын тең *n*-бұрыштар, ал басқа *n* жағы параллелограмдар болатын көпжақ *n*-бұрышты призма деп аталады (35-сурет).



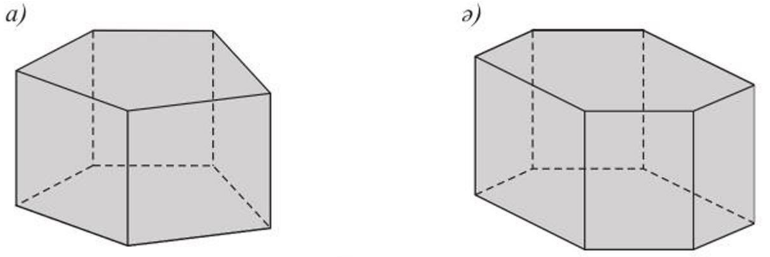
35-сурет

Параллель жазықтықтарда жататын екі тең *n*-бұрыштар призманың *табандары* деп, параллелограмдар – призманың *бүйір жақтары*, ал призманың табан қабырғалары болмайтын қырлары призманың *бүйір қырлары* деп аталады. Призма ұғымының анықтамасынан шығатыны: **оның барлық бүйір қырлары тең, ал әрбір екі бүйір қыры параллель.**

Табан қабырғаларының санына байланысты призманы үшбұрышты, төртбұрышты, бесбұрышты т. с. с. деп атайды (36, 37-суреттер). Егер призманың табаны параллелограмм болса, онда ол параллелепипед болады (36, *а*-сурет).

36-сурет

Егер призманың бүйір қырлары табандарына перпендикуляр болса, онда ол **тік** призма деп (37-сурет), ал перпендикуляр болмаса, **көлбеу** призма деп аталады (36-сурет).

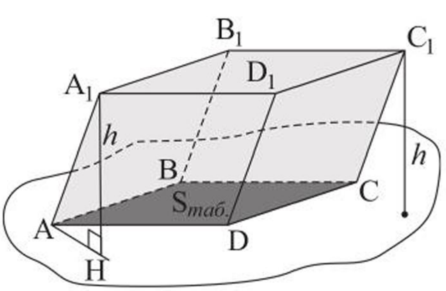


37-сурет

Егер призма тік және оның табандары дұрыс *n*-бұрыштар болса, ол дұрыс призма деп аталады. 37, *ә*-суретте дұрыс алтыбұрышты призма кескінделген. Дұрыс призманың барлық бүйір жақтары – өзара тең тіктөртбұрыштар.

Көпжақ пен қиюшы жазықтықтың барлық ортақ нүктелерінен тұратын көпбұрыш көпжақтың осы жазықтықпен қимасы деп аталатынын еске салайық. Көпжақтың қиюшы жазықтығы – оны екі көпжаққа бөлетін жазықтық.

Призманың диагоналі мен бүйір қыры арқылы өтетін қимасы призманың *диагональдық қимасы* деп аталады. Тік призманың әрбір бүйір жағы және әрбір диагональдық қимасы тіктөртбұрыш болады.



38-сурет

Призманың бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр призманың **биіктігі** деп аталады. Призманың биіктігінің ұзындығы оның табандарының арақашықтығына тең болады. Мысалы, 38-суреттегі A_1H – $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу параллелепипедінің биіктігі. *Тік призманың биіктігі оның бүйір қырына тең*.

Призма ұғымы фигуралардың кеңістіктегі қозғалысының түрімен – параллель көшірумен тікелей байланысты болуы мүмкін. Фигураны параллель көшіру деп фигураның барлық нүктелері бірдей қашықтыққа бір бағытта жылжитын қозғалысты атайтынын еске салайық. Мысалы, призманың төменгі табанын (38-сурет) оның жоғарғы табанын $\overrightarrow{A_1A}$ векторы бағытымен A_1A кесіндісіне параллель көшіру арқылы алуға болады.

Көптеген ғимараттардың тік призма түрінде, ал кейбір заманауи ғимараттардың көлбеу призма түрінде болатынын атап өтелік. Мысалы, Гамбург портындағы кеңсе ғимараты (Германия).

Гамбург портындағы ғимарат

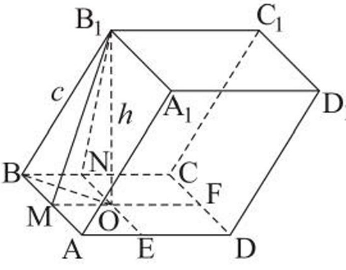
1 - е с е п. Тек 7 қыры бар көпжақ бола ма?

Ш е ш у і. Ондай көпжақ бар болады делік. Егер оның барлық m жақтары үшбұрыштар болса, онда $\frac{3m}{2}$ қыры бар болады, себебі оның әр қыры екі жағына тиісті. Есептің шарты бойынша $\frac{3m}{2} = 7$, бұдан $m = \frac{14}{3}$. Бұлай болуы мүмкін емес, себебі m – 4-тен кем емес натурал сан. Егер көпжақтың ең болмағанда бір жағы n-бұрыш болса, мұндағы $n \geq 4$, онда оның қырлары 8-ден кем болмас еді. Демек, тек 7 қыры бар көпжақ болмайды.

Ж а у а б ы. Болмайды.

2 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу параллелепипедінің табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы. $BB_1 = 7$ см, табаны мен AA_1B_1B жағының арасындағы бұрыш 60°-қа, ал осы табан мен BB_1C_1C жағының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Параллелепипедтің биіктігін табу керек.

Ш е ш у і. BA мен BC қабырғаларына, сәйкесінше, B_1M, MF және B_1N, NE перпендикулярларын жүргіземіз (39-сурет). MF және NE түзулерінің қиылысу нүктесін O деп белгілейміз.



39-сурет

Сонда $AB \perp (B_1MO)$, демек, $AB \perp B_1O$ және $BC \perp (B_1NO)$, бұдан $BC \perp B_1O$, ендеше, $B_1O \perp (ABC)$. Яғни B_1O кесіндісі – параллелепипедтің биіктігі, $B_1O = h$ болсын.

B_1MO үшбұрышында $\angle B_1MO = 60°$, $MO = \frac{h}{\text{tg } 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

B_1NO үшбұрышында $\angle B_1NO = 45°$, $NO = h$. $MONB$ тіктөртбұрыш болғандықтан, $NO = BM$.

ΔBMO-дан: $BO^2 = h^2 + \frac{h^2}{3} = \frac{4h^2}{3}$.

ΔBB_1O-дан: $7^2 = \frac{4h^2}{3} + h^2$, бұдан $49 \cdot 3 = 7h^2$, $h = \sqrt{21}$ (см).

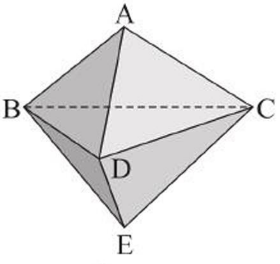
Ж а у а б ы. $\sqrt{21}$ см.

СҰРАҚТАР

1. Көпжақ дегеніміз не? Көпжақтардың мысалдарын келтіріңдер және олардың элементтерін атаңдар.
2. Қандай көпжақ дөңес, ал қандай көпжақ дөңес емес деп аталады?
3. Көпжақтың жазбасы дегеніміз не екенін түсіндіріңдер.
4. Призма дегеніміз не?
5. Қандай призма: а) тік; ә) көлбеу; б) дұрыс деп аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

A деңгейі



40-сурет

21. Көпжақтың ең аз дегенде неше: а) жағы; ә) қыры; б) төбесі бар болуы мүмкін?

22. 40-суретте барлық жақтары дұрыс үшбұрыш болатын $ABCDE$ көпжағы кескінделген. Оның:

а) іргелес жақтарын;

ә) D төбесіндегі жазық бұрыштарын;

б) диагоналін атаңдар.

23. Төртбұрышты $PABCD$ және $SABCD$ пирамидаларының бірігуінен тұратын көпжақты кескіндеңдер. Оның неше:

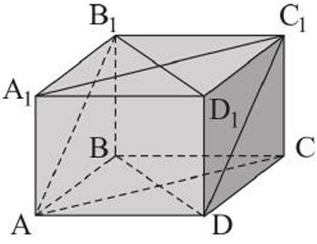
а) жағы; ә) қыры; б) төбесі; в) диагоналі бар?

24. а) Тікбұрышты параллелепипедтің; ә) дұрыс тетраэдрдің әрбір төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы неге тең?

25. Ақиқат болмайтын тұжырымды таңдаңдар: а) куб – тікбұрышты параллелепипед; ә) кубтың барлық жақтары тең; б) қыры a-ға тең кубтың диагоналі $a\sqrt{3}$-ке тең; в) кубтың диагональдық қимасы – шаршы.

26. Кубтың диагональдық қимасының ауданы $16\sqrt{2}$ см^2. а) Куб қырының ұзындығын; ә) табанының диагоналін; б) кубтың диагоналін; в) бетінің ауданын табыңдар.

27. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде (41-сурет):
а) $AB_1 \parallel (D_1DC)$; ә) $A_1D_1 \perp C_1D$; б) AB_1C_1D – тіктөртбұрыш; в) диагональдық қималары тең болатынын дәлелдеңдер.



41-сурет

28. Тікбұрышты параллелепипедтің диагональдық қимасы шаршы болуы мүмкін бе? Егер мүмкін болса, онда қандай жағдайда мүмкін болатынын көрсетіңдер.

29. Тікбұрышты параллелепипедтің табаны – ауданы 144 см^2-ге тең шаршы. Параллелепипедтің биіктігі 14 см-ге тең болса, оның диагоналінің ұзындығын табыңдар.

30. Тікбұрышты параллелепипед табанының қабырғалары 24 см және 10 см, ал оның диагоналі табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің бүйір қырын табыңдар.

31. Тікбұрышты параллелепипедтің табан қабырғалары 16 см және 12 см-ге, ал диагональдық қимасының ауданы 200 см^2-ге тең. Параллелепипедтің биіктігін табыңдар.

32. а) Қыры 2 см-ге тең дұрыс тетраэдрдің; ә) өлшемдері 1 см, 2 см, 3 см болатын тікбұрышты параллелепипед бетінің жазбасын салып көрсетіңдер.

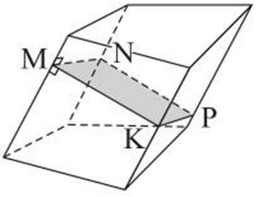
33. а) Призманың ең аз дегенде неше жағы бар болуы мүмкін?
ә) 10 төбесі бар призманың табаны қандай n-бұрыш болады?

34. Дұрыс тұжырымды көрсетіңдер: а) призманың табандары тең; ә) призманың жақтары тең; б) призманың барлық бүйір жақтары – параллелограмдар; в) призманың барлық жақтары – параллелограмдар; г) призманың барлық бүйір қырлары өзара параллель.

35. а) Төртбұрышты тік призманың тік параллелепипедтен айырмашылығы неде?
ә) Тік және тікбұрышты параллелепипедтердің айырмашылығы бар ма?

36. Тік параллелепипедтің диагональдық қима жазықтықтары өзара перпендикуляр болса, онда оның табаны ромб болатынын дәлелдеңдер.

37. а) Кез келген призма қырларының саны 3-ке еселік; ә) төртбұрышты призманың барлық бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең (42-сурет); б) дұрыс призманың барлық диагональдық қималары тең шамалы деген ақиқат па?



42-сурет

38. а) Барлық қырлары тең дұрыс үшбұрышты призманың; ә) табан қабырғасы биіктігінен екі есе кем болатын дұрыс алтыбұрышты призманың моделін жасаңдар.

В деңгейі

39. Әрбір жағы үшбұрыш болатын бесжақ бола ма?

40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубынан $A_1AB_1D_1$ пирамидасын қиып алғанда пайда болатын көпжақты кескіндеңдер. Осы көпжақтың қанша жағы болса, сонша төбесі бар деген ақиқат па?

41. а) Тетраэдрдің әр жағына оған тең тетраэдрді; ә) кубтың әр жағына оған тең кубты; б) кубтың әр жағына табаны кубтың жағына тең төртбұрышты пирамиданы желімдеп, жабыстырғанда шығатын дөңес емес көпжақтың моделін жасаңдар.

42. а) Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі табанымен 60° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің осы диагоналі мен бүйір жағының арасындағы бұрыштың синусын табыңдар.

ә) Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі оның бүйір жағымен 30° бұрыш жасайды. Осы диагональ мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

43. Төрт жағы шаршы болатын төртбұрышты көлбеу призманың моделін жасаңдар.

С деңгейі

44. а) Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналінің квадраты оның бір төбесінен шығатын жақтарының үш диагоналінің квадраттары қосындысының жартысына тең болатынын; ә) тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі оның бір төбесінен шығатын үш қырының параллелепипед диагоналіне түскен ортогональ проекцияларының қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

45. Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырларының арақашықтығы 37 см, 23 см және 40 см. Призманың ауданы үлкен бүйір жағынан оған қарсы жатқан бүйір қырына дейінгі қашықтықты 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

46. Дұрыс үшбұрышты призма табанының қабырғасы 2 дм-ге, ал биіктігі $\sqrt{3}$ дм-ге тең. Призманың бір табанының қабырғасы арқылы өтіп, екінші табанымен ең болмағанда бір ортақ нүктесі бар болатын қиманың ең кіші ауданы қандай болады?

47. Дұрыс төртбұрышты призманың табан қабырғасы a-ға, биіктігі h-қа тең. Призманың табан қабырғасы арқылы өтіп, онымен α бұрышын жасайтын (α – айнымалы шама) жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

2. Призма бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

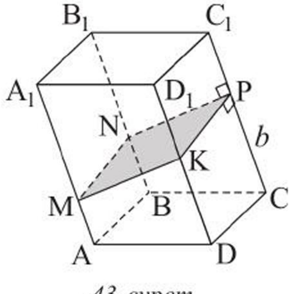
• призманың бүйір және толық беттерінің ұғымы мен формулаларын білетін боласыңдар;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Призманың бүйір жақтарынан құралған фигура оның *бүйір беті* деп аталады. **Призманың толық бетінің ауданы** деп оның барлық жақтары аудандарының қосындысы, ал призманың *бүйір бетінің ауданы* деп оның барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы аталады. Призманың толық бетінің $S_{\text{т.б.}}$ ауданы оның бүйір бетінің $S_{\text{б.б.}}$ ауданы мен табанының $S_{\text{таб.}}$ ауданы арқылы $\boldsymbol{S_{\text{т.б.}} = S_{\text{б.б.}} + 2S_{\text{таб.}}}$ формуласымен өрнектеледі.

Т е о р е м а. **Тік призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен бүйір қыры ұзындығының көбейтіндісіне тең.**

Д ә л е л д е у і. Тік призманың барлық бүйір жақтары – тіктөртбұрыштар. Призманың бүйір жағының ауданы осы тіктөртбұрыштардың аудандарының қосындысына, яғни призманың табан қабырғалары ұзындықтарын оның бүйір қырының ұзындығына көбейтінділерінің қосындысына тең. Осыдан мына формуланы аламыз: $\boldsymbol{S_{\text{б.б.}} = P_{\text{таб.}} \cdot h}$, мұндағы $P_{\text{таб.}}$ – табанының периметрі, h – призманың бүйір қырының ұзындығы.



43-сурет

Призманың әр бүйір қырын қиятын және оларға перпендикуляр жазықтықпен қимасын **призманың перпендикуляр қимасы** деп атайды. Мысалы, 43-суреттегі *MNPK* төртбұрышы – көлбеу параллелепипедтің перпендикуляр қимасы.

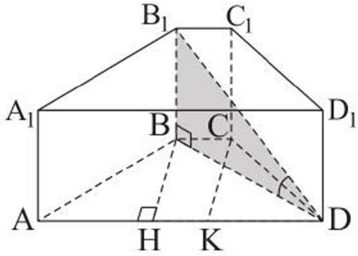
Т е о р е м а. **Көлбеу призманың бүйір бетінің ауданы призманың перпендикуляр қимасының периметрі мен бүйір қыры ұзындығының көбейтіндісіне тең.**

Д ә л е л д е у і. Көлбеу призманың барлық бүйір жақтары – параллелограмдар, ал барлық бүйір қырлары тең. Призманың бүйір бетінің ауданы осы параллелограмм аудандарының қосындысына тең. Призманың перпендикуляр қимасы – көпбұрыш, оның әр қабырғасы параллелограмның (призманың бүйір жағының) биіктігі болады. Демек, $\boldsymbol{S_{\text{б.б.}} = P_{\text{перп.қима}} \cdot b}$, мұндағы $P_{\text{перп.қима}}$ – призманың перпендикуляр қимасының периметрі, b – бүйір қырының ұзындығы.

Егер көлбеу призманың перпендикуляр қимасы болмаса, онда бұл жағдайда оның бүйір бетінің ауданы: $\boldsymbol{S_{б.б.} = P_{перп.көпбұр.} \cdot b}$ болады. Бұл формулада $P_{перп.көпбұр.}$ – көпбұрыштың периметрі, оның жазықтығы призманың әр бүйір қырын қамтитын түзулерге перпендикуляр, ал оның төбелері – сол түзулердің көрсетілген жазықтықпен қиылысу нүктелері, b – призманың бүйір қырының ұзындығы. Осы қасиетін сызбаға салып көрсетіп, оны өздігінен түсіндіріңдер.

1 - е с е п. Тік призманың табаны – теңбүйірлі трапеция, оның табандары 2 см және 10 см-ге, ал бүйір қабырғасы 5 см-ге тең. Призманың диагоналі табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Призманың толық бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік призмасы берілген болсын, онда $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AD = 10$ см, ал B_1D диагоналінің табан жазықтығымен жасайтын B_1DB бұрышы 30°-қа тең (44-сурет). Призманың толық бетінің ауданы: $S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб.}$.



44-сурет

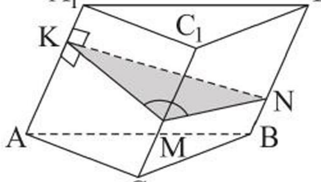
Табанының ауданын табайық. Ол үшін $ABCD$ трапециясының BH және CK биіктіктерін жүргіземіз. Сонда $AH = KD = \dfrac{10-2}{2} = 4$ (см), $BH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см), $S_{таб.} = \dfrac{2+10}{2} \cdot 3 = 18$ (см^2).

Призманың бүйір бетінің ауданын $S_{б.б.} = P_{таб.} \cdot h$ формуласымен табамыз. Призма тік болғандықтан, h биіктігі оның бүйір қырына тең. Тікбұрышты ΔBB_1D-дан $B_1B = BD \cdot \operatorname{tg} 30°$ аламыз. Тікбұрышты ΔBHD-дан: $BD = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (см). Сонда $B_1B = 3\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{15}$ (см), $S_{б.б.} = 22 \times \sqrt{15}$ см^2.

Сонымен, $S_{т.б.} = S_{б.б.} + 2S_{таб.} = (22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

Ж а у а б ы. $(22\sqrt{15} + 36)$ см^2.

2 - е с е п. Үшбұрышты көлбеу призманың $\sqrt{3}$ дм-ге тең бүйір қыры оның басқа екі бүйір қырынан 1 дм қашықтықта жатыр, ал осы қырындағы екіжақты бұрышы 120°-қа тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табу керек.



45-сурет

Ш е ш у і. $ABCA_1B_1C_1$ көлбеу призмасы берілген болсын, $CC_1 = \sqrt{3}$ дм. Оның перпендикуляр қимасын – ΔKMN-ді саламыз,

$MN = MK = 1$ дм (45-сурет). KMN бұрышы CC_1 қырындағы екіжақты бұрыштың сызықтық бұрышы болады, $\angle KMN = 120°$. Призманың бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = (KN + KM + MN) \cdot CC_1$. Косинустар теоремасы бойынша KMN үшбұрышынан $KN^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$ аламыз. Сонда $S_{б.б.} = (\sqrt{3} + 2) \cdot \sqrt{3} = (3 + 2\sqrt{3})$ (дм^2).

Жауабы. $(3 + 2\sqrt{3})$ дм^2.

СҰРАҚТАР

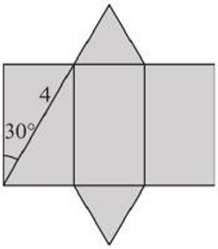
1. Призманың бүйір бетінің ауданы және призманың толық бетінің ауданы дегеніміз не?

2. а) Тік призманың; ә) көлбеу призманың бүйір бетінің ауданы туралы теореманы тұжырымдаңдар және дәлелдеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

48. Қойманың ұзындығы, ені және биіктігі, сәйкесінше, 8 м, 6 м, 3 м-ге тең. а) Еденінің ауданын; ә) жақтарының аудандарының қосындысын табыңдар.



46-сурет

49. 46-суретте дұрыс үшбұрышты призма бетінің жазбасы кескінделген. Суреттегі берілгендерді пайдаланып, осы призманың толық бетінің ауданын табыңдар.

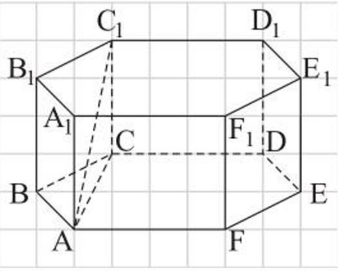
50. Дұрыс төртбұрышты призманың толық бетінің ауданы 40 дм^2, ал бүйір бетінің ауданы одан 8 дм^2-ге кем. Оның табан қабырғасы мен биіктігін табыңдар.

51. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары: а) 6 дм және 8 дм, олардың арасындағы бұрышы 30°, ал бүйір қыры 5 дм-ге тең; ә) 8 м және 15 м, олардың арасындағы бұрышы 60°, ал диагональдық қималарының аудандарының ең кішісі 65 м^2-ге тең болса, параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

52. Үшбұрышты тік призманың табан қабырғалары: а) 5 дм, 5 дм және 8 дм, ал биіктігі табанының кіші биіктігіне тең; ә) 21 см, 17 см, 10 см, ал кіші бүйір жағының диагоналі 26 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

53. а) Дұрыс алтыбұрышты призма табанының үлкен диагоналі 8 см-ге, ал призманың биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Призманың толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Дұрыс алтыбұрышты призма табанының қабырғасы 2 дм-ге, ал призманың кіші диагоналі 4 дм-ге тең (47-сурет). Оның толық бетінің ауданын табыңдар.



47-сурет

54. а) Тік призманың табаны – теңбүйірлі трапеция. Оның бір бұрышы 45°, табандарының бірі екіншісінен 8 см-ге артық, ал орта сызығы 7 см-ге тең. Егер призманың биіктігі 5 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Тік призманың табаны – теңбүйірлі трапеция, оның табандары 8 см және 2 см. Призманың үлкен бүйір жағының диагоналі оның бүйір қырымен 45° бұрыш жасайды. Призманың табанына іштей шеңбер салуға болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

55. а) Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырлары 5 см-ге, ал олардың арақашықтықтары 2 см, 3 см және 4 см-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) Үшбұрышты көлбеу призманың бүйір қырына перпендикуляр жазықтықпен қимасы – ауданы 8 см^2-ге тең теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыш. Призманың бүйір қыры 5 см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

56. а) Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 5 м және 3 м, табанының кіші диагоналі 4 м, ал параллелепипедтің кіші диагоналі табанына 60° бұрышпен көлбеген. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

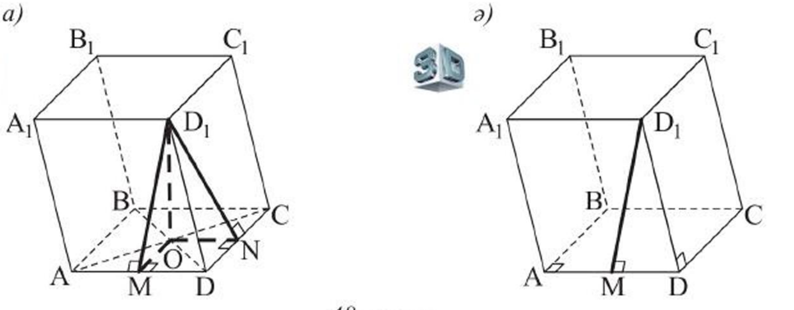
ә) Тік параллелепипедтің табаны – ромб. Параллелепипедтің диагональдық қималарының аудандары 40 см^2 және 60 см^2, ал кіші диагоналі табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

57. а) Үшбұрышты көлбеу призманың екі бүйір жағы тең, олардың арасындағы бұрыш 60°. Осы жақтарының ортақ қыры $2\sqrt{3}$ м-ге тең және одан қарсы бүйір жағына дейінгі қашықтық 4 м-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) Үшбұрышты көлбеу призманың екі бүйір жағының арасындағы бұрыш 120°-қа тең, ал олардың 12 дм-ге тең ортақ бүйір қырынан басқа қырларына дейінгі қашықтықтар 7 дм және 8 дм-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

58. Үшбұрышты көлбеу призманың бір бүйір қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең және басқа екеуінен 1 дм-ге тең қашықтықта орналасқан, ал осы қырындағы екіжақты бұрышы 150°-қа тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

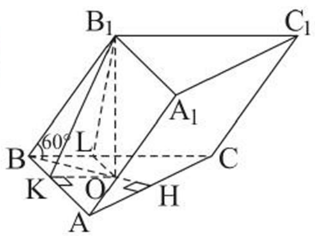
59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу призмасының табаны – қабырғасы 4 см-ге тең шаршы. Призманың биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер призманың биіктігі: а) D_1O кесіндісі, мұндағы O – табан диагональдарының қиылысу нүктесі (48, *а*-сурет); ә) D_1M кесіндісі, мұндағы M нүктесі AD қырының ортасы (48, *ә*-сурет) болса, призманың толық бетінің ауданын табыңдар.



48-сурет

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу призмасының табаны – тіктөртбұрыш. Оның қабырғалары $CD = 6$ м және $AD = 10$ м. Призманың ABB_1A_1 бүйір жағы – шаршы, ал AB қырындағы екіжақты бұрышы 135°-қа тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

С деңгейі



49-сурет

61. $ABCA_1B_1C_1$ көлбеу призмасының табаны – теңбүйірлі ABC үшбұрышы, оның қабырғалары $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Призманың бүйір қыры табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген, ал B_1 төбесінің ортогональ проекциясы – ΔABC медианаларының қиылысу нүктесі (49-сурет). Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

62. Металл табақтарынан жасалған гараж $ABMCDA_1B_1M_1C_1D_1$ тік бесбұрышты призмасының беті пішінді. Оның табаны – AA_1D_1D бүйір жағы, $AB = AD = 3$ м, $DD_1 = 4$ м, $\angle MBC = \angle MCB = 15°$. Гараж жасауға (табанын есептемегенде) өлшемі 1×2 м болатын қанша металл табағы жұмсалған? Тігісіне гараж бетінің ауданының 8%-ы кетеді деп есептеңдер.

3. Пирамида және оның элементтері. Пирамида бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• пирамиданың, оның элементтерінің анықтамаларын, пирамида түрлерін білетін боласыңдар;

• пирамида түрлерін және олардың төбелерінің табан жазықтығындағы ортогональ проекцияларын кескіндейсіңдер;

• пирамида жазбасын саласыңдар;

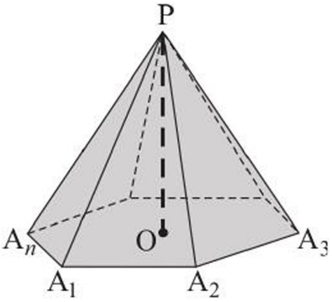
• пирамида элементтерін табуға есептер шығарасыңдар;

• пирамида түрлерінің беттері аудандарының формулаларын білетін боласыңдар;

• осы формулаларды қорытып шығарасыңдар және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

Бір жағы *n*-бұрыш, ал қалған *n* жағы төбелері ортақ үшбұрыштар болатын көпжақ *n*-бұрышты пирамида деп аталады.

n-бұрышты пирамиданың $n + 1$ жағы бар. $A_1A_2…A_n$ көпбұрышы пирамиданың *табаны* деп аталады (50-сурет). P нүктесі пирамиданың *төбесі*, PA_1, PA_2, … PA_n кесінділері *бүйір қырлары*, PA_1A_2, PA_2A_3, … $PA_{n-1}A_n$ үшбұрыштары пирамиданың *бүйір жақтары* деп аталады. Пирамиданың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр пирамиданың **биіктігі** деп аталады, мысалы, 50-суреттегі PO кесіндісі. Осы перпендикулярдың ұзындығын да пирамиданың биіктігі деп атайды. Пирамиданың бүйір қыры мен табанының диагоналі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын пирамиданың **диагональдық қимасы** деп атайды.



50-сурет

Табаны дұрыс көпбұрыш, ал барлық бүйір қырлары тең болатын пирамида дұрыс пирамида деп аталады. Дұрыс пирамиданың төбесінен оның табан қабырғасына жүргізілген бүйір жағының биіктігі пирамиданың **апофемасы** деп аталады. Дұрыс пирамида табанының центрі оның төбесінің табан жазықтығына түскен проекциясы болады.

Егер пирамида табанына параллель жазықтықпен қиылса, онда:

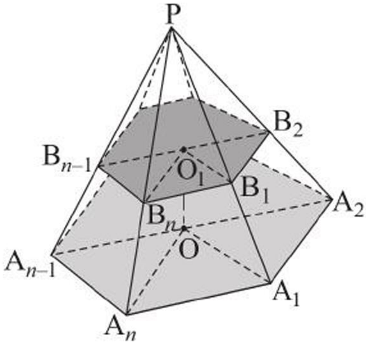
1) *пирамиданың қимасы оның табанына ұқсас көпбұрыш болады;*

2) *пирамиданың бүйір қырлары мен биіктігі осы жазықтықпен пропорционал кесінділерге бөлінеді;*

3) *қимасы мен табанының аудандарының қатынасы олардан пирамида төбесіне дейінгі қашықтықтардың квадраттарының қатынасындай болатынын атап өтелік.*

Шынымен де: 1) $PA_1A_2 \dots A_n$ пирамидасының табанына параллель қимасы – $B_1B_2 \dots B_n$ көпбұрышы салынған болсын (51-сурет). Сонда ол көпбұрыштың қабырғалары табан қабырғаларына параллель болады: $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots A_{n-1}A_n \parallel B_{n-1}B_n$.

$\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$, $\angle A_2A_3A_4 = \angle B_2B_3B_4, \dots \angle A_{n-1}A_nA_1 = \angle B_{n-1}B_nB_1$.

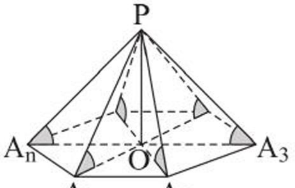


51-сурет

Одан басқа, $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}, \dots \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ (мұны өздігінен негіздеңдер). Сонда $B_1B_2 \dots B_n$ және $A_1A_2 \dots A_n$ көпбұрыштары ұқсас болады.

2) және 3) қасиеттерді өздігінен дәлелдеңдер.

Егер пирамиданың барлық бүйір қырлары табан жазықтығымен тең бұрыштар жасайтын болса, онда пирамида төбесінің табан жазықтығындағы ортогональ проекциясы табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болады.



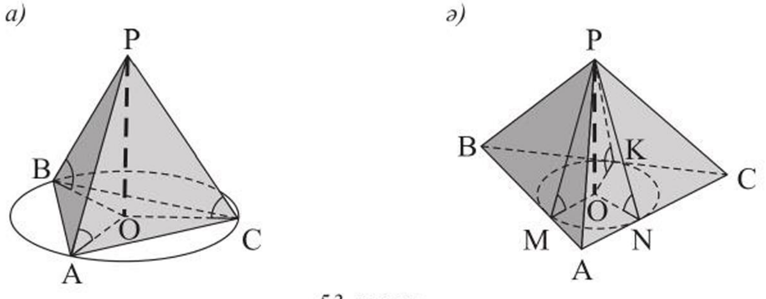
52-сурет

Шынымен де, O нүктесі $PA_1A_2 \dots A_n$ пирамидасы төбесінің ортогональ проекциясы болсын (ол нүкте – пирамида биіктігінің табаны). Сонда OA_1, $OA_2, \dots OA_n$ кесінділері, сәйкесінше, PA_1, PA_2, ... PA_n қырларының табан жазықтығындағы проекциялары (52-сурет). Шарт бойынша PA_1O, $PA_2O, \dots PA_nO$ бұрыштары тең. Демек, ортақ PO катеті бар тікбұрышты

$POA_1, POA_2, \ldots POA_n$ үшбұрыштары да тең. Сонда $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$ болады, яғни O нүктесі табанының $A_1, A_2, \ldots A_n$ төбелерінен бірдей қашықтықта, ендеше ол нүкте табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болады.

Сонымен қатар, *егер пирамида төбесінің табан жазықтығындағы ортогональ проекциясы табанына сырттай сызылған шеңбердің центрі болса, онда пирамиданың барлық бүйір қырлары табан жазықтығымен тең бұрыштар жасайды*.

Егер пирамиданың барлық бүйір жақтары табанымен тең бұрыштар жасайтын болса, онда пирамида төбесінің табан жазықтығындағы ортогональ проекциясы табанына іштей сызылған шеңбердің центрі болады.



53-сурет

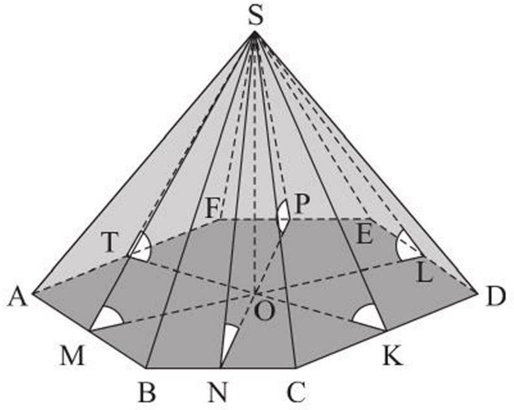
Сондай-ақ, *егер пирамида төбесінің табан жазықтығындағы ортогональ проекциясы табанына іштей сызылған шеңбердің центрі болса, онда оның барлық бүйір жақтары табанымен тең бұрыштар жасайды*. (53-суретті пайдаланып, осы қасиеттерді өздігінен дәлелдеңдер.)

Пирамиданың барлық жақтары аудандарының қосындысы оның *толық бетінің ауданы* деп, ал барлық бүйір жақтары аудандарының қосындысы *бүйір бетінің ауданы* деп аталады. Пирамиданың толық бетінің ауданы оның бүйір бетінің ауданы мен табанының ауданы арқылы $\boldsymbol{S_{\text{т. б.}} = S_{\text{б. б.}} + S_{\text{таб.}}}$ формуласымен өрнектеледі.

Т е о р е м а. **Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының жарты периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең.**

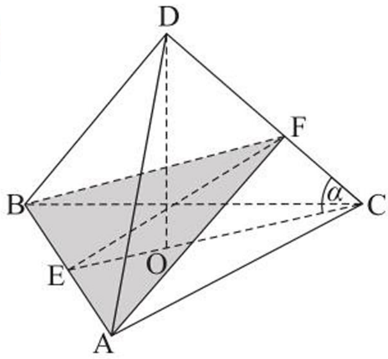
Д ә л е л д е у і. Дұрыс пирамида табанының қабырғасы a-ға, табан қабырғаларының саны n-ге, ал апофемасы l-ге тең болсын. Сонда пирамиданың бүйір бетінің ауданы $(0{,}5a \cdot l) \cdot n = p \cdot l$, мұндағы p – табанының жарты периметрі, яғни $\boldsymbol{S_{\text{б. б.}} = p \cdot l}$.

Егер пирамида төбесінің табан жазықтығына түскен ортогональ проекциясы табанына іштей сызылған шеңбердің центрі болса, онда пирамиданың барлық бүйір жақтары табанымен тең бұрыштар жасайды. Мұндай пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табанының ауданын көрсетілген екіжақты бұрыштың косинусына бөлгенге тең. Мысалы, 54-суретте $\boldsymbol{S}_{\text{б. б.}} = \dfrac{\boldsymbol{S}_{\text{таб.}}}{\cos \angle \boldsymbol{SKO}}$. (Бұл формуланы өздігінен дәлелдеңдер.)



54-сурет

1 - е с е п. Дұрыс үшбұрышты $DABC$ пирамидасының табан қабырғасы 1 дм-ге тең, ал бүйір қыры табан жазықтығымен $\alpha = 60°$ бұрыш жасайды. Пирамида табанының AB қабырғасы мен DC бүйір қырына перпендикуляр өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.



55-сурет

Ш е ш у і. DBC үшбұрышының BF биіктігін жүргіземіз, сонда AF – ADC үшбұрышының биіктігі, ал теңбүйірлі ABF үшбұрышы – көрсетілген қима, FE – оның биіктігі (55-сурет).

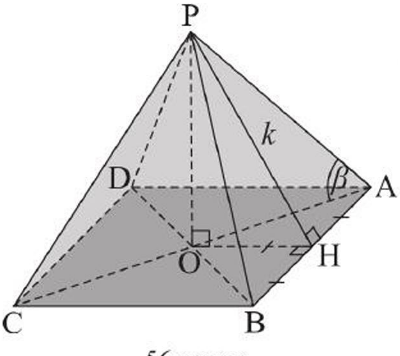
$S_{\Delta ABF} = \dfrac{1}{2} AB \cdot EF$. Тікбұрышты ΔEFC-дан $EF = CE \cdot \sin 60° = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{4}$ (дм).

Сонда $S_{\Delta ABF} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$ (дм^2).

Ж а у а б ы. $\dfrac{3}{8}$ дм^2.

2 - е с е п. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір қыры табан жазықтығымен β бұрышын жасайды, пирамиданың апофемасы k-ға тең. Пирамиданың биіктігін табу керек.

Ш е ш у і. $PABCD$ берілген пирамида (56-сурет), PO оның биіктігі, PH апофемасы болсын. Есептің шарты бойынша $PH = k$, $\angle PAO = \beta$. $PO = x$ болсын, сонда $AO = x \cdot \operatorname{ctg}\beta$, $OH = AO \cdot \sin 45° = \frac{x \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \sqrt{2}}{2}$. Пифагор теоремасы бойынша ΔPOH-тан $PO^2 + OH^2 = PH^2$ аламыз. Бұдан $x^2 + \frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\beta}{2} = k^2$ теңдігі шығады, оны түрлендіріп, $x^2(2 + \operatorname{ctg}^2\beta) = 2k^2$, $x = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\beta}}$ аламыз.

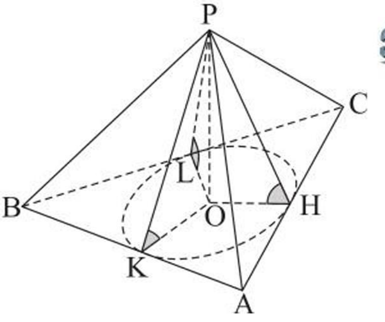


56-сурет

Ж а у а б ы. $\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2\beta}}$.

3 - е с е п. Үшбұрышты пирамидада табанының қабырғалары 13 м, 14 м және 15 м, пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. $PABC$ пирамидасында $AB = 13$ м, $AC = 14$ м, $BC = 15$ м, PO – пирамиданың биіктігі, PH, PK, PL кесінділері оның бүйір жақтарының биіктіктері болсын (57-сурет). $\angle OHP = \angle OKP = \angle OLP = 45°$ болғандықтан, O нүктесі ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің центрі болады. Сондықтан берілген пирамиданың бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos 45°}$. Герон формуласын $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ пайдаланып, мұндағы p – ΔABC-ның жарты периметрі, a, b, c – оның қабырғалары, $S_{\Delta ABC} = 84$ м^2 аламыз. Сонда $S_{б.б.} = 84\sqrt{2}$ м^2 болады.

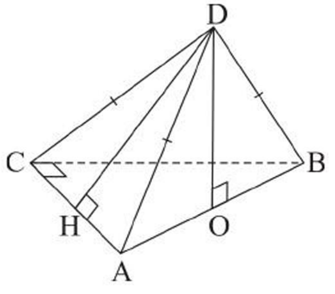


57-сурет

Ж а у а б ы. $84\sqrt{2}$ м^2.

4 - е с е п. Тетраэдрдің табаны – тікбұрышты теңбүйірлі үшбұрыш, оның барлық бүйір жақтары тең шамалы және әр бүйір қыры 1 дм-ге тең. Тетраэдрдің бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Берілген $DABC$ тетраэдрінде ΔABC – табаны, $AC = BC = a$ дм, $AB = a\sqrt{2}$ дм, $DA = DB = DC = 1$ дм болсын (58-сурет). Сонда AB гипотенузасының ортасы болатын O нүктесі тетраэдрдің DO биіктігінің табаны болады (тең көлбеулер мен олардың проекцияларының қасиеттері бойынша). $S_{\Delta ADB} = S_{\Delta ADC}$, яғни $\frac{1}{2}AB \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot DH$ болатынын ескере отырып, $a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ теңдеуін аламыз. Осы теңдеудің сол жағы мен оң жағын a-ға бөліп және оларды квадраттап, $\frac{2\left(4-2a^2\right)}{4} = \frac{4-a^2}{4}$, $3a^2 = 4$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ аламыз. Сонда ізделінді аудан: $3 \cdot S_{\Delta ADC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{4}{12}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}$ (дм^2).



58-сурет

Ж а у а б ы. $\sqrt{2}$ дм^2.

СҰРАҚТАР

1. Пирамида дегеніміз не?
2. Қандай пирамиданы дұрыс пирамида деп атайды?
3. Дұрыс пирамиданың апофемасы дегеніміз не?
4. Пирамидалардың қандай қасиеттерін білесіңдер? Оларды тұжырымдаңдар.
5. Пирамиданың толық бетінің ауданы және бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?
6. Дұрыс пирамиданың бүйір бетінің ауданын қандай формулалармен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

63. а) Кез келген пирамиданың қырларының саны неліктен жұп сан болатынын түсіндіріңдер. ә) 15 төбесі бар пирамиданың неше жағы және неше қыры бар? б) 16 қыры бар пирамиданың неше төбесі және неше жағы бар?

64. а) Пирамиданың табаны – параллелограмм. Оның іргелес екі бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр, ал кіші бүйір қыры 17 см-ге тең. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

ә) Пирамиданың табаны – қабырғасы 4 дм-ге тең шаршы. Оның бүйір қырларының бірі табан жазықтығына перпендикуляр, ал оған қарама-қарсы қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

65. Дұрыс төртбұрышты *SABCD* пирамидасының әр бүйір қыры 9 см-ге тең. Пирамиданың: а) *S* төбесіндегі жазық бұрышын; ә) бүйір қырының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын; б) бүйір жағының табан жазықтығымен жасайтын бұрышының косинусын; в) биіктігін табыңдар.

66. Дұрыс үшбұрышты *DABC* пирамидасының *D* төбесіндегі жазық бұрыштары тік, ал *ABC* табанының қабырғасы 12 см-ге тең. Пирамиданың: а) апофемасын; ә) *BC* қыры мен *DAB* жағының *DM* медианасының арасындағы бұрышты; б) биіктігін табыңдар.

67. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың: а) бүйір бетінің ауданы 48 см^2-ге, ал табанының қабырғасы 8 см-ге тең болса, оның бүйір қырын; ә) табанының қабырғасы 10 см-ге және төбесіндегі жазық бұрышы 60°-қа тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

68. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғасы 6 см-ге тең. Егер пирамиданың толық бетінің ауданы 96 см^2-ге тең болса, оның биіктігін табыңдар.

69. Дұрыс алтыбұрышты пирамида табанының қабырғасы 10 см-ге, ал апофемасы 8 см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

70. Пирамиданың 4 м-ге тең биіктігі оның бір бүйір қырымен беттеседі. Егер пирамиданың табаны: а) қабырғасы 3 м-ге тең шаршы; ә) қабырғасы $2\sqrt{3}$ м-ге тең теңқабырғалы үшбұрыш болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

71. а) Пирамиданың табаны – қабырғалары 12 см және 5 см болатын тіктөртбұрыш, ал пирамида төбесінің табан жазықтығына түскен проекциясы оның диагональдарының қиылысу нүктесі болады. Пирамиданың биіктігі 8 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.
ә) Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының диагоналі 10 см-ге, ал бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрыш 45°-қа тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

72. а) Хеопс пирамидасы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес. Оның табанының қабырғасы 230 м-ге, ал биіктігі шамамен 137 м-ге тең. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар (жауабын 100 $м^2$-ге дейін дөңгелектеңдер).

Хеопс пирамидасы, Мысыр

Бейбітшілік және Келісім сарайы, Нұр-Сұлтан қ.

ә) Бейбітшілік және Келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішіндес. Оның биіктігі мен табанының қабырғасы 62 м-ге тең. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын 1 $м^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

73. Дұрыс үшбұрышты пирамида табанының қабырғасы $4\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер пирамиданың табан жазықтығы мен: а) бүйір жағының; ә) бүйір қырының арасындағы бұрыш $60°$-қа тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

74. Пирамиданың табаны – бір бұрышы $45°$-қа тең ромб. Пирамиданың бүйір жақтары табан жазықтығына $60°$ бұрышпен көлбеген. Ромбыға іштей сызылған шеңбердің радиусы $\sqrt{2}$ дм-ге тең болса, пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

75. а) Табанының ауданы $25\sqrt{2}$ $см^2$-ге, ал бүйір бетінің ауданы 50 $см^2$-ге тең дұрыс пирамиданың бүйір жағы мен табан жазықтығы арасындағы екіжақты бұрышты табыңдар.

ә) Табанының қабырғасы $2\sqrt{3}$ дм-ге, ал бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышы $30°$-қа тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

76. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі 4 см-ге, ал табанының қабырғасы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Осы пирамида мен табаны осы пирамиданың табанындай, ал 4 см-ге тең биіктігі бүйір қырларының бірімен беттесетін пирамиданың бүйір беттерінің аудандарын салыстырыңдар.

77. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың моделін жасап, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

78. Егер пирамиданың табаны: а) гипотенузасы 10 дм-ге тең тікбұрышты үшбұрыш, ал әр бүйір қыры табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайтын болса; ә) қабырғалары 6 см, 6 см, $6\sqrt{3}$ см-ге тең доғалбұрышты үшбұрыш, ал әр бүйір қыры 10 см-ге тең болса, пирамиданың биіктігін кескіндеп, ұзындығын табыңдар.

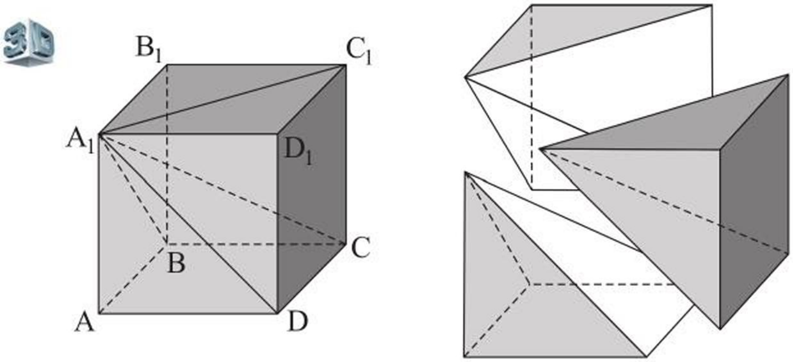
79. Пирамиданың табаны – қабырғалары 10 м, 10 м, 12 м болатын үшбұрыш. Пирамиданың бүйір жақтары табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін табыңдар.

80. Табаны: а) тікбұрышты үшбұрыш, ал екі бүйір жағы табанына перпендикуляр болатын; ә) тіктөртбұрыш, ал биіктігінің табаны оған сырттай сызылған шеңбердің центрі болатын пирамиданың моделін жасаңдар.

81. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың толық бетінің ауданы $112\sqrt{3}$ см^2-ге, ал бүйір бетінің ауданы $96\sqrt{3}$ см^2-ге тең. Осы пирамиданың биіктігін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

82. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, оның $AB = 3$ м, $BC = 6$ м, $BB_1 = 12$ м. B_1ABC пирамидасының толық бетінің ауданын табыңдар.

83. Қыры 1 дм-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ағаш кубын A_1ABCD, $A_1BCC_1B_1$, $A_1DCC_1D_1$ пирамидаларына бөлген (59-сурет). Осы пирамидалардың неліктен тең болатынын түсіндіріңдер және олардың толық беттерінің аудандарын табыңдар.



59-сурет

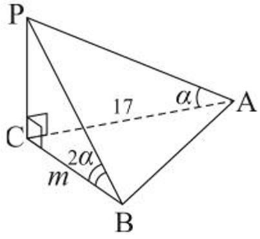
84. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың диагональдық қимасы: а) ауданы 32 см^2-ге тең тікбұрышты үшбұрыш; ә) ауданы $2\sqrt{3}$ дм^2-ге тең дұрыс үшбұрыш болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

85. а) $PABC$ пирамидасының табаны – ΔABC және $AB = 21$ см, $BC = 8$ см, $AC = 15$ см. Егер $PA \perp (ABC)$, $PA = 3{,}5\sqrt{5}$ см болса, пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) $PABC$ пирамидасының биіктігі $PA = 5$ дм. $AB = 13$ дм, $BC = 14$ дм, $AC = 15$ дм болса, пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

86. Шатыр $PABCD$ пирамидасы пішінді, оның табаны – $ABCD$ тіктөртбұрышы, әрі $AB = 2$ м, $BC = 2{,}5$ м. Оның 2 м-ге тең PB қыры табанына перпендикуляр. Осы шатырды жасауға неше м^2 брезент жұмсалғанын, оның тігісіне бүйір беті ауданының 2 %-дай материал кететінін ескере отырып, 0,1 м^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

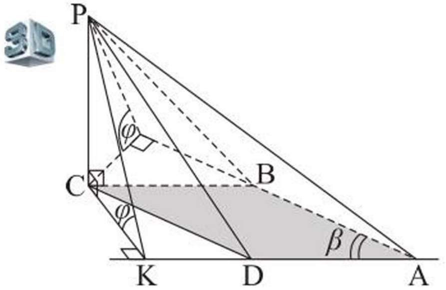
С деңгейі



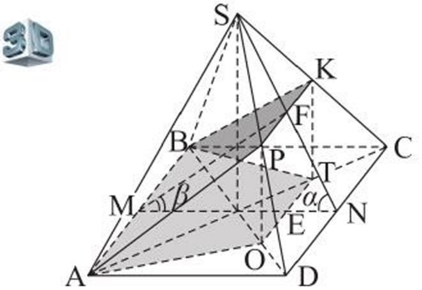
60-сурет

87. Үшбұрышты $PABC$ пирамидасының PC қыры – оның биіктігі, $AC = 17$ см, $BC = m$ см, PBC бұрышы PAC бұрышынан екі есе артық (60-сурет). Пирамиданың биіктігін және m-нің барлық мүмкін мәндерін табыңдар.

88. Пирамиданың табаны – қабырғасы a-ға, сүйір бұрышы β-ға тең ромб. Пирамиданың екі бүйір жағы табанына перпендикуляр, ал олардың арасындағы бұрыш β-ға тең, басқа екі бүйір жағының бірі табан жазықтығымен φ бұрышын жасайды (61-сурет). Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.



61-сурет



62-сурет

89. Дұрыс төртбұрышты $SABCD$ пирамидасының табан қабырғасы c-ға тең, ал бүйір жағы табан жазықтығына α бұрышпен көлбеген. Табан қабырғасы арқылы онымен β ($\beta < \alpha$) бұрышын жасайтын жазықтық жүргізілген. Пирамиданың осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар (62-сурет).

4. Қиық пирамида. Қиық пирамида бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• қиық пирамиданың, оның элементтерінің анықтамаларын; пирамиданың түрлерін білетін боласыңдар;

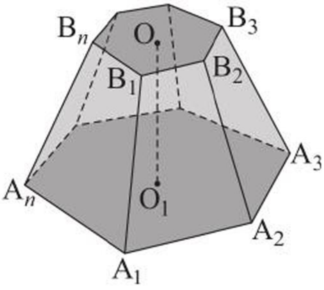
• қиық пирамидалардың жазбаларын саласыңдар;

• қиық пирамида элементтерін табуға есептер шығарасыңдар;

• әртүрлі қиық пирамидалардың беттері аудандарының формулаларын білетін боласыңдар;

• осы формулаларды қорытып шығарасыңдар және оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

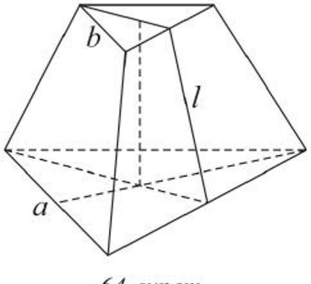
***n*-бұрышты қиық пирамида деп *n*-бұрышты пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима жазықтықтың арасындағы көпжақ аталады.**



63-сурет

Мысалы, 63-суреттегі $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ көпжағы – қиық пирамида. $A_1A_2...A_n$ және $B_1B_2...B_n$ көпбұрыштары қиық пирамиданың **табандары** деп, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ... $A_nB_nB_1A_1$ трапециялары *бүйір жақтары* деп аталады. Ұштары қиық пирамиданың табандарына тиісті және оларға перпендикуляр кесінді де, осы кесіндінің ұзындығы да қиық пирамиданың **биіктігі** деп аталады. Қиық пирамиданың бүйір қыры мен табанының диагоналін қамтитын қима оның **диагональдық қимасы** деп аталады.

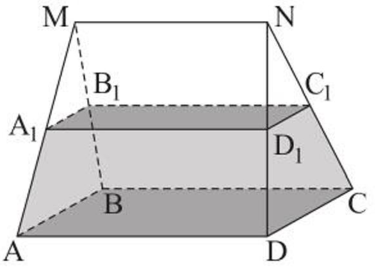
Дұрыс пирамиданың табаны мен табан жазықтығына параллель қима жазықтықтың арасындағы көпжақ **дұрыс қиық пирамида** деп аталады. Дұрыс қиық пирамиданың барлық бүйір жақтары бірдей теңбүйірлі трапециялар болады, осы трапециялардың биіктіктері дұрыс қиық пирамиданың **апофемалары** деп аталады. Мысалы, 64-суретте дұрыс үшбұрышты қиық пирамида кескінделген, оның табан қабырғалары – *a* мен *b*, апофемасы – *l*.



64-сурет

Қиық пирамида салу үшін толық пирамиданың қырынан бір нүкте алып, басқа қырларын табан қабырғасына параллель кесінділермен қию керек. Сонда шыққан қима – көпбұрыш жалғыз болады, ол толық пирамидадан қиық пирамида қияды, себебі толық пирамиданың қимасы табанына параллель және оған ұқсас көпбұрыш болады.

Екі жағы параллель жазықтықтарда жататын, ал басқа жақтары трапеция болатын көпжақтардың бәрі бірдей қиық пирамида бола бермейді. Мысалы, 65-суретте $MNABCD$ көпжағынан қиылған $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көпжағы кескінделген.



65-сурет

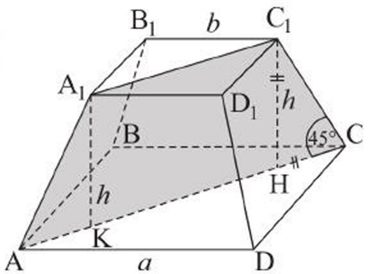
Қиық пирамиданың барлық жақтарының аудандарының қосындысы *толық бетінің ауданы* деп, ал оның барлық бүйір жақтарының аудандарының қосындысы *бүйір бетінің ауданы* деп аталады. Пирамиданың толық бетінің $S_{т.б.}$ ауданы оның бүйір бетінің $S_{б.б.}$ ауданы мен табандарының S_1 және S_2 аудандары арқылы былай өрнектеледі: $\boldsymbol{S_{т.б.} = S_{б.б.} + S_1 + S_2}$.

Т е о р е м а. **Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның табандары периметрлерінің қосындысының жартысын апофемаға көбейткенге тең:**

$$\boldsymbol{S_{б.б.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l}.$$

Дәлелдеуін өздігінен орындаңдар.

1 - е с е п. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида табандарының аудандары S_1 және S_2 $(S_1 > S_2)$, ал бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Пирамиданың диагональдық қимасының ауданын табу керек.



66-сурет

Ш е ш у і. Дұрыс төртбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қиық пирамидасы берілген болсын (66-сурет). Ізделінді аудан теңбүйірлі AA_1C_1C трапециясының ауданына тең.

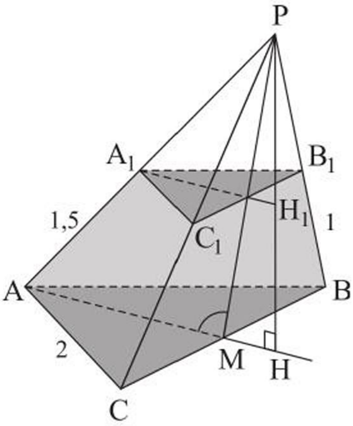
$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot h = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{AC^2}{2} - \frac{A_1C_1^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(S_1 - S_2).$$

Ж а у а б ы. $0{,}5(S_1 - S_2)$.

2 - е с е п. Қиық пирамиданың табандары – дұрыс үшбұрыштар. Төменгі табанының қабырғасы 2 м-ге, бүйір қырларының бірі 1,5 м-ге тең,

ал жоғарғы табанының қабырғасы мен қалған бүйір қырларының әрқайсысы 1 м-ден. Үлкен бүйір қырына қарсы жатқан табан қабырғасындағы екіжақты бұрышты табу және осы қиық пирамида алынған толық пирамиданың биіктігін кескіндеу керек.

Ш е ш у і. $ABCA_1B_1C_1$ қиық пирамидасында $AB = BC = AC = 2$ м, $AA_1 = 1,5$ м, $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1 = BB_1 = CC_1 = 1$ м болсын. Оны $PABC$ пирамидасына дейін толықтырып салайық (67-сурет).



67-сурет

Есептің шарты бойынша $\Delta PBC \sim \Delta PB_1C_1$ және $\Delta PAC \sim \Delta PA_1C_1$, ұқсастық коэффициенті 2-ге тең, демек, $PB_1 = PC_1 = 1$ м, $PA_1 = 1,5$ м.

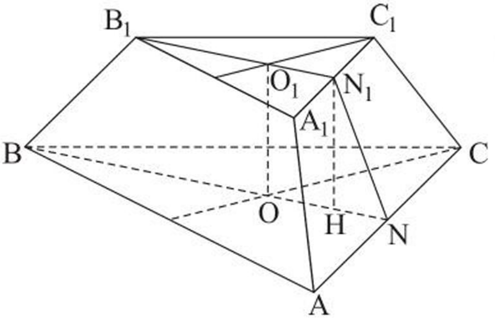
Ендеше, $\Delta PBC = \Delta ABC$ және олардың биіктіктері: $PM = AM = \sqrt{3}$ м.

ΔAPM-нен: $\cos\angle PMA = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 3^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$. Демек, $\angle PMA = 120°$, ал пирамиданың PH биіктігінің H табаны AM медианасының созындысында жатыр.

Ж а у а б ы. 120°.

3 - е с е п. Табандарының қабырғалары 12 м және 6 м, ал биіктігі 1 м болатын дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. $ABCA_1B_1C_1$ дұрыс қиық пирамидасында $AB = 12$ м, $A_1B_1 = 6$ м, биіктігі $N_1H = 1$ м және N_1N апофемасы болсын (68-сурет). Ізделінді ауданды $S_{б.б.} = \frac{3\cdot AB + 3\cdot A_1B_1}{2}\cdot N_1N$ формуласын пайдаланып табайық.



68-сурет

N_1N апофемасын тікбұрышты N_1HN үшбұрышынан табамыз:

$$HN = ON - O_1N_1 = \frac{12\sqrt{3}}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ (м), сонда } N_1N = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ (м)}.$$

$$S_{б.б.} = \frac{1}{2}\cdot(36+18)\cdot 2 = 54 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ж а у а б ы. 54 м^2.

СҰРАҚТАР

1. Қиық пирамида дегеніміз не?

2. Қандай қиық пирамида дұрыс қиық пирамида деп аталады?

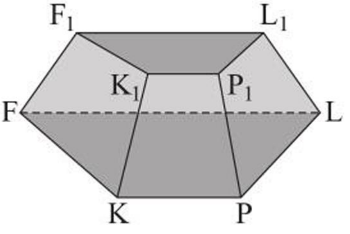
3. Дұрыс қиық пирамиданың апофемасы дегеніміз не?

4. Қиық пирамиданың толық бетінің ауданы және бүйір бетінің ауданы дегеніміз не?

5. Дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі



69-сурет

90. 69-суретте кескінделген көпжақ неге қиық пирамида болмайтынын түсіндіріңдер.

91. а) Кез келген n-бұрышты қиық пирамиданың қырларының саны $3n$-ге бөлінеді деген ақиқат па?

ә) Қиық пирамиданың биіктігі оның бүйір қырларының біріне тең болуы мүмкін бе?

б) Қиық пирамиданың табандары шаршы емес, ромб болса, онда оның бүйір қырлары тең болуы мүмкін бе?

92. а) Табандарының аудандарының қатынасы $1:4$ болатын үшбұрышты қиық пирамида салыңдар. ә) Пирамиданың PO биіктігінің M нүктесі арқылы табанына параллель, ауданы табанының ауданынан екі есе кем болатын қима жүргізілген. M нүктесі PO биіктігін қандай қатынаста бөледі?

93. Егер қиық пирамиданың табандары тіктөртбұрыштар және оның бүйір қырларының бірі табан жазықтығына перпендикуляр болса, онда оның барлық бүйір жақтары тікбұрышты трапециялар болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

94. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 8 см және 4 см, ал бүйір қыры мен табан жазықтығының арасындағы бұрыш $45°$-қа тең. Қиық пирамиданың: а) биіктігін; ә) диагональдық қимасының ауданын табыңдар.

95. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары 8 см және 16 см, ал бүйір жағы табан жазықтығына $60°$ бұрыш жасап көлбеген. Қиық пирамиданың биіктігін табыңдар.

96. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 5 см және 11 см, ал оның биіктігі 13 см. Қиық пирамиданың апофемасын табыңдар.

97. Дұрыс қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 4 см және 6 см-ге, ал апофемасы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Егер осы қиық пирамиданың табандары: а) төртбұрыштар; ә) үшбұрыштар болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

98. Табандарының қабырғалары 8 см және 6 см болатын: а) төртбұрышты және биіктігі 7 см-ге тең; ә) алтыбұрышты және биіктігі $2\sqrt{6}$ см-ге тең дұрыс қиық пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

99. Табандарының қабырғалары 12 см және 18 см болатын: а) үшбұрышты және биіктігі $3\sqrt{21}$ см-ге тең; ә) төртбұрышты және бүйір жағындағы трапецияның бұрышы 60°-қа тең дұрыс қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

100. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 15 дм-ге және 5 дм-ге, ал диагональдық қимасының ауданы $40\sqrt{3}$ дм^2-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

101. а) Дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары $4\sqrt{3}$ см-ге және $10\sqrt{3}$ см-ге тең. Оның табанының қырындағы екіжақты сүйір бұрышы 60°-қа тең болса, бүйір бетінің ауданын табыңдар.
ә) Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының диагональдары 12 см-ге және 4 см-ге, ал төменгі табанының қырындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең. Осы қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

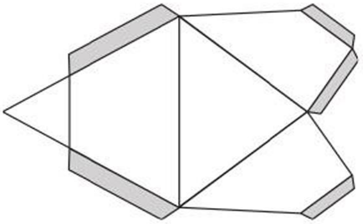
102. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары және биіктігі 10 : 4 : 4 қатынасындай, ал оның бүйір бетінің ауданы 280 см^2-ге тең. Осы пирамиданың табандарының аудандарын табыңдар.

103. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың табанының ауданы $16\sqrt{3}$ см^2, ал апофемасы 10 см. Пирамида биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель қима салынған. Пайда болған қиық пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

104. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың апофемасы 5 см-ге, ал бүйір жағының орта сызығы 9 см-ге тең. Төменгі табан қырындағы екіжақты бұрыштың синусы $\frac{4}{5}$-ке тең. Қиық пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

105. Дұрыс үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының табан қабырғасы 4 дм-ге, ал бүйір қыры 3 дм-ге тең. M және N нүктелері, сәйкесінше, A_1B_1 және B_1C_1 кесінділерінің орталары. $ABCMB_1N$ көпжағы қиық пирамида болатынын анықтап, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

106. а) Ұзындығы 9 см-ге тең B_1B кесіндісі – үшбұрышты қиық $ABCA_1B_1C_1$ пирамидасының биіктігі. Төменгі табанының қабырғалары $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Қиық пирамиданың жоғарғы және төменгі табандары аудандарының қатынасы $\frac{4}{25}$-ке тең. Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар. ә) а) есебінде берілген қиық пирамиданың моделін жасаңдар. 70-суретте осы қиық пирамиданың кішірейтілген жазбасы желімдеуге арналған қақпақшаларымен көрсетілген.



70-сурет

В деңгейі

107. Пирамида табанының ауданы 512 $см^2$-ге, ал биіктігі 16 см-ге тең. Ауданы 50 $см^2$-ге тең және пирамиданың табанына параллель қима одан қандай қашықтықта болатынын табыңдар.

108. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамида табандарының қабырғалары $1:2$ қатынасындай, ал оның биіктігі 6 см-ге тең. Пирамиданың бүйір жағы мен табан жазықтығының арасындағы бұрыш 45°-қа тең болса, оның табандарының аудандарын табыңдар.

109. Үшбұрышты қиық пирамиданың екі бүйір жағы – сүйір бұрышы 45°-қа тең және кіші бүйір қабырғасы ортақ болатын өзара тең тікбұрышты трапециялар. Осы жақтардың арасындағы екіжақты бұрышы 120°-қа тең. Пирамиданың үшінші бүйір жағының табан жазықтығына көлбеулік бұрышының тангенсін табыңдар.

«Алтынемел» ұлттық саябағындағы Айғайқұм, Алматы облысы

110. Шағылдардың бірінің пішіні дұрыс үшбұрышты қиық пирамида тәріздес, оның табандарының қабырғалары 50 м және 2 м, ал бүйір жағының ауданы 988 $м^2$. Шағылдың биіктігін 1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

111. Үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір қырларындағы екіжақты бұрыштары тең болса, онда оның бүйір бетінің ауданы табандарының периметрлері қосындысының жартысы мен кез келген бүйір жағы биіктігінің көбейтіндісіне тең деген ақиқат па?

112. Үшбұрышты пирамида төбесінің ортогональ проекциясы – қабырғалары 20 см, 16 см және 12 см болатын табанына іштей сызылған шеңбердің центрі. Пирамиданың табанына параллель жазықтықпен қимасы одан табандарының қатынасы $9:16$ болатын қиық пирамида бөлді. Егер сол қиық пирамиданың биіктігі $4\sqrt{3}$ см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

113. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың әр бүйір қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең және төменгі табанымен 45° бұрыш жасайды. Егер қиық пирамида табандары аудандарының қатынасы 4-ке тең болса, оның бүйір бетінің ауданы қандай болғаны?

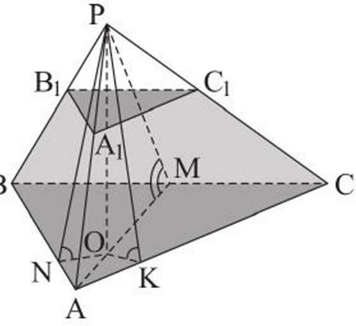
114. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғаларының қатынасы $1:2$, биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең, ал бүйір қыры табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

115. Үшбұрышты қиық пирамиданың бүйір жақтары – әрқайсысының табандарының қосындысы 12 см-ге тең болатын теңбүйірлі трапециялар. Әрбір трапецияның биіктігі 4 см-ге тең, ал олардың бүйір қабырғаларын қамтитын түзулер тік бұрыш жасап қиылысады. Осы қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

C деңгейі

116. Қиық пирамиданың табаны – трапеция, оның параллель қабырғалары b және $2b$-ға, ал сүйір бұрыштарының бірі 60°-қа тең. Қиық пирамиданың биіктігі $0{,}25b$-ға тең, ал оның бүйір қырлары табан жазықтығына тең бұрышпен көлбеген. Егер пирамиданың табандары аудандарының қатынасы 1 : 4 болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

117. Үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ қиық пирамида табанының әрбір қабырғасы 1 дм-ге тең, ал осы қабырғалардағы екіжақты бұрыштарының қатынасы 1 : 2 : 2. Егер толық $PABC$ пирамидасының биіктігінің табанынан BC қабырғасына дейінгі қашықтық $\frac{\sqrt{3}}{3}$ дм-ге тең болса, осы екіжақты бұрыштардың ең кішісін 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар (71-сурет).



71-сурет

118. а) Төртбұрышты қиық пирамиданың табанына іштей шеңбер сызуға болатыны белгілі, ал оның әр бүйір жағы табанына 75° бұрышпен көлбеген. Қиық пирамиданың биіктігі h, ал төменгі және жоғарғы табандарының сыбайлас екі қабырғасының қосындысы p және q-ға тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) Төртбұрышты қиық пирамиданың табандары – ромбылар, олардың кіші диагональдары m және n-ге, ал сүйір бұрыштары 45°-қа тең. Қиық пирамиданың әр бүйір жағы төменгі табанына 60° бұрышпен көлбеген болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

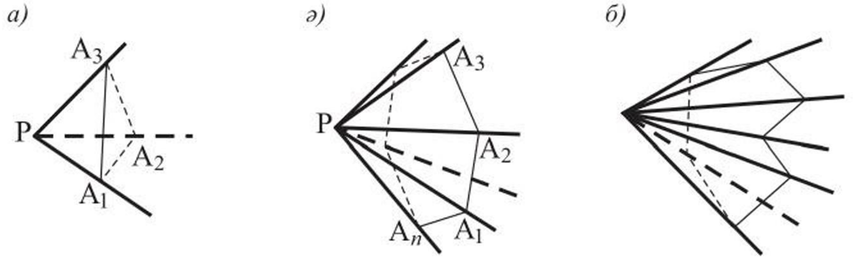
5. Көпжақты бұрыш және оның қасиеттері

Тақырыпты оқу барысында:

• көпжақты бұрыштың анықтамасын және оның қасиеттерін білетін боласыңдар;

• оларды есептер шығаруда қолданасыңдар.

$PA_1A_2A_3$ **үшжақты бұрышы** деп бір жазықтықта жатпайтын A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1 бұрыштарынан және кеңістіктің олармен шектелген бөлігінен тұратын фигура аталады (72, *а*-сурет). $PA_1A_2 \ldots A_n$ көпжақты бұрышының ұғымы да дәл осылай анықталады (72, *ә*-сурет). A_1PA_2, $A_2PA_3, \ldots$ A_nPA_1 жазық бұрыштары көпжақты бұрыштың *жақтары* деп, олардың ортақ P төбесі көпжақты бұрыштың *төбесі* деп, ал PA_1, $PA_2, \ldots$ PA_n сәулелері $PA_1A_2 \ldots A_n$ көпжақты бұрышының *қырлары* деп аталады.



72-сурет

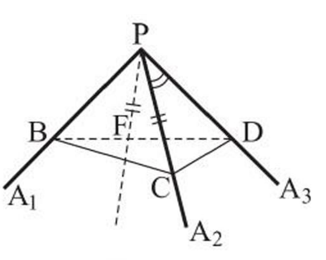
Көпжақты бұрыштар көпжақтар сияқты дөңес (72, *а*, *ә*-суреттер) және дөңес емес (72, *б*-сурет) болуы мүмкін. Кез келген үшжақты бұрыш дөңес болады.

Көпжақтың кез келген төбесіндегі барлық жазық бұрыштарының әрбір жиыны кеңістіктің олармен шектелген бөлігімен бірге көпжақты бұрыш құрайды.

Т е о р е м а. **Үшжақты бұрышта екі жазық бұрышының қосындысы үшінші жазық бұрышынан артық.**

Д ә л е л д е у і. $PA_1A_2A_3$ үшжақты бұрышы берілген болсын. Егер P төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тең болса, онда тұжырым ақиқат.

$\angle A_1PA_3 > \angle A_2PA_3 \geq \angle A_1PA_2$ болсын. A_1PA_3 жағының жазықтығына A_2PA_3 бұрышына тең A_3PF бұрышын саламыз (73-сурет). PA_2 мен PF сәулелеріне PC мен PF тең кесінділерін саламыз.



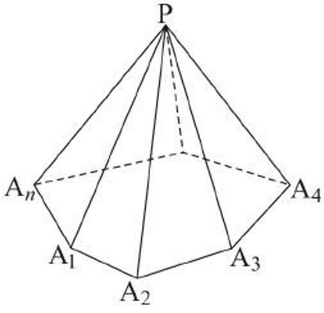
73-сурет

Берілген үшжақты бұрыштың BD қабырғасында F нүктесі жататын қимасын – ΔBCD-ны саламыз.

ΔBCD-да: $BD < BC + CD$. $FD = CD$ болғандықтан, $BD - FD < BC + CD - CD$, $BF < BC$. BPF және BPC үшбұрыштарында екі тең қабырғадан бар, демек, олардың үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрышы жатыр: $\angle BPC > \angle BPF$.

$\angle CPD = \angle FPD$ болғандықтан, $\angle BPC + \angle CPD > \angle FPD + \angle BPF$. Демек, $\angle BPC + \angle CPD > \angle BPD$. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан, *үшбұрышты пирамиданың кез келген төбесіндегі екі жазық бұрышының қосындысы осы төбедегі үшінші жазық бұрышынан артық болатыны шығады*.



74-сурет

Т е о р е м а. **Дөңес көпжақты бұрыштың барлық жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем.**

Д ә л е л д е у і. Төбесі P болатын көпжақты бұрыштың әр қырын қиып өтетін $A_1A_2A_3 \dots A_n$ жазықтығы одан $PA_1A_2A_3 \dots A_n$ пирамидасын бөледі (74-сурет). Әрі қарай теореманы дәлелдеу үшін, төбелері $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ болатын жазық бұрыштарға алдыңғы теореманы бірнеше қайтара қолдануға тура келеді.

$$(+)\begin{cases} \angle A_nA_1A_2 < \angle PA_1A_n + \angle PA_1A_2 \ (A_1 \textit{ төбесінде}); \\ \angle A_1A_2A_3 < \angle PA_2A_1 + \angle PA_2A_3 \ (A_2 \textit{ төбесінде}); \\ \angle A_2A_3A_4 < \angle PA_3A_2 + \angle PA_3A_4 \ (A_3 \textit{ төбесінде}); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \angle A_{n-1}A_nA_1 < \angle PA_nA_{n-1} + \angle PA_nA_1 \ (A_n \textit{ төбесінде}). \end{cases}$$

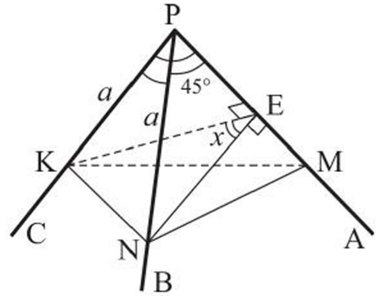
P төбесіндегі барлық жазық бұрыштардың қосындысын x деп белгілейік, сонда $x = \angle A_nPA_1 + \angle A_1PA_2 + \angle A_2PA_3 + \dots + \angle A_{n-1}PA_n$ болады. Барлық теңсіздіктердің сол және оң жақтарын қосып және шыққан теңсіздіктің екі жағына x-ті қосып, мынаны аламыз: $180° \cdot (n - 2) + x < 180° \cdot n$, бұдан $x < 360°$ шығады. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан *дөңес көпжақтың әрбір төбесіндегі барлық жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем* болатыны шығады.

Бұл теореманың қарапайым көрнекі түсіндірмесі бар. Егер қалың қағаздан n-бұрышты пирамида жасау керек болса, онда пирамиданың төбесіндегі жазық бұрыштардың қосындысы 360°-тан кем болуы керек. Егер оның төбесіндегі жазық бұрыштардың қосындысы 360°-қа тең болса, онда олар пирамиданың сыбайлас жақтары жататын жазықтық құрар еді. Ал бұл мүмкін емес.

1 - е с е п. $PABC$ үшжақты бұрышының әрбір жазық бұрышы 45°-қа тең. PA қырындағы екіжақты бұрышты табу керек.

Ш е ш у і. P төбесінен берілген үшжақты бұрыштың қырларына $PM = PN = PK = a$ тең кесінділерін саламыз (75-сурет). Сонда $PMKN$ тетраэдрі – MKN табаны болатын дұрыс үшбұрышты пирамида. Осы пирамиданың PM қырындағы екіжақты бұрыш $PABC$ үшжақты бұрышының PA қырындағы екіжақты бұрышы болады. Ізделінді $\angle NEK = x$ болсын. Тікбұрышты NEP және KEP үшбұрыштарынан: $NE = KE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ аламыз. ΔNPK-да



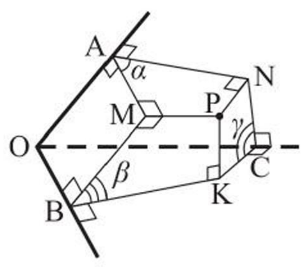
75-сурет

$KN^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$. ΔNEK-дан $\cos x = \dfrac{KE^2 + NE^2 - KN^2}{2KE \cdot EN} =$ $= \dfrac{a^2 - a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)}{a^2} = \sqrt{2} - 1$ аламыз. Бұдан $x = \arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Ж а у а б ы. $\arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

2 - е с е п. Үшжақты бұрыштың екіжақты бұрыштарының қосындысы 180°-тан артық болатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. $OABC$ үшжақты бұрышы берілген болсын. OA, OB, OC қырларындағы екіжақты бұрыштарын, сәйкесінше, α, β, γ деп белгілейік.



76-сурет

$\alpha + \beta + \gamma > 180°$ болатынын дәлелдейік. Ол үшін берілген үшжақты бұрыштың ішкі облысына тиісті кез келген P нүктесін алып, оның жақтарына PM, PN және PK перпендикулярларын жүргіземіз (76-сурет). Сонда MPN, MPK және KPN бұрыштары $PMNK$ үшжақты бұрышының жазық бұрыштары болады. $\alpha = 180° - \angle MPN$, $\beta = 180° - \angle MPK$, $\gamma = 180° - \angle NPK$ болғандықтан, $\alpha + \beta + \gamma = 540° - (\angle MPN + \angle MPK + \angle NPK)$. $PMNK$ үшжақты бұрышының жазық бұрыштарының қосындысы 360°-тан кем болғандықтан, $\alpha + \beta + \gamma > 180°$ болады. Дәлелденді.

СҰРАҚТАР

1. Үшжақты бұрыш дегеніміз не?
2. Дөңес төртжақты бұрышты кескіндеңдер.
3. а) Үшжақты бұрыштың; ә) дөңес көпжақты бұрыштың жазық бұрыштарының қасиетін тұжырымдаңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

119. Алтыбұрышты пирамида берілген.

а) Оның төбелерінде қанша көпжақты бұрыш бар?

ә) Оның төбелерінде: 1) үшжақты; 2) төртжақты; 3) алтыжақты бұрыш бар ма, бар болса, олар нешеу?

120. Жазық бұрыштары: а) 130°, 85°, 36°; ә) 100°, 70°, 40°; б) 160°, 130°, 80°; в) 82°, 56°, 26°; г) 150°, 120°, 90° болатын үшжақты бұрыш бола ма?

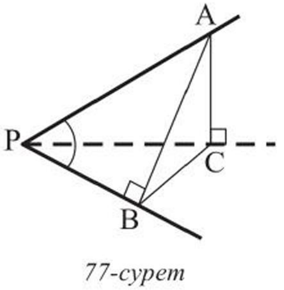
121. а) $\alpha = \beta + \gamma$; ә) $\alpha > \beta + \gamma$; б) $\alpha < \beta + \gamma$; в) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ және $\alpha < \beta + \gamma$ болса, мұндағы α – бұрыштардың ең үлкені, жазық бұрыштары α, β, γ болатын үшжақты бұрыш бар ма?

122. Үшжақты бұрыштың қырларындағы екіжақты бұрыштары φ, δ, ω-ға тең. Ақиқат тұжырымды таңдаңдар:

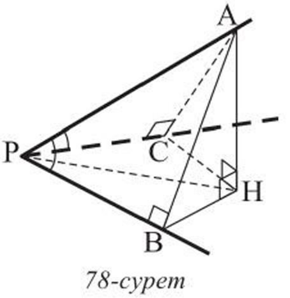
а) $\varphi + \delta + \omega = 180°$; ә) $\varphi + \delta + \omega > 180°$; б) $\varphi + \delta + \omega < 360°$.

123. Төртжақты бұрыштың кез келген жазық бұрышы қалған барлық жазық бұрыштарының қосындысынан кем болатынын дәлелдеңдер.

124. *PABC* үшжақты бұрышының *PC* қырындағы екіжақты бұрышы тік, *PB* қырындағы екіжақты бұрышы 45°-қа, ал *APB* жазық бұрышы 60°-қа тең (77-сурет). Басқа екі жазық бұрышын табыңдар.



77-сурет



78-сурет

125. *PABC* үшжақты бұрышы берілген, оның *APB* мен *APC* жазық бұрыштары тең. 78-суретті пайдаланып, *PB* мен *PC* қырларындағы екіжақты бұрыштары тең болатынын дәлелдеңдер.

126. а) $PABC$ үшжақты бұрышының барлық жазық бұрыштары 60°-қа тең. Оның PB мен PC қырларындағы екіжақты бұрыштарды табыңдар.
ә) $PABC$ үшжақты бұрышының PB мен PC қырларындағы екіжақты бұрыштары 60°-тан, ал CPB жазық бұрышы 120°-қа тең. Оның басқа екі жазық бұрышын табыңдар.

127. $PABCD$ төртжақты бұрышының әрбір жазық бұрышы 60°-қа тең. APC мен BPD бұрыштары тең болса, APC бұрышын табыңдар.

128. $DABC$ пирамидасының A төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік. $DA = 12$ см, $DB = 20$ см, $DC = 15$ см болса, осы пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

129. $SABC$ үшбұрышты пирамидасында $\angle ASB = \angle CSB = 90°$, $\angle ASC = 120°$, $AS = 4$ дм, $SB = 3$ дм, $SC = 2$ дм. ΔABC-ның ауданын табыңдар.

130. $OABC$ үшжақты бұрышының BOC жазық бұрышы γ-ға тең ($\gamma < 90°$), OC қырындағы екіжақты бұрыш тік, OB қырындағы екіжақты бұрыш φ-ге тең ($\varphi < 90°$). а) $\operatorname{tg}\angle AOB = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$; ә) $\operatorname{tg}\angle AOC = \sin\gamma \cdot \operatorname{tg}\varphi$ болатынын дәлелдеңдер.

131. Үшбұрышты дұрыс пирамиданың табан қабырғасы мен биіктігі, сәйкесінше, a және $2a$-ға тең болса, пирамиданың бүйір қырындағы екіжақты бұрышты табыңдар.

С деңгейі

132. $PABC$ тетраэдрінің әрбір A, B, C төбелеріндегі жазық бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең болса, оның барлық жақтары тең болатынын дәлелдеңдер.

133. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың төбесіндегі жазық бұрышы бүйір қырының табан жазықтығына көлбеулік бұрышына тең болса, сол жазық бұрышты табыңдар.

134. Дұрыс төртбұрышты $SABCD$ пирамидасы берілген. а) $\angle ASC = 2\alpha$; ә) $\angle((DSC), (BSC)) = 2\beta$ болса, пирамиданың SD мен SC бүйір қырларының арасындағы бұрышты табыңдар.

6. Дұрыс көпжақтар

Тақырыпты оқу барысында:

• дұрыс көпжақтың анықтамасын; дұрыс көпжақтың түрлерін және олардың қасиеттерін білетін боласыңдар;

• әртүрлі дұрыс көпжақтарды ажырата аласыңдар;

• дұрыс көпжақтар мен олардың қасиеттерін есептер шығаруда қолданасыңдар.

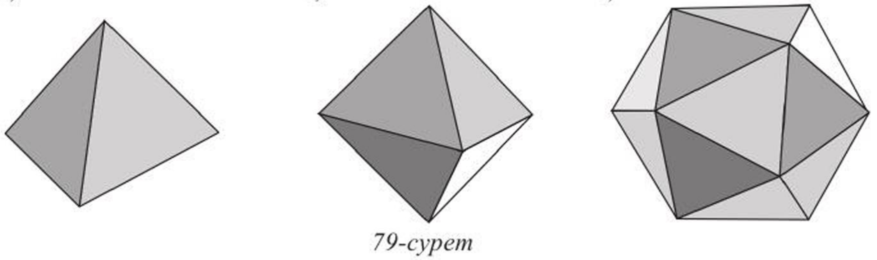
Барлық жақтары тең дұрыс көпбұрыштар және әрбір төбесінде түйісетін қырларының саны бірдей болатын дөңес көпжақты дұрыс көпжақ деп атайды.

Т е о р е м а. **Дұрыс көпжақтың бес түрі болады.**

Д ә л е л д е у і. Дөңес көпжақтың төбесіндегі жазық бұрыштардың қосындысының қасиетін пайдаланамыз. Бір төбесінен n қыры шығатын болсын ($n \geq 3$), сонда осы төбедегі жазық бұрыштардың саны да n болады және олар өзара тең. Жазық бұрыштарының бірі $x°$ болсын, сонда осы төбедегі барлық жазық бұрыштардың қосындысы $nx°$ болады. Жазық бұрыштардың қосындысының қасиеті бойынша $nx° < 360°$.

1) Дұрыс көпжақтың жақтары дұрыс үшбұрыштар болсын. Сонда бір төбеде олардың 3, 4 және 5-уі түйісуі мүмкін, себебі $60° \cdot 3 < 360°$, $60° \cdot 4 < 360°$, $60° \cdot 5 < 360°$, ал $60° \cdot 6 = 360°$. Оған сәйкес келетін дұрыс көпжақтар – дұрыс *тетраэдр* (төртжақ), дұрыс *октаэдр* (сегізжақ), дұрыс *икосаэдр* (жиырмажақ) (79-сурет).

а) *ә)* *б)*



79-сурет

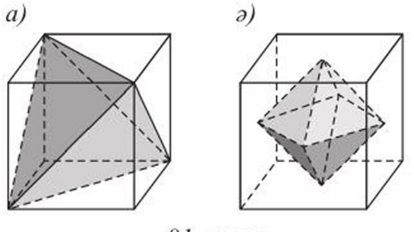
2) Дұрыс көпжақтың жақтары шаршылар болсын. Бір төбеде олардың тек 3-уі түйісуі мүмкін, өйткені $90° \cdot 3 < 360°$, ал $90° \cdot 4 = 360°$. Оған сәйкес келетін дұрыс көпжақ – бұрыннан білетін куб, оны дұрыс *гексаэдр* (алтыжақ) деп те атайды (80, *а*-сурет).

80-сурет

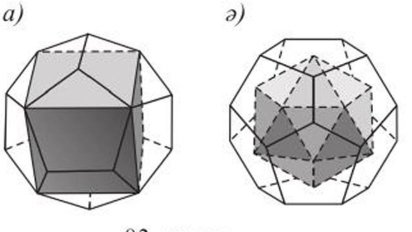
3) Дұрыс көпжақтың жақтары дұрыс бесбұрыштар болсын. Бір төбеде олардың тек 3-уі түйісуі мүмкін, өйткені $108° \cdot 3 < 360°$, ал $108° \cdot 4 > 360°$. Оған сәйкес келетін дұрыс көпжақ – дұрыс *додекаэдр* (12-жақ) (80, *ә*-сурет). Алты жақты, жеті жақты және одан да көп жақты дұрыс көпжақ болмайды, себебі $120° \cdot 3 = 360°$. Теорема дәлелденді.

Дұрыс көпжақтардың әрқайсысының барлық жақтарынан және төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан бір ғана нүктесі бар, оны дұрыс көпжақтың **центрі** деп атайды.

Осы аталған дұрыс көпжақтардың бес түрінің шын мәнінде бар болатынына көз жеткізу үшін, оларды салу керек. Куб пен дұрыс тетраэдрді салуды сендер білесіңдер. Егер 81, *а*-суретте көрсетілгендей кубтың жақтарының диагональдарын жүргізсек, онда дұрыс тетраэдрді салудың тағы бір тәсілін аламыз. Егер кубтың барлық жақтарының центрлерін салсақ, сонда шыққан алты нүкте дұрыс октаэдрдің төбелері болады (81, *ә*-сурет).



81-сурет



82-сурет

Егер кубтың әрбір қыры арқылы оның бетімен осы қырының нүктелерінен басқа ортақ нүктелері болмайтын жазықтық жүргізсек, онда қандай да бір 12-жақты аламыз. Осы жазықтықтарды кубтың жақтарына белгілі бір бұрышпен көлбеткенде, осы 12-жақтың жақтары дұрыс бесбұрышқа тең болады, яғни дұрыс додекаэдр шығады (82, *а*-сурет).

Дұрыс додекаэдрдің жақтарының центрлері дұрыс икосаэдрдің төбелері болады (82, *ә*-сурет).

Әрбір дұрыс көпжақтың қырларындағы барлық екіжақты бұрыштары тең болады. (Мұны өздігінен дәлелдеңдер.)

Келесі кестеде дұрыс көпжақтардың жақтарының (Ж), төбелерінің (Т) және қырларының (Қ) саны көрсетілген.

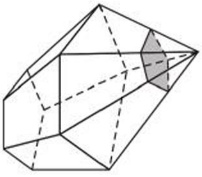
Дұрыс көпжақтың түрі	**Ж**	**Т**	**Қ**
Дұрыс тетраэдр	4	4	6
Дұрыс гексаэдр	6	8	12
Дұрыс октаэдр	8	6	12
Дұрыс додекаэдр	12	20	30
Дұрыс икосаэдр	20	12	30

Кез келген дұрыс көпжақ үшін кез келген дөңес көпжақ сияқты **Ж + Т – Қ = 2** теңдігі орындалатынын атап өтейік. Дөңес көпжақтардың бұл тамаша қасиетін оны ашқан көрнекті швейцар математигі Леонард Эйлердің (1707–1789) құрметіне *эйлерлік сипаттама* деп атайды.

Осы қасиетті математикалық индукция әдісімен дәлелдейік.

1) Тетраэдр үшін формула ақиқат (өздігінен тексеріңдер).

2) Ж + Т – Қ = 2 формуласы дұрыс *n* жағы бар дөңес көпжақ үшін ақиқат болады делік.



83-сурет

3) Осы формуланың (n + 1) жағы бар көпжақ үшін де ақиқат болатынын дәлелдейік. Ол үшін дөңес *n*-жақтың қайсыбір төбесіне жақын өтетін қимасын саламыз, ол қиюшы жазықтық осы төбеден шығатын әрбір қырмен қиылысады (83-сурет). Сонда көрсетілген төбені қамтымайтын қиылған көпжақтың жақтарының саны 1-ге артады. Көрсетілген төбеде *k* қыры түйісетін болсын, сонда жаңа көпжақтың төбелерінің саны (k – 1)-ге, ал қырларының саны *k*-ға артады. Сонда жаңа көпжақта (Ж + 1) + (Т + k – 1) – (Қ + k) = Ж + Т – Қ = 2 болады. Демек, көрсетілген формула кез келген дөңес көпжақ үшін ақиқат болады.

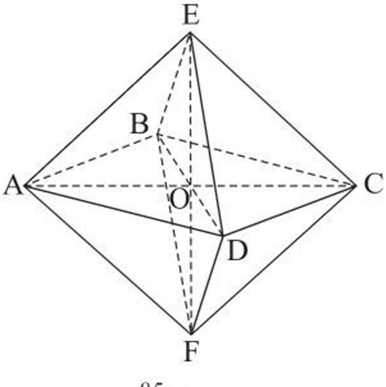
Дұрыс көпжақтардың модельдерін қоршаған ортадан да байқауға болады, олар сәулет өнері мен құрылыста қолданылады (84-сурет).

84-сурет

1 - е с е п. Қыры a-ға тең дұрыс октаэдрдің диагональдық қималарының ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Дұрыс $EABCDF$ октаэдрі берілген болсын (85-сурет). Октаэдрдің $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ диагональдық қималары шаршы болатынын дәлелдейік.

1) Теңбүйірлі AEF, BEF, CEF, DEF үшбұрыштарының AO, BO, CO, DO медианалары тең және олардың биіктіктері болады. Демек, AO, BO, CO, DO түзулері EF түзуіне перпендикуляр. O нүктесі арқылы EF түзуіне перпендикуляр бір ғана жазықтық жүргізуге болатындықтан, A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатады және $ABCD$ шаршы болады.



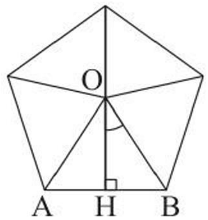
85-сурет

2) Дәл осылай BDA, BDE, BDC, BDF үшбұрыштарын қарастыра отырып, $AECF$ төртбұрышы шаршы болатынын анықтаймыз, ал ABC, AEC, ADC, AFC үшбұрыштарын қарастыру арқылы $BEDF$ төртбұрышы да шаршы екенін анықтаймыз.

3) Қарастырылған шаршылар тең, сондықтан берілген дұрыс октаэдрдің әрбір диагональдық қимасының ауданы a^2-қа тең.

Ж а у а б ы. a^2.

2 - е с е п. Қыры 3 см-ге тең дұрыс додекаэдрдің толық бетінің ауданын 1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.



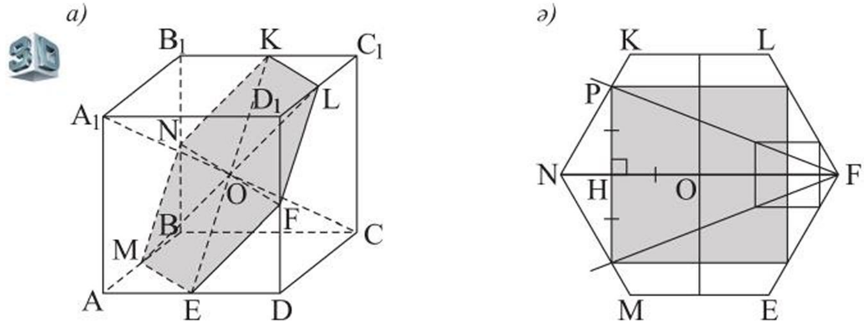
86-сурет

Ш е ш у і. Дұрыс додекаэдрдің тең дұрыс бесбұрыш болатын 12 жағы бар. Осындай бір бесбұрыштың ауданын табу үшін оның төбелерін бесбұрыштың O центрімен қосып, тең бес үшбұрышқа бөлеміз (86-сурет). Сонда $\angle AOB = 72°$, биіктігі $OH = \frac{3}{2 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}$, ал бесбұрыштың S_1 ауданы $S_1 = \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot \mathrm{tg}\, 36°}$ болады. Сонда ізделінді аудан $S = 12 \cdot S_1 = \frac{135}{\mathrm{tg}\, 36°} \approx \frac{135}{0{,}727} \approx 186$ (см^2).

Ж а у а б ы. ≈ 186 см^2.

3 - е с е п. Қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең куб берілген. Кубтың дұрыс алтыбұрыш болатын қимасын салу керек. Төбелері осы алтыбұрыштың қабырғаларында жататын, ал екі осі алтыбұрыштың екі осімен беттесетін шаршының қабырғасын табу керек.

Ш е ш у і. M, N, K, L, F, E төбелері $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының, сәйкесінше, AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1D, AD қырларының орталары болатын $MNKLFE$ – дұрыс алтыбұрыш. Оның әрбір қабырғасы 1 дм-ге тең (Пифагор теоремасы бойынша), ал $MNKLFE$ алтыбұрышының бұрыштарының теңдігі MON, NOK, KOL, LOF, FOE, EOM үшбұрыштарының теңдігінен шығады, мұндағы O нүктесі – кубтың центрі, ол алтыбұрыштың төбесінен бірдей қашықтықта, оның жазықтығында жатады (87, *а*-сурет). Ұқсастық әдісін пайдаланып, осы алтыбұрышқа 87, *ә*-суретте көрсетілгендей іштей шаршы саламыз.



87-сурет

Осы шаршының қабырғасын табамыз. ΔNPO-ның PH биіктігі HO кесіндісіне – шаршы қабырғасының жартысына тең. $PH = HO = x$ дм болсын,

сонда $NH = 1 - x$ және $NH = x \cdot \text{ctg } 60° = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Демек, $1 - x = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} =$
$= \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. Бұдан ізделінді ұзындық $(3 - \sqrt{3})$ дм болады.

Ж а у а б ы. $(3 - \sqrt{3})$ дм.

СҰРАҚТАР

1. Дұрыс көпжақ дегеніміз не?

2. Дұрыс көпжақтардың барлығы қанша түрі бар? Олар қалай аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

135. Барлық жақтары: а) тең; ә) дұрыс көпбұрыштар болатын көпжақ дұрыс көпжақ болады деген ақиқат па?

136. Екі тең дұрыс тетраэдрден құрастырылған көпжақты кескіндеңдер. Оның неліктен дұрыс көпжақ болмайтынын түсіндіріңдер.

137. Егер параллелепипедтің:
а) диагональдық қимасы шаршы болса;
ә) бір төбесінен шығатын үш жағының диагональдары тең болса, ол дұрыс гексаэдр бола ма?

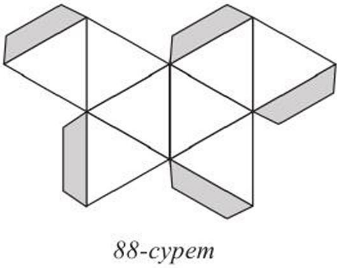
138. Дұрыс: а) тетраэдрдің; ә) гексаэдрдің; б) октаэдрдің; в) икосаэдрдің; г) додекаэдрдің әрбір төбесіндегі жазық бұрыштарының қосындысы неге тең?

139. Ұзындығы 1 м сымнан: а) қыры 1 дм-ге тең кубтың; ә) қыры 1,5 дм-ге тең дұрыс тетраэдрдің; б) қыры 0,5 дм-ге тең дұрыс октаэдрдің қорабының моделін жасауға бола ма?

140. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ағаш кубынан D_1AB_1C пирамидасын бөліп алған. Осы куб пен пирамиданың толық беттері аудандарының қатынасын табыңдар.

141. Дұрыс көпжақтың 8 жағы бар. Оның: а) бір төбесінен шығатын екі қырының арасындағы бұрышын; ә) қырындағы екіжақты бұрышының косинусын табыңдар.

142. Қыры 8 см-ге тең дұрыс октаэдрдің моделін жасаңдар. 88-суретте октаэдрдің желімдеуге арналған қақпақшалары бар жазбасы көрсетілген.



88-сурет

143. Қыры 6 см-ге тең дұрыс көпжақ берілген. Осы көпжақ: а) тетраэдр; ә) октаэдр болса, оның іргелес екі жағының центрлерінің арақашықтығын табыңдар.

144. Әрқайсысының қыры a-ға тең дұрыс тетраэдр мен октаэдрдің толық беттерінің аудандарының қатынасын табыңдар.

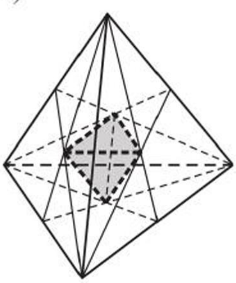
145. а) Табанының ауданы $\sqrt{3}$ дм^2-ге, ал апофемасы $\sqrt{3}$ дм-ге тең дұрыс үшбұрышты пирамида дұрыс тетраэдр бола ма?

ә) Табанының қабырғасы $\sqrt{1{,}5}$ дм-ге тең дұрыс үшбұрышты пирамида берілген. Осы пирамида дұрыс тетраэдр болуы үшін оның биіктігінің ұзындығы қандай болу керек?

146. Биіктігі $\sqrt{6}$ м-ге тең дұрыс тетраэдрдің толық бетінің ауданы қандай?

147. а) Дұрыс додекаэдрдің толық бетінің ауданы $\frac{135}{\operatorname{tg} 36^\circ}$ см^2. Оның қырының ұзындығын табыңдар.

а)

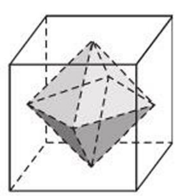


ә) Толық бетінің ауданы $80\sqrt{3}$ см^2-ге тең дұрыс икосаэдрдің қырының ұзындығын табыңдар.

148. $PABC$ дұрыс тетраэдрінің AP мен BC қырларының арақашықтығы 1 м-ге тең. Оның толық бетінің ауданын табыңдар.

149. Дұрыс тетраэдрдің жақтарының центрлері – жаңа тетраэдрдің төбелері (89, a-сурет). Осы тетраэдрлердің толық беттерінің аудандарының қатынасын табыңдар.

ә)



89-сурет

150. 89, *ә*-суретте қыры 4 дм-ге тең кубтың ішіне төбелері осы кубтың жақтарының центрлері болатын көпжақ кескінделген. Көпжақтың толық бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

151. Дұрыс тетраэдрдің бүйір бетінің жазбасы трапеция болуы мүмкін екенін дәлелдеңдер.

152. Кубтың диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетін және олардың біреуіне перпендикуляр болатын жазықтықпен қимасын салыңдар. Кубтың қыры a-ға тең болса, шыққан қиманың ауданын табыңдар.

153. Қыры a-ға тең дұрыс $PABC$ тетраэдрі берілген. Оның айқас түзулерде жататын екі қырына параллель жазықтықпен қимасы – $MNKL$ шаршысы. $PMNKL$ пирамидасының толық бетінің ауданын табыңдар.

154. Қыры 8 см-ге тең $PABCDF$ дұрыс октаэдрінен P және F төбелері болатын, бүйір қырлары 4 см-ге тең екі өзара тең дұрыс пирамида кесіп алынды. Шыққан көпжақтың толық бетінің ауданын табыңдар.

155. Ғаламтордан дұрыс додекаэдр мен икосаэдрдің жазбаларын тауып, олардың модельдерін жасаңдар.

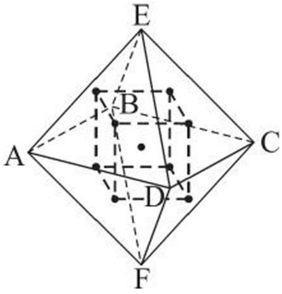
С деңгейі

156. Барлық жақтары тең дұрыс көпбұрыш болатын дөңес емес көпжақ бола ма? Егер болса, оның моделін жасаңдар.

157. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында B төбесі мен AD және CC_1 қырларының ортасындағы M және N нүктелері арқылы жазықтық жүргізілген. Осы жазықтықтың ABC жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

158. Дұрыс октаэдрдің жақтарының центрлері кубтың төбелері болатынын дәлелдеңдер (90-сурет). Дұрыс октаэдрдің қыры b-ға тең болса, кубтың толық бетінің ауданын табыңдар.

159. Дұрыс $EABCDF$ октаэдрінің BCE мен ADF жақтарының центрлерін қосатын кесінді осы жақтардың жазықтықтарына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер және олардың арақашықтығын табыңдар.



90-сурет

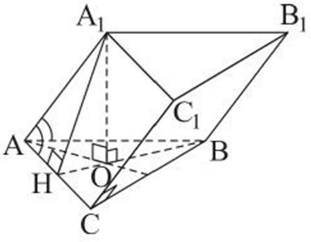
7. «Көпжақтар» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

160. Егер $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының: а) AB_1C_1 жазықтығымен қимасының ауданы $98\sqrt{2}$ см^2-ге; ә) диагональдық қимасының ауданы 1 м^2-ге тең болса, кубтың толық бетінің ауданын табыңдар.

161. а) Дұрыс үшбұрышты призманың бүйір жағының диагоналі мен басқа бүйір жағының арасындағы бұрыш 30°-қа тең. Призманың биіктігі 2 дм-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

ә) Дұрыс төртбұрышты призманың 8 см-ге тең диагоналі табан жазықтығына 75° бұрышпен көлбеген. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.



91-сурет

162. Үшбұрышты көлбеу призманың қырларының арақашықтығы a, b, c-ға, ал бүйір қыры n-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

163. Үшбұрышты көлбеу призманың әрбір қыры 2 дм-ге тең, ал бүйір қырларының бірі іргелес табан қабырғаларымен 60°-қа тең бұрыштар жасайды (91-сурет). Призманың толық бетінің ауданын табыңдар.

164. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың табан қабырғасы a-ға тең, диагональдық қимасы табанымен тең шамалы. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

165. а) Пирамиданың табаны – тікбұрышты үшбұрыш, оның катеттері 6 см және 8 см. Пирамиданың барлық бүйір жақтары оның табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

ә) Үшбұрышты пирамиданың табанындағы қабырғалары 13 см, 14 см және 15 см-ге тең, ал барлық бүйір жақтары табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

166. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 12 см және 8 см, ал төменгі табан қабырғасындағы екіжақты бұрышы 60°-қа тең. Пирамиданың екі апофемасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар. Барлық мүмкін болатын жағдайларды қарастырыңдар.

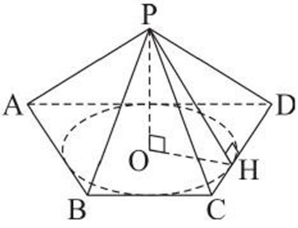
167. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың табандарының биіктіктері $18\sqrt{3}$ см-ге және $12\sqrt{3}$ см-ге тең, ал бүйір қыры табан жазықтығына $60°$ бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

168. Дұрыс үшбұрышты призманың табанының ауданы $4\sqrt{6}$ дм^2-ге тең. Призманың бір табанының қабырғасы мен екінші табанының оған параллель орта сызығы арқылы қима жүргізілген. Егер қима жазықтығы мен табанының көрсетілген қабырғасын қамтитын бүйір жағының арасындағы бұрыш $30°$-қа тең болса, призма табанының ауданын табыңдар.

169. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ көлбеу призмасының табаны – ромб, оның қабырғасы a-ға, сүйір бұрышы φ-ге тең. A_1 төбесі A, B және D нүктелерінің әрқайсысынан a-ға тең қашықтықта жатыр. BB_1D_1D төртбұрышының ауданын табыңдар.

170. Пирамиданың биіктігі 8 дм-ге тең, табанындағы теңбүйірлі трапецияның параллель қабырғалары 16 дм және 8 дм. Пирамиданың табан қабырғаларындағы барлық екіжақты бұрыштары тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар (92-сурет).



92-сурет

171. Үшбұрышты пирамида төбесінің ортогональ проекциясы – оның табанына іштей сызылған шеңбердің центрі. Пирамиданың табанына параллель жазықтықпен қимасы одан табандарының аудандарының қатынасы 4 : 49 болатын қиық пирамида бөлген. Қиық пирамиданың төменгі табан қабырғалары мен биіктігі, сәйкесінше, 25 см, 39 см, 56 см және 12 см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

172. Үшбұрышты $DABC$ пирамидасының D төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік. D төбесінің ΔABC-ға түскен ортогональ проекциясы оның биіктіктерінің қиылысу нүктесі болатынын дәлелдеңдер.

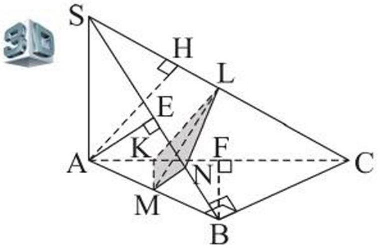
173. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамида берілген. Егер: а) оның табандарының диагональдары d және l-ге ($d > l$), ал табан қырындағы екіжақты бұрышы $60°$-қа; ә) пирамиданың биіктігі h-қа, диагональдық қимасының ауданы Q-ге, ал табан қабырғасындағы екіжақты сүйір бұрышы β-ға тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

С деңгейі

174. Диагоналі d-ға тең, табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің бүйір бетінің ең үлкен ауданы қандай болуы мүмкін?

175. Табаны тіктөртбұрыш болатын пирамида берілген. Оның әр бүйір қыры 9 см-ге тең және табанының іргелес қабырғаларымен 60°-ты және α бұрышын құрайды. Пирамиданың биіктігін және α-ның мүмкін болатын мәндер жиынын табыңдар.

176. Дұрыс онбұрышты пирамиданың бүйір қыры 16-ға, ал іргелес бүйір қырларының арасындағы бұрыш φ-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын және φ-дің мүмкін болатын мәндер жиынын табыңдар.



93-сурет

177. Үшбұрышты $SABC$ пирамидасының табаны – гипотенузасы AC болатын тікбұрышты ΔABC, ал оның SA бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. Пирамиданың AB қырының ортасындағы M нүктесі арқылы өтетін қимасы SC қырына перпендикуляр, $AB = BC = SA = m$ (93-сурет). Осы қиманың ауданын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

178. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер: а) призманың табандары тең; ә) призманың жақтары тең; б) призманың барлық бүйір жақтары – параллелограмдар; в) призманың барлық жақтары – параллелограмдар; г) барлық бүйір қырлары өзара параллель.

1) а, б, г;
2) барлығы;
3) в-дан басқасының барлығы;
4) а, в;
5) ә-ден басқасының барлығы.

179. Ақиқат тұжырымды көрсетіңдер. Тура: а) бес; ә) алты; б) жеті; в) тоғыз; г) он қыры бар пирамида болмайды.

1) а;
2) б;
3) а, б, в;
4) а, б;
5) а-дан басқасының барлығы.

180. Келесі сөйлемдердің қайсысы көпжақтың беті ұғымының анықтамасы болуы мүмкін? Көпжақтың беті деп: а) оның шекарасы; ә) оның барлық жақтарының аудандарының қосындысы; б) оның жақтарына тиісті барлық нүктелер жиыны; в) оның бетіне тиісті барлық нүктелер жиыны; г) оның ішкі нүктелері болмайтын барлық нүктелер жиыны аталады.

1) г-дан басқасының барлығы;
2) в мен г-дан басқасының барлығы;
3) а, б;
4) ә;
5) в.

181. Берілген денелердің қайсысы дұрыс көпжақ болады? а) Куб; ә) дұрыс призма; б) дұрыс пирамида; в) барлық қырлары тең тетраэдр; г) барлық жақтары тең n-бұрыштар болатын көпжақ.

1) а, ә, б;
2) барлығы;
3) ә-ден басқасының барлығы;
4) а, в;
5) а, г.

182. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 14 см-ге, ал табан қабырғасы 16 см-ге тең. Сонда пирамиданың бүйір қыры неге тең?

1) 15 см;
2) 18 см;
3) 20 см;
4) $\sqrt{330}$ см;
5) $\sqrt{300}$ см.

183. Дұрыс үшбұрышты призманың табан қабырғасы 5 см-ге, ал бүйір қыры 6 см-ге тең. Сонда призманың толық бетінің ауданы неге тең?

1) $(90 + 12{,}5\sqrt{3})$ см^2;
2) $(80 + 18\sqrt{3})$ см^2;
3) 110 см^2;
4) 105 см^2;
5) 120 см^2.

184. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табан қабырғасы мен биіктігі a-ға тең. Сонда пирамиданың толық бетінің ауданы неге тең?

1) $\frac{3a^2\sqrt{10}}{2}$;
2) $1{,}5a^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$;
3) $3a^2\left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $\frac{3a^2\sqrt{5}}{2}$;
5) $3a^2\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

185. Дұрыс октаэдрдің екі іргелес жағының арасындағы әрбір бұрыштың косинусы неге тең?

1) $\frac{1}{3}$;
2) $-0{,}5$;
3) $0{,}5$;
4) $-\frac{1}{3}$;
5) $0{,}(6)$.

186. Тік параллелепипедтің диагональдарының қиылысу нүктесі табан жазықтығынан 3 см, ал бүйір жақтарынан 2 см және 4 см қашықтықта орналасқан. Табанының периметрі 30 см-ге тең. Параллелепипедтің толық бетінің ауданы неге тең?

1) 260 см^2;
2) 240 см^2;
3) 220 см^2;
4) 208 см^2;
5) 176 см^2.

187. $ABCA_1B_1C_1$ көлбеу призмасының табаны – қабырғасы $\sqrt{3}$ см-ге тең теңқабырғалы ΔABC. A_1 төбесінің ортогональ проекциясы – табанындағы медианаларының қиылысу нүктесі, ал AA_1 қыры табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Призманың бүйір бетінің ауданы неге тең?

1) $3\sqrt{3}$ см^2;
2) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ см^2;
3) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ см^2;
4) $(\sqrt{6}+\sqrt{15})$ см^2;
5) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ см^2.

Жаттығуларды орындаңдар

188. а) Бесбұрышты призманың; ә) алтыбұрышты пирамиданың неше жағы, қыры, төбесі бар? Осындай көпжақтарды кескіндеңдер.

189. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік призмасының табаны – BAD бұрышы 60°-қа тең ромб. Призманың биіктігі 8 см-ге, ал B_1 төбесінен AC түзуіне дейінгі қашықтық 10 см-ге тең. Призманың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

190. Дұрыс алтыбұрышты қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 10 м және 9 м-ге, ал биіктігі 0,5 м-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

191. Көлбеу параллелепипедтің төрт жағы – қабырғалары 8 см-ге тең шаршылар, ал оның бүйір қыры табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Параллелепипедтің толық бетінің ауданын табыңдар.

192. $PABCD$ дұрыс пирамидасының P төбесіндегі жазық бұрыштарының әрқайсысы 60°-қа тең. а) APC бұрышын; ә) $AB = 4$ см болса, пирамиданың апофемасын табыңдар.

193. Пирамиданың табанына параллель қима оның биіктігін төбесінен бастап есептегенде 2 : 3 қатынасына бөледі. Пирамиданың табанының ауданынан 84 см^2-ге кем қимасының ауданын табыңдар.

194. Пирамиданың табаны – қабырғасы 8 см-ге тең шаршы. Оның іргелес екі бүйір жағы табан жазықтығына перпендикуляр, қалған жақтарының әрқайсысы оған 30° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың диагональдық қималарының аудандарын табыңдар.

195. $DABC$ пирамидасының табаны – қабырғалары $AC = 13$ м, $AB = 15$ м, $BC = 14$ м болатын үшбұрыш. Пирамиданың 9 м-ге тең DA бүйір қыры табан жазықтығына перпендикуляр. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

196. Пирамиданың табаны – диагональдары 6 м және 8 м-ге тең ромб. Пирамиданың 1 м-ге тең биіктігінің табаны – ромб диагональдарының қиылысу нүктесі. Пирамиданың толық бетінің ауданын табыңдар.

197. Әрқайсысының қыры a-ға тең кубтың, дұрыс октаэдрдің және дұрыс икосаэдрдің толық беттерінің аудандарын салыстырыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Көпжақтардың түрлері мен қасиеттерін ғалымдар көп ғасырлар бойы зерттеген. Көпжақтардың модельдерін сәулет өнерінде, әсіресе пирамидалар түріндегі құрылыстарды салуда пайдаланған. Мысалы, Қарағанды облысында Мысыр пирамидаларынан 1000 жыл бұрын салынған пирамида табылды.

Қалпына келтірілген Сарыарқа пирамидасы, Қарағанды облысы

Дұрыс көпжақтар теориясымен ежелгі грек математиктері айналысқан, ол туралы ілімдер Евклидтің «Негіздерінің» 13-кітабында айтылған және ол геометрия «шыңы» болып саналған. Дұрыс көпжақтар «мінсіз фигуралар» деп аталған.

Платон

Л. Эйлер

Ежелгі Грекияда болмыстың негізі деп төрт «табиғат күші» саналған: жер, су, ауа және от. Пифагорлықтар оларға, сәйкесінше, дұрыс тетраэдрдің, октаэдрдің, гексаэдрдің және икосаэдрдің пішінін берген. Ежелгі грек философы Платон (б. д. д. 429–348 жж.) бүкіл әлемге тұтастай дұрыс додекаэдрдің пішінін берген болатын.

Л. Эйлер дөңес көпжақтар мен олардың жартылай дұрыс көпжақтар деп аталатын түрлері туралы тұтас ілім әзірлеген. Осындай көпжақтардың бір түрі – Минск қаласындағы Беларусь Ұлттық кітапханасы.

Беларусь Ұлттық кітапханасы, Минск қ.

Ғаламторды пайдаланып:

а) ежелгі грек математиктері көпжақты қалай атағанын және ол сөздің тура мағынасы нені білдіргенін;

ә) 94-суретте кескінделген дөңес емес дұрыс көпжақтар туралы мәліметтерді;

б) Эйлердің жартылай дұрыс көпжақтар мен олардың түрлері туралы ақпаратты табыңдар.

а) *ә)* *б)* *в)*

94-сурет

II. ТҮЗУ МЕН ЖАЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын;
- нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың формуласын;
- кеңістіктегі түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын;
- кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрышты табу формуласын;
- түзу мен жазықтықтың арасындағы, екі жазықтықтың арасындағы бұрыштарды табу формулаларын **білу керек.**

- нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты таба алу;
- түзулердің теңдеулерін пайдаланып, екі түзудің арасындағы бұрышты таба алу;
- кеңістіктегі түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын есептер шығаруда қолдана алу;
- түзу мен жазықтықтың арасындағы, екі жазықтықтың арасындағы бұрышты таба алу;
- нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың, түзулердің арасындағы, түзу мен жазықтықтың арасындағы, жазықтықтардың арасындағы бұрыштардың формулаларын қолданып, стереометриялық есептерді шығара **алу керек.**

8. Нүктеден жазықтыққа дейінгі арақашықтық

Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі түзу мен жазықтықтың өзара орналасуын білетін боласыңдар;

• нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың формуласын білесіңдер;

• осы формуланы қорытып шығарасыңдар және оны есептер шығаруда қолданасыңдар.

Тікбұрышты координаталар жүйесі мен кеңістіктегі векторларды пайдалану алгебраны әртүрлі кеңістіктік фигураларды зерттеу үшін қолдануға мүмкіндік береді. Нүктелердің және векторлардың координаталарын геометриялық фигураларға қолдану арқылы кейбір алгебралық модельдерді: теңдіктерді, теңдеулерді, теңсіздіктер мен олардың жүйелерін салыстыруға болады. Екінші жағынан, үш (немесе екі) айнымалысы бар теңдеулер координаталар жүйесінде қайсыбір геометриялық фигураны береді.

10-сыныпта кеңістіктегі жазықтық пен түзудің теңдеулері қарастырылған болатын. Соларды еске салайық. $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нүктесінен өтіп, $\vec{n}\,(a;\ b;\ c)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуі:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Жазықтықтың жалпы теңдеуі: $ax + by + cz + d = 0$.

Берілген екі $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ және $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нүктелерінен өтетін түзудің теңдеуі: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Түзудің жалпы теңдеуі: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d = 0. \end{cases}$

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нүктесінен өтетін және $\vec{p}\,(m;\ n;\ k)$ бағыттаушы векторы арқылы берілген түзудің канондық теңдеуі: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{k}$.

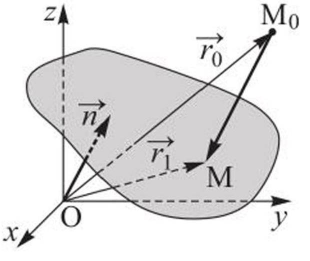
Түзудің параметрлік теңдеуі: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$

Осы теңдеулерді пайдаланып, нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты және түзулердің, түзу мен жазықтықтың, жазықтықтардың арасындағы бұрыштарды табу формулаларын алуға болады.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың формуласын қорытып шығарайық.

Т е о р е м а. **$M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен берілген жазықтыққа дейінгі l қашықтығы $l = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ формуласымен табылады.**

Д ә л е л д е у і. Берілген жазықтыққа M_0M перпендикулярын жүргізейік (95-сурет) және $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}(x_0; y_0; z_0)$ деп белгілейік. $M(x_1; y_1; z_1)$ нүктесі берілген жазықтыққа тиісті болғандықтан, $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ теңдігі ақиқат болады. Оны былай жазуға болады: $\vec{n} \cdot \vec{r_1} + d = 0$, мұндағы $\vec{n}(a; b; c)$ – берілген жазықтыққа перпендикуляр вектор.



95-сурет

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$ және $\vec{n}$ векторлары коллинеар, сондықтан $\vec{r_1} - \vec{r_0} = k \cdot \vec{n}$, мұндағы $k \in R$. Бұдан $\vec{r_1} = \vec{r_0} + k \cdot \vec{n}$. Сонда $\vec{n} \cdot (\vec{r_0} + k \cdot \vec{n}) + d = 0$ болады, бұдан $k = \dfrac{-\vec{n} \cdot \vec{r_0} - d}{\vec{n}^2}$. Сонымен, $l = |\overrightarrow{M_0M}| = |k| \cdot |\vec{n}| = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{r_0} + d}{|\vec{n}|} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

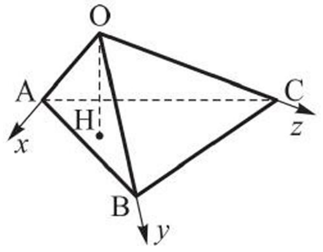
Осы формуладан *координаталар басынан жазықтыққа дейінгі арақашықтық* $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ болатыны шығады.

1 - е с е п. $B(-12; 0; 17)$ нүктесінен $A(3; -2; -4)$ нүктесі арқылы өтетін және $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ жазықтығына параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.

Ш е ш у і. Берілген жазықтыққа параллель жазықтық $4x - 5y + 2z + d = 0$ теңдеуімен беріледі. Бұл жазықтық $A(3; -2; -4)$ нүктесінен өтетіндіктен, $4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + d = 0$ болады, бұдан $d = -14$. Сонда $4x - 5y + 2z - 14 = 0$ теңдеуін аламыз. Ізделінді қашықтық $l = \dfrac{|4 \cdot (-12) - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 17 - 14|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \dfrac{28}{\sqrt{45}} = \dfrac{28\sqrt{5}}{15}$ болады.

Ж а у а б ы. $\dfrac{28\sqrt{5}}{15}$.

2 - е с е п. Төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік болатын тетраэдр берілген, оның бүйір қырлары 1 дм, 2 дм және 3 дм. Тетраэдрдің төбесінен оның табан жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек.

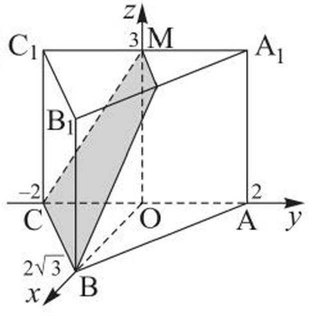


96-сурет

Ш е ш у і. *OABC* тетраэдрі берілген болсын. Оның *O* төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік болғандықтан, оны координаталар жүйесіне салып, қарастырайық (96-сурет). $OA = 1$ дм, $OB = 2$ дм, $OC = 3$ дм болсын. Сонда $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ болады. *OH* қашықтығын табайық. Ол үшін жазықтықтың $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуіне *A*, *B*, *C* нүктелерінің координаталарын қойып, мынаны аламыз: $\begin{cases} a + d = 0, \\ 2b + d = 0, \\ 3c + d = 0. \end{cases}$ Мысалы, $d = -6$ болсын, сонда $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$ болады. *ABC* жазықтығының теңдеуін жазайық: $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Сонда $OH = \dfrac{6}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \dfrac{6}{7}$ (дм) болады.

Ж а у а б ы. $\dfrac{6}{7}$ дм.

3 - е с е п. Дұрыс үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының табан қабырғасы 4 см-ге, биіктігі 3 см-ге тең. Призманың *BCM* жазықтығымен қимасы салынған, мұндағы M – A_1C_1-дің ортасы. A_1 төбесінен қима жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек.



97-сурет

Ш е ш у і. Берілген призманың *BCM* жазықтығымен қимасы – теңбүйірлі *BCMN* трапециясы. Қима жазықтығына дейінгі A_1H қашықтығын табу үшін призманы 97-суретте көрсетілгендей координаталар жүйесіне саламыз, мұндағы *O* нүктесі – *AC*-ның ортасы. Сонда $B(2\sqrt{3}; 0; 0)$, $C(0; -2; 0)$, $M(0; 0; 3)$ және $A_1(0; 2; 3)$ болады.

$\sqrt{3}x - 3y + 2z - 6 = 0$ *BCM* жазықтығының теңдеуі болатынын анықтаймыз.

Сонда ізделінді қашықтық $A_1H = \dfrac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{3 + 9 + 4}} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$ (см).

Ж а у а б ы. 1,5 см.

СҰРАҚТАР

1. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықтың формуласын жазып, оны қорытып шығарыңдар.

2. Координаталар басынан жазықтыққа дейінгі қашықтықты қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

198. Координаталар басынан:

а) $M(4; -2; -6)$ нүктесінен өтіп, аппликата осіне перпендикуляр болатын; ә) $N(-7; 4; 5)$ нүктесінен өтіп, абсцисса осіне перпендикуляр болатын жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

199. а) $A(-2; 3; -4)$ нүктесінен $2x + 2y - z = 0$ және $2x + 2y - z + 3 = 0$ жазықтықтарына дейінгі; ә) $B(1; -5; 0)$ нүктесінен $4x - 4y + 2z = 0$ және $4x - 4y - 4\sqrt{2} \cdot z + 16 = 0$ жазықтықтарына дейінгі қашықтықты табыңдар.

200. $3x - y + 2z - 1 = 0$ жазықтығына тиісті $A(2; 1; m)$ нүктесінен $12x - 3y + 4z + 13 = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

201. $M(1; m; n)$ нүктесі $\begin{cases} x + y - z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$ теңдеуімен берілген түзуге тиісті. Осы нүктеден $x + y + z + 1 = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

202. а) Төбелері $A(2; 1; 0)$, $B(1; 3; 0)$, $C(4; 4; 0)$ нүктелерінде болатын үшбұрыш берілген. $M(2020; 2021; 2030)$ нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) Тетраэдрдің төбелерінің координаталары: $A(3; 0; 1)$, $B(–1; 4; 1)$, $C(5; 2; 1)$, $D(0; –5; 6)$. D төбесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

203. Координаталар басынан $A(-5; 4; -3)$ нүктесі арқылы өтетін және: а) $\vec{n} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$; ә) $\vec{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ векторына перпендикуляр жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

204. $M(2; -1; -2)$ нүктесі арқылы $\vec{n} = -4\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k}$ векторына перпендикуляр жазықтық өтеді. $B(2; 4; 5)$ нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

205. Қыры 6-ға тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. M, N және K нүктелері, сәйкесінше, оның A_1B_1, A_1D_1 және A_1A қырларының орталары. Кубтың төбелерінен MNK жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

206. Қыры 12-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. Оның BB_1, BC және BA қырларына, сәйкесінше, M, N және K нүктелері белгіленген және ол нүктелер осы қырларды B төбесінен бастап есептегенде $3 : 1$ қатынасына бөледі. D_1 нүктесінен MNK жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

207. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің қырлары $AB = 3$, $BC = 4$, $BB_1 = 12$. D_1 нүктесінен A_1C_1D жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

208. Дұрыс төртбұрышты $PABCD$ пирамидасының биіктігі 4-ке, ал табан қабырғасы $2\sqrt{2}$-ге тең. A нүктесінен PCD жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

209. $PABC$ тетраэдрі берілген, оның P төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік, $PA = 9$ см, $PB = 12$ см және $PC = 16$ см. P төбесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

В деңгейі

Бейбітшілік және Келісім сарайы, Нұр-Сұлтан қ.

210. Нұр-Сұлтан қаласындағы Бейбітшілік және Келісім сарайы дұрыс төртбұрышты пирамида пішінді, оның биіктігі мен табан қабырғасы 62 м-ден. Осы пирамиданың төбесінен оның табанының диагоналі мен бүйір қырының ортасы арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

211. $A(5; 0; 5)$, $B(5; 5; 0)$, $C(5; 5; 5)$ нүктелері төбелері болатын ΔABC берілген. Координаталар басының O нүктесінен ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты тауып, оны O нүктесінен осы үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центріне дейінгі қашықтықпен салыстырыңдар.

212. $x + y + z - 1 = 0$ жазықтығына параллель болатын және одан $\sqrt{3}$-ке тең қашықтықта жатқан жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

213. $M\left(2\sqrt{14};\ 0;\ 2\sqrt{14}\right)$ нүктесінен: а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ теңдеулерімен берілген жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

214. Координаталар басынан: а) $B(0; 2; 3)$, $C(-1; 3; 1)$, $D(2; 1; 1)$; ә) $K(1; 2; 3)$, $L(0; 7; 1)$, $P(1; 5; 0)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

C деңгейі

215. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының A_1D_1, C_1D_1 және DD_1 қырларының сәйкесінше орталары болатын M, N және K нүктелері арқылы қима жүргізілген. D_1 нүктесінен қима жазықтығына дейінгі қашықтық 3-ке тең. Кубтың басқа төбелерінен MNK жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

216. $PABC$ тетраэдрі берілген, оның әр бүйір қыры 2-ге тең және P төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік. P төбесінен оның AC, AB және CP қырларының орталары арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

217. Координаталар басынан $A(t;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ t)$, $C(t;\ t;\ t)$ нүктелері төбелері болатын ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центріне дейінгі қашықтық $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$-ге тең. Координаталар басынан ABC жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

9. Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш

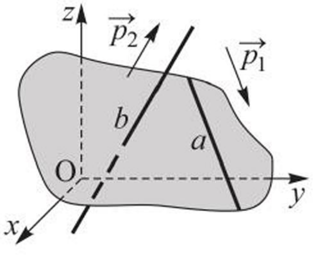
Тақырыпты оқу барысында:

• кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрышты табу формулаларын білесіңдер;

• кеңістіктегі түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын білетін боласыңдар;

• түзулердің теңдеулерін пайдаланып, екі түзудің арасындағы бұрышты табасыңдар;

• көрсетілген формулалар мен шарттарды есептер шығаруда қолданасыңдар.



98-сурет

Егер a және b түзулері $\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=$ $=\frac{z-c_1}{k_1}$ және $\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{k_2}$ теңдеулерімен берілген болса, онда олардың бағыттаушы векторлары, сәйкесінше, $\overrightarrow{p_1}(m_1;\ n_1;\ k_1)$ және $\overrightarrow{p_2}(m_2;\ n_2;\ k_2)$ болады. Егер $\beta \le 90°$ болса, онда осы түзулердің арасындағы φ бұрышы олардың бағыттаушы векторларының арасындағы β бұрышына тең, ал егер $\beta > 90°$ болса, онда $\varphi = 180° - \beta$ болады (98-сурет).

Осы екі жағдайда да: $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\varphi} = \dfrac{|\overrightarrow{\boldsymbol{p_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{p_2}}|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{p_1}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{p_2}}|} = \dfrac{|\boldsymbol{m_1} \cdot \boldsymbol{m_2} + \boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2} + \boldsymbol{k_1} \cdot \boldsymbol{k_2}|}{\sqrt{\boldsymbol{m_1^2} + \boldsymbol{n_1^2} + \boldsymbol{k_1^2}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{m_2^2} + \boldsymbol{n_2^2} + \boldsymbol{k_2^2}}}.$

Егер $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{k_1}{k_2}$ болса, көрсетілген теңдеулермен берілген түзулер *параллель*, ал егер $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + k_1 \cdot k_2 = 0$ болса, онда *перпендикуляр* болады.

1 - е с е п. $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}$ және $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=1-z$ теңдеулерімен берілген түзулердің арасындағы бұрышты табу керек.

Ш е ш у і. Бұл түзулердің бағыттаушы векторлары, сәйкесінше, $\overrightarrow{p_1}(5;\ 4;\ 3)$ және $\overrightarrow{p_2}(3;\ 2;\ -1)$. Ізделінді бұрыштың косинусын табайық:

$$\cos\varphi = \frac{15+8-3}{\sqrt{25+16+9} \cdot \sqrt{9+4+1}} = \frac{20}{5\sqrt{28}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Ж а у а б ы. $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

2 - е с е п. $A(2;\ 4;\ 0)$, $B(-4;\ 0;\ 0)$ және $C(0;\ 2;\ 4)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш берілген. Оның CM және BN медианалары жататын түзулердің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Нүктелердің координаталары $M(-1;\ 2;\ 0)$ және $N(1;\ 3;\ 2)$. Ізделінді бұрыш φ болсын, сонда $\cos\varphi = \left|\cos\angle(\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{BN})\right|$. Векторлардың координаталары: $\overrightarrow{CM}\ (-1;\ 0;\ -4)$, $\overrightarrow{BN}\ (5;\ 3;\ 2)$. Сонда $\cos\varphi = \left|\dfrac{-5+0-8}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{38}}\right| =$

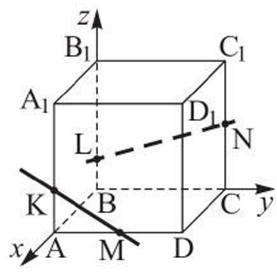
$= \dfrac{13}{\sqrt{646}} = \dfrac{13\sqrt{646}}{646} \approx 0{,}511$, $\varphi \approx 59°$.

Ж а у а б ы. $\approx 59°$.

3 - е с е п. Қыры 12-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AD мен CC_1 қырларының орталары, сәйкесінше, M және N нүктелері. K нүктесі AA_1 қырын $AK : KA_1 = 1 : 2$ қатынасына, ал L нүктесі BB_1 қырын $BL : LB_1 = 1 : 3$ қатынасына бөледі. MK мен NL түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

Ш е ш у і. Кубты 99-суретте көрсетілгендей етіп координаталар жүйесіне орналастырайық. Нүктелердің координаталарын табайық: $M(12;\ 6;\ 0)$, $K(12;\ 0;\ 4)$, $N(0;\ 12;\ 6)$, $L(0;\ 0;\ 3)$. Сонда $\overrightarrow{MK}\ (0;\ -6;\ 4)$, $\overrightarrow{NL}\ (0;\ -12;\ -3)$, $\cos\angle(MK;\ NL) = \dfrac{|0\cdot 0+6\cdot 12-4\cdot 3|}{\sqrt{36+16}\cdot\sqrt{144+9}} =$

$= \dfrac{60}{2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{17}} = \dfrac{10\sqrt{221}}{221} \approx 0{,}673$, $\angle(MK;\ NL) \approx 48°$.



99-сурет

Ж а у а б ы. $\approx 48°$.

СҰРАҚТАР

1. Екі түзудің арасындағы бұрышты қандай формуламен табуға болады?

2. Кеңістіктегі екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттарын жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

218. а) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-2}{3}$ және $\dfrac{x+2}{15} = \dfrac{y-1}{12} = \dfrac{z-2}{9}$ түзулері параллель болатынын;

ә) $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{3}$ және $\frac{x+2}{2}=\frac{4(y-1)}{-19}=\frac{z-2}{3}$ түзулері перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

219. Мына теңдеулермен берілген түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар:

а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{1}$ және $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{4}$;

ә) $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+1}{12}=\frac{z+2}{-4}$ және $\frac{x+7}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{6}$.

220. а) $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{2\sqrt{2}}=\frac{z}{-2\sqrt{2}}$ түзуі мен абсцисса осінің арасындағы;

ә) $\frac{x}{2\sqrt{2}}=\frac{y+1}{4\sqrt{3}}=\frac{z}{2\sqrt{2}}$ түзуі мен ордината осінің арасындағы бұрышты табыңдар.

221. а) $\vec{a}\,(0; -1; 2)$, $\vec{b}\,(2; 1; 2)$ векторлары берілген. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ және $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ векторларын қамтитын түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар.

ә) $\vec{p}\,(1; -2; 3)$, $\vec{q}\,(0; 4; -5)$ векторлары берілген. $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ және $\vec{b}=-2\vec{p}-3\vec{q}$ векторлары жататын түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар.

222. а) $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш берілген. Осы үшбұрыштың орта сызықтарын қамтитын түзулердің арасындағы бұрыштарды табыңдар.

ә) $A(3; -2; 1)$, $B(3; 0; 2)$ және $C(1; 2; 5)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш берілген. 1) AB және BC; 2) AC және BM түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар, мұндағы M – AC-ның ортасы.

223. $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ және $C(1; -2; 1)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш берілген. Осы үшбұрыштың AC қабырғасы мен AL биссектрисасы жататын түзулердің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

224. $A(1; 2; 2)$, $B(1; 4; -1)$ және $C(-1; 2; 5)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыштың ең үлкен бұрышын табыңдар.

225. $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ және $C(1; 2; 0)$ нүктелері – $ABCD$ параллелограмының тізбектес төбелері. AC мен BD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

226. $PABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ шаршысы, оның қабырғасы 4-ке тең. Пирамиданың 6-ға тең PB қыры – оның биіктігі. AP мен BD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

227. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген, онда $AB = 7$, $BC = 8$, $BB_1 = 10$, M және N нүктелері, сәйкесінше, AD және CC_1 қырларының орталары. а) AB және MN; ә) CB_1 және MN түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

228. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің төбелерінің координаталары: $B(1; 2; 3)$, $A(9; 6; 4)$, $C(5; 2; 6)$, $B_1(3; 0; 4)$. BB_1 мен CD түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

B деңгейі

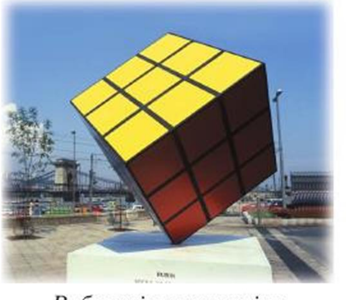
229. а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases}$ мен $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0; \end{cases}$

ә) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ мен $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ -x + 2y - z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ мен $\begin{cases} -x + y + 2z + 3 = 0, \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$ теңдеулерімен берілген түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар.

230. Түзулердің перпендикулярлық белгісін пайдаланып, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының AC_1 диагоналі A_1BD жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

231. Рубиктің текшесі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ деп белгіленген және координаталар жүйесіне орналастырылған деп елестетіңдер. Онда K және M нүктелері, сәйкесінше, AA_1 және AD қырларының орталары, N нүктесі CC_1D_1D жағының центрі болсын. а) B_1M және KN; ә) MN және B_1D түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.



Рубиктің текшесіне қойылған ескерткіш, Будапешт қ., Венгрия

232. $PABCD$ дұрыс пирамидасының табан қабырғасының ұзындығы 12-ге тең. Пирамиданың биіктігі 18-ге тең, K нүктесі PC қырын $PK : KC = 2 : 1$ қатынасында бөледі. а) AK және BD; ә) BK және AD түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

233. $PABCD$ пирамидасының $ABCD$ табаны – ромб, оның диагональдары $AC = 16$, $BD = 9$, O – диагональдарының қиылысу нүктесі, PO – пирамиданың биіктігі, $PO = 12$. AD мен PC түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

234. $ABCA_1B_1C_1$ тік призмасының бүйір қыры 12-ге тең, оның табаны – катеттері $AC = 5$, $BC = 12$ болатын тікбұрышты үшбұрыш. AB мен CB_1 түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

С деңгейі

235. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, O – оның диагональдарының қиылысу нүктесі, $M \in DC$ және $CM : MD = 1 : 4$. OM мен AM түзулерінің арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

236. $PABC$ пирамидасы берілген, оның табанының төбелері $A(5;\ 1;\ -1)$, $B(5;\ -2;\ 2)$ және $C(2;\ -2;\ 1)$, ал P төбесі Oz осіне тиісті және $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{CB}$. PC мен AB түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

237. Дұрыс төртбұрышты $PABCD$ пирамидасының әрбір қырының ұзындығы a-ға тең, K нүктесі PC қырын $PK : KC = 1 : 2$ қатынасында бөледі. а) AK және DC; ә) BK және AD түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

238. Дұрыс $DABC$ тетраэдрінде K нүктесі – AD қырының ортасы, M және N нүктелері, сәйкесінше, ABC мен BCD жақтарының центрлері. а) MN және AB; ә) MK және AC түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

10. Түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың арасындағы бұрыш

Тақырыпты оқу барысында:

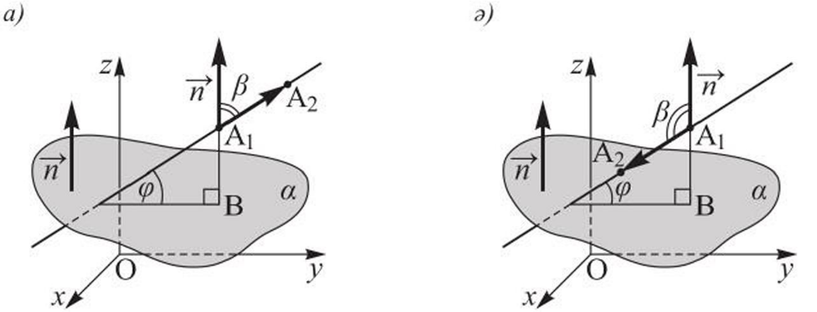
• түзу мен жазықтықтың, екі жазықтықтың арасындағы бұрышты табу формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

$A_1(x_1; y_1; z_1)$ және $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінен өтетін түзу мен $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен берілген α жазықтығының арасындағы бұрышты табу формуласын қорытып шығарайық. α жазықтығына перпендикуляр $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ және $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ векторларын қарастырайық (100-сурет). $\angle(A_1A_2;\ \alpha) = \varphi$ деп, ал $\angle(\vec{n};\ \overrightarrow{A_1A_2}) = \beta$ деп белгілейік. Сонда: $\cos\beta = \dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1A_2}|}$.

$0° \le \beta \le 90°$ болса, $\varphi = 90° - \beta$ болады (100, *а*-сурет); $90° < \beta \le 180°$ болса, $\varphi = \beta - 90°$ болады (100, *ә*-сурет). Екі жағдайда да $\mathbf{\sin\varphi = |\cos\beta|}$, сонда:

$$\mathbf{\sin\varphi} = \frac{|\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}}|}{|\vec{\boldsymbol{n}}|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{A_1A_2}}|} \text{ немесе } \sin\varphi = \frac{|a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

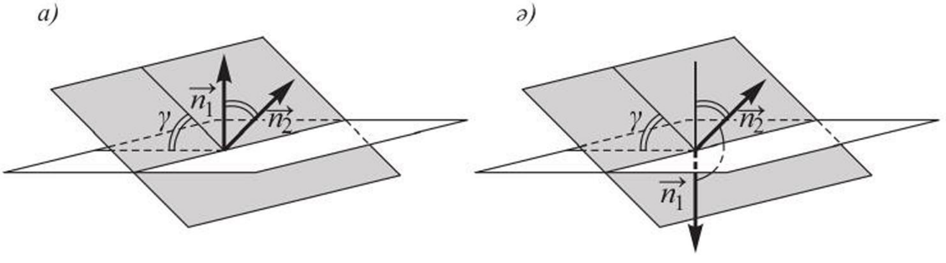


100-сурет

Егер $\sin\varphi = 1$ болса, онда $\angle(A_1A_2;\ \alpha) = 90°$; егер $\sin\varphi = 0$ болса, онда $\angle(A_1A_2;\ \alpha) = 0°$ болатынын атап өтелік.

Қиылысатын жазықтықтардың арасындағы бұрыштың шамасына сол жазықтықтардан құралған екіжақты бұрыштың 90°-тан артық емес градустық өлшемі алынатынын еске салайық. Жазықтықтар $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$

және $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$ теңдеулерімен берілген болсын. Егер $\angle(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2})$ 90°-тан артық болмаса, онда олардың арасындағы γ бұрышы оларға перпендикуляр $\overrightarrow{n_1}(a_1; b_1; c_1)$ және $\overrightarrow{n_2}(a_2; b_2; c_2)$ векторларының арасындағы бұрышқа тең болады (101, *а*-сурет), егер $\angle(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2})$ доғал бұрыш болса, онда $\gamma = 180° - \angle(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2})$ (101, *ә*-сурет). Екі жағдайда да $\mathbf{\cos\gamma = |\cos\angle(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2})|}$.



101-сурет

Демек, $\cos\gamma = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ немесе $\cos\gamma = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Егер жазықтықтарға перпендикуляр $\overrightarrow{n_1}(a_1; b_1; c_1)$ және $\overrightarrow{n_2}(a_2; b_2; c_2)$ векторлары коллинеар болса, онда жазықтықтар параллель болады. Параллель жазықтықтардың арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынады. Егер $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0$ болса, онда жазықтықтардың арасындағы бұрыш тік болады.

1 - е с е п. а) $A_1(1; 2; -3)$ және $A_2(-2; 0; 3)$ нүктелерінен өтетін түзу мен $x + y + z = 0$ жазықтығының арасындағы бұрышты; ә) $3y - z - 2 = 0$ және $-2y - z + 5 = 0$ жазықтықтарының арасындағы бұрышты табу керек.

Ш е ш у і. а) Ізделінді бұрыш φ-ге тең болсын, сонда $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_2}|}$.

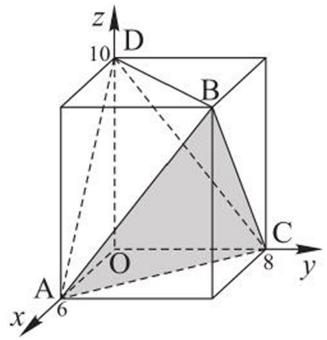
$\vec{n}$ және $\overrightarrow{A_1A_2}$ векторларының координаталарын жазайық: $\vec{n}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{A_1A_2}(-3; -2; 6)$. Сонда $\sin\varphi = \dfrac{|-3-2+6|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{49}} = \dfrac{1}{\sqrt{3} \cdot 7} = \dfrac{\sqrt{3}}{21}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{21}$ болады.

ә) Ізделінді бұрыш γ-ға тең болсын. Берілген жазықтықтарға перпендикуляр векторлар: $\overrightarrow{n_1}(0; 3; -1)$ және $\overrightarrow{n_2}(0; -2; -1)$. Сонда $\cos\gamma = \dfrac{|0-6+1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma = 45°$.

Ж а у а б ы. а) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{21}$; ә) 45°.

2 - е с е п. Барлық жақтары тең $DABC$ тетраэдрі берілген, оның төбелерінің координаталары: $D(0;\ 0;\ 10)$, $A(6;\ 0;\ 0)$, $B(6;\ 8;\ 10)$. Оның AD қыры мен ABC жазықтығының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Тетраэдрдің берілген төбелерінің координаталарын ескере отырып, координаталар жүйесіне өлшемдері 6, 8, 10 болатын тікбұрышты параллелепипед саламыз (102-сурет). Сонда параллелепипедтің жақтарының диагональдары $DABC$ тетраэдрінің қырлары болады және $C(0;\ 8;\ 0)$, $\overrightarrow{AD}(-6;\ 0;\ 10)$. ABC жазықтығының теңдеуі $20x + 15y - 12z - 120 = 0$ болады (бұған өздігінен көз жеткізіңдер).

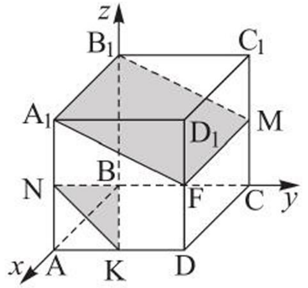


102-сурет

Ізделінді бұрыш φ-ге тең болсын, сонда $\sin\varphi = \dfrac{|20\cdot(-6)+15\cdot 0-12\cdot 10|}{\sqrt{400+225+144}\cdot\sqrt{136}} = \dfrac{120}{\sqrt{769}\cdot\sqrt{34}} \approx$ $\approx 0{,}742$, $\varphi \approx 48°$.

Ж а у а б ы. $\approx 48°$.

3 - е с е п. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген, оның M, N, K нүктелері, сәйкесінше, CC_1, AA_1, AD қырларының орталары. BNK және A_1B_1M жазықтықтарының арасындағы бұрышты табу керек.



103-сурет

Ш е ш у і. Кубтың қыры 1-ге, ал ізделінді бұрыш γ-ға тең болсын. Координаталар жүйесін енгізейік, B төбесі – координаталар басы, ал Ox, Oy және Oz осьтері, сәйкесінше, кубтың BA, BC, BB_1 қырларын қамтитын болсын (103-сурет). Мына нүктелердің координаталарын жазайық: $B(0;\ 0;\ 0)$, $N\left(1;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;\ \frac{1}{2};\ 0\right)$, $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $M\left(0;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$. Сонда BNK және A_1B_1M жазықтықтарының теңдеулері $x - 2y - 2z = 0$ және $y + 2z - 2 = 0$ болады (бұған өздігінен көз жеткізіңдер). Осы жазықтықтарға перпендикуляр векторларды жазайық: $\vec{n_1}(1;\ -2;\ -2)$, $\vec{n_2}(0;\ 1;\ 2)$. Сонда $\cos\gamma = \dfrac{|0-2-4|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}} =$ $= \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\gamma = \arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ж а у а б ы. $\arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

СҰРАҚТАР

1. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрышты қандай формуламен табуға болады?

2. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышты қалай табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

239. $\vec{a}\,(6;\ 2;\ -3)$ векторының: а) $3x - 2y + 6z - 1 = 0$; ә) $-3x - 4y + 7 = 0$ жазықтығымен жасайтын бұрышын табыңдар.

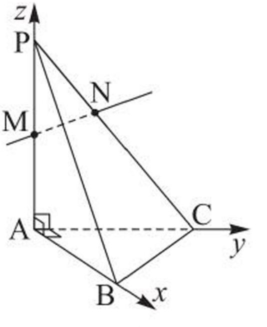
240. $\vec{c}\,(-3;\ 0;\ 4)$ векторы жататын түзудің: а) $4x + 6y + 3z = 0$; ә) $3x - 4z + 2 = 0$ жазықтығымен жасайтын бұрышын табыңдар.

241. а) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+4}{4}$ түзуі $-4x - 6y + 8z - 1 = 0$ жазықтығына параллель болатынын; ә) егер $A(1;\ -2;\ 4)$, $B(-7;\ 11;\ 8)$ болса, AB түзуі $-8x + 13y + 4z - 1 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болатынын дәлелдеңдер.

242. $A(3;\ 8;\ 1)$ және $B(-3;\ 5;\ 3)$ нүктелері арқылы өтетін түзу мен: а) xOy; ә) yOz жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

243. $A(-2;\ 4;\ -3)$ және $B(0;\ 3;\ -5)$ нүктелері арқылы өтетін түзу мен: а) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{8} + \dfrac{z}{6} + 1 = 0$; ә) $\dfrac{3x}{14} + \dfrac{3y}{7} - \dfrac{3z}{7} + 1 = 0$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

244. а) $-4x + 2y + 4z - 5 = 0$ және $2x - 2y + 3 = 0$;
ә) $-x + 2y - 2z + 3 = 0$ және $6x + 3y - 6z - 2 = 0$;
б) $2x + 5y - z = 0$ және $x - y - 3z + 4 = 0$;
в) $x + y + z + 2 = 0$ және $4x - 4y + 2z - 3 = 0$ жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.



104-сурет

245. $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 1)$, $C(3;\ 2;\ 1)$ және $D(5;\ 4;\ 0)$ болса, ABC мен ABD жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

246. $PABC$ тетраэдрі берілген оның A төбесіндегі жазық бұрыштары тік, $AB = AC = 5$ см, $AP = 10$ см. M нүктесі – AP қырының ортасы, N нүктесі PC қырын $PN : NC = 2 : 3$ қатынасында бөледі (104-сурет). MN түзуі мен: а) ABC; ә) PBC жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

247. $PABC$ тетраэдрі берілген, онда $\angle APB = \angle APC = 45°$, ал A төбесіндегі жазық бұрыштары тік. а) AB түзуі мен BCP жазықтығының; ә) ABC мен BCP жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

248. Дұрыс төртбұрышты $PABCD$ пирамидасы берілген, оның биіктігі мен табанының диагональдары 8 см-ден. M нүктесі – PH биіктігінің ортасы. а) DM түзуі мен CDP жазықтығының; ә) APD мен ACD жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

В деңгейі

249. Координаталар басынан және $M(1; 2; 3)$ нүктесінен өтетін түзу мен $\vec{p}\,(3; 1; -1)$ векторына параллель, координаталар басын және $C(0; 2; -1)$ нүктесін қамтитын жазықтықтың арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

250. $M(-2; 0; -1)$ және $N(10; 3; 3)$ нүктелерінен өтетін түзу мен Oz осіне параллель болатын және $A(1; -2; 0)$, $B(3; 1; 0)$ нүктелерін қамтитын жазықтықтың арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.

251. Дұрыс төртбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призмасының бүйір қыры табан қабырғасынан екі есе ұзын. BD_1 түзуі мен B_1C_1D жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

252. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. $ABCD$ және DD_1C_1C жақтарының центрлері арқылы өтетін түзу мен AB, BB_1 және CC_1 қырларының орталары арқылы өтетін жазықтықтың арасындағы бұрышты табыңдар.

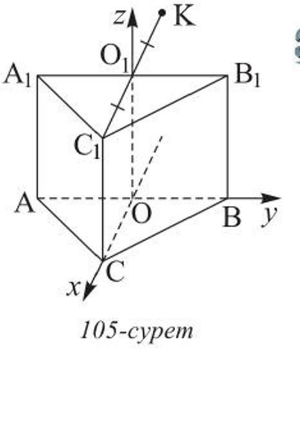
С деңгейі

253. $M(1; -1; 2)$ нүктесінен өтетін және:

а) $\begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0, \\ 2x + y + 3z + 4 = 0; \end{cases}$ ә) $\begin{cases} x + y + z - 5 = 0, \\ -x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$ түзуіне перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін құрыңдар.

254. $\vec{a}\,(1 - t; 4 + t; t)$ векторының ұзындығы ең кіші. Осы векторды қамтитын түзу мен $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

255. Әрбір қыры 2-ге тең үшбұрышты тік $ABCA_1B_1C_1$ призмасы берілген. O мен O_1 нүктелері, сәйкесінше, AB мен A_1B_1 қырларының орталары, K нүктесі C_1O_1 сәулесіне тиісті, әрі $O_1K = C_1O_1$ (105-сурет). а) OK түзуі мен ABC жазықтығының; ә) ABC мен KBC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты 1°-қа дейінгі дәлдікпен табыңдар.



105-сурет

11. «Түзу мен жазықтық теңдеулерінің қолданылуы» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

256. $A(-1; 3; 0)$, $B(0; 2; -5)$ және $C(4; -6; -1)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш берілген. Оның A төбесі арқылы өтетін және AM медианасына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

257. $\begin{cases} 3x + y - z - 2 = 0, \\ 7x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ түзуі $x + y - 2z - 1 = 0$ жазықтығында жата ма екенін зерттеңдер.

258. Түзу $\dfrac{x+5}{5} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{3}$ теңдеуімен берілген. Осы түзудің қайсыбір екі нүктесінен $2x + 2y - z = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

259. t-ның қандай мәндерінде $\vec{a}\,(0; 1; t)$ және $\vec{b}\,(-1; 0; t)$ векторларын қамтитын түзулердің арасындағы бұрыш: а) $90°$; ә) $60°$-қа тең болады?

260. Түзулер $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ және $\dfrac{x-1}{t^2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$ теңдеулерімен берілген. t-ның қандай мәндерінде осы түзулер перпендикуляр болады?

261. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары қос-қостан перпендикуляр, ал олардың ұзындықтары, сәйкесінше, 3, 2, 6-ға тең, $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ және $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$. а) $\vec{d}$ мен $\vec{p}$ векторлары жататын түзулердің; ә) $\vec{d}$ векторын қамтитын түзу мен $x + 2y + 2z - 1 = 0$ жазықтығының; б) $\vec{d}$ және $\vec{p}$ векторларымен берілген жазықтық пен $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3} = 1$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

262. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AB = AD = 2$, $DD_1 = 4$. а) A нүктесінен C_1NK жазықтығына дейінгі қашықтықты, мұндағы N – BC-ның, K – DC-ның ортасы; ә) AM түзуі мен BB_1D жазықтығының арасындағы бұрышты, мұндағы M – BB_1C_1C жағының центрі; б) BB_1D мен ABC_1 жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

В деңгейі

263. Oyz координаталар жазықтығынан 9-ға тең қашықтықтағы барлық нүктелер жиынынан тұратын фигураның теңдеуін жазыңдар.

264. $PABC$ дұрыс тетраэдрінің екі төбесі Ox осінде, ал үшіншісі $(0; 6; 0)$ нүктесінде жатыр. Оның PH биіктігін табыңдар.

265. $M(0; 0; 18)$ нүктесінен Oxy жазықтығына MK мен MN көлбеулері жүргізілген. Олардың осы жазықтықтағы ортогональ проекцияларының ұзындықтары, сәйкесінше, 40-қа және 30-ға тең, ал $KN = 50$. M нүктесінің Oxy жазықтығындағы ортогональ проекциясынан MNK жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

266. Төбелері координаталар басы және $5x - 2y - 4z - 20 = 0$ жазықтығының координаталар осьтерімен қиылысу нүктелері болатын тетраэдрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

267. $A(3; 4; 5)$, $B(3; 5; 4)$, $C(4; 3; 5)$, $D(4; 5; 3)$, $M(5; 3; 4)$, $N(5; 4; 3)$ нүктелері тиісті болатын жазықтық бар бола ма? Егер бар болса, онда координаталар басынан сол жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

268. $20{,}2x + 20{,}25y + 20{,}3z + 20500 = 0$ жазықтығы берілген. Координаталар басынан осы жазықтыққа дейінгі метрмен өрнектелген қашықтық Ақбет тауының биіктігінен кем, бірақ Айыртау тауының биіктігінен артық болатынын дәлелдеңдер.

Ақбет тауы,
Павлодар облысы

Айыртау тауы,
Солтүстік Қазақстан облысы

269. $\vec{a}\,(1; 0; -1)$ векторын қамтитын түзу: а) $y + kz - 3 = 0$; ә) $-x + ky + z - 4 = 0$ жазықтығымен 30°-қа тең бұрыш жасайтындай k-ның мәнін табыңдар.

С деңгейі

270. $B(-1; 2; 3)$ және $C(-2; 3; 4)$ нүктелері берілген. $MB^2 - MC^2 = 16$ теңдігі ақиқат болатындай барлық $M(x; y; z)$ нүктелер жиыны қандай фигура құрайды? Осы фигураның теңдеуін жазыңдар.

271. $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ векторлары берілген. AC мен CB түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.

272. $\vec{a}$ мен $\vec{i}$ векторларының арасындағы бұрыш 120°-қа, ал $\vec{a}$ мен $\vec{k}$ векторларының арасындағы бұрыш 135°-қа тең. $\vec{a}$ мен $\vec{j}$ векторлары жататын түзулердің арасындағы бұрышты табыңдар.

273. $PABC$ тетраэдрі берілген. Оның төбесінің координаталары – $C(0; 4; 0)$ және AB қырының ортасы $M(2; 3; –2)$ берілген. Егер H нүктесі CM түзуіне тиісті, ал P төбесінің координаталары: а) (1; 2; –1); ә) (1; 2; 3) болса, тетраэдрдің PH биіктігін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

274. $M(0; 0; 2)$ нүктесінен $x - y + z + 1 = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) $\sqrt{2}$;
2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
3) $\sqrt{3}$;
4) $\frac{3}{\sqrt{2}}$;
5) $\frac{3}{2}$.

275. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ және $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ векторларын қамтитын түзулердің арасындағы бұрыш неге тең?

1) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;
2) $\arccos\frac{1}{3}$;
3) 45°;
4) 60°;
5) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

276. $A(–4; –4; 4)$, $B(–3; 2; 2)$, $C(2; 5; 1)$, $D(3; –2; 2)$ нүктелері берілген. Сонда AC мен BD түзулерінің арасындағы бұрыш неге тең?

1) 0°;
2) $\arccos\frac{2}{3\sqrt{182}}$;
3) 90°;
4) $\arccos\frac{1}{21\sqrt{17}}$;
5) 45°.

277. $A(2; 3; –4)$, $B(1; –4; 1)$ нүктелері арқылы өтетін түзу мен $2x - y + z + 1 =$ $= 0$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусы неге тең?

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
2) 0;
3) $-\frac{2}{3\sqrt{2}}$;
4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$;
5) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

278. $\begin{cases} x-y-z=0, \\ 2x+y+z-2=0 \end{cases}$ түзуі мен $2x-y+2z+1=0$ жазықтығының арасындағы бұрыш неге тең?

1) $\arcsin\frac{\sqrt{8}}{3}$;
2) $\arcsin\frac{1}{3\sqrt{3}}$;
3) $0°$;
4) $\arcsin\frac{5}{3\sqrt{6}}$;
5) $45°$.

279. $3x-y+z-6=0$ және $x+y-3z-4=0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтардың арасындағы бұрыш неге тең?

1) $\arccos\frac{1}{11}$;
2) $90°$;
3) $\arccos\frac{7}{11}$;
4) $60°$;
5) $\arccos\left(-\frac{1}{11}\right)$.

280. $PABC$ тетраэдрі берілген, PA қыры – оның биіктігі, әрі $PA=6$, $\angle APC =$ $= \angle APB = 45°$, $\angle BPC = 60°$. M нүктесі – AP қырының ортасы, N нүктесі AC қырын A нүктесінен бастап есептегенде $1:2$, K нүктесі AB қырын A нүктесінен бастап есептегенде $2:1$ қатынасына бөледі. Сонда A нүктесінен MNK жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) $\frac{12}{\sqrt{61}}$;
2) $\frac{3}{2}$;
3) $\frac{12}{\sqrt{13}}$;
4) $\frac{1}{\sqrt{29}}$;
5) $\frac{4}{3}$.

Жаттығуларды орындаңдар

281. $A_1(1;\ 0;\ 4)$ және $A_2(-2;\ 3;\ 0)$ нүктелері берілген. A_1A_2 кесіндісіне перпендикуляр және оның ортасы арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

282. $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-3;\ 3;\ 2)$ нүктелері берілген. MA мен MB түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар, мұндағы M – A мен B нүктелерінен бірдей қашықтықта жатқан абсцисса осінің нүктесі.

283. $A(1;\ -2;\ 3)$ мен $B(-3;\ 2;\ 5)$ нүктелерінен өтетін түзу мен $2x-2y-z+4=0$ жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

284. Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінің табаны – қабырғасы 1-ге тең шаршы, ал бүйір қыры 2-ге тең. а) A_1 нүктесінен AB_1M жазықтығына дейінгі қашықтықты, мұндағы M нүктесі – DD_1 қырының ортасы; ә) BD_1 түзуі мен A_1BD жазықтығының арасындағы бұрышты; б) AB_1D_1 және A_1C_1D жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Теоремаларды дәлелдеуге, стереометриялық есептерді шығаруға координаталарды қолдану француз математиктері Алекси Клод Клероның (1713–1765), Гаспар Монждың (1746–1818), Жозеф Луи Лагранждың (1736–1813) және швейцар математигі Леонард Эйлердің (1707–1783) ғылыми еңбектерінің арқасында XVIII ғасырда кең тарала бастады.

Г. Монж жазықтықтың берілген нүктеден өтіп, берілген түзуге перпендикуляр теңдеуін құру, берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтықты табу есептерін шешті. Ж. Лагранж алғашқылардың бірі болып тетраэдрдің қырының ұзындығы мен жақтарының аудандарын табуға координаталарды қолданды.

С. Лакруа

Кеңістіктегі аналитикалық геометрия француз ғалымы Сильвестр Франсуа Лакруаның (1765–1843) еңбегінде қазіргі түріне келетіндей баяндалған. «Аналитикалық геометрия» терминін де ол енгізген. «Аналитикалық геометрия бастамалары» деп аталатын бірінші кітап француз математигі Жан Гийом Гарньенің (1766–1840) 1808 жылы басылған оқулығы болатын.

III. АЙНАЛУ ДЕНЕЛЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

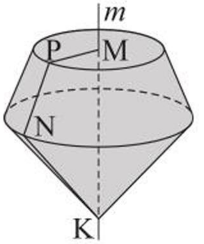
Бөлімді оқу нәтижесінде

- айналу денесі мен оның жазбасы ұғымдарын;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, сфераның, шардың және олардың элементтерінің анықтамаларын;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың жазықтықпен қимасы ұғымдарын;
- жазықтық пен сфераның өзара орналасуын;
- сфераға жанама жазықтықтың анықтамасын және қасиеттерін;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың беттері аудандарының формулаларын **білу керек.**

- цилиндрді, конусты, қиық конусты, сфераны, шарды және олардың элементтерін жазықтықта кескіндей алу;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың жазбаларын жасай білу;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың жазықтықпен қималарын кескіндей алу;
- айналу денелерінің (цилиндр, конус, қиық конус, шар) элементтерін табуға берілген есептерді шығара алу;
- шардың жанама жазықтығына және оның жазықтықпен қималарына байланысты есептерді шығара алу;
- цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың беттері аудандарының формулаларын қорытып шығару және есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

12. Цилиндр және оның элементтері. Цилиндрдің жазықтықпен қимасы

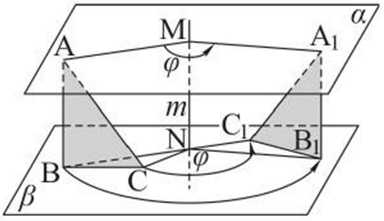
Тақырыпты оқу барысында:
- айналу денелері ұғымдарын білесіңдер;
- цилиндрдің, оның элементтерінің анықтамаларын білесіңдер;
- цилиндрді және оның қималарын кескіндей аласыңдар;
- цилиндрдің элементтерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.



106-сурет

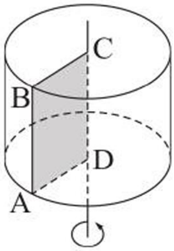
Жазық фигураны түзуден айналдырғанда пайда болған дене айналу денесі деп аталады. Мұндағы түзу *айналу осі* деп аталады. Мысалы, *MPNK* төртбұрышын *m* осінен айналдырғанда, 106-суретте кескінделген айналу денесі шығады.

Айналу денесі ұғымы кеңістіктегі фигуралардың бұру деп аталатын қозғалыс түрімен тікелей байланысты.



107-сурет

m түзуінен айналдыра φ бұрышына *бұру* деп кеңістіктегі *m* түзуіне перпендикуляр әрбір жазықтықты оның *m* түзуімен қиылысу нүктесінен айналдыра *φ* бұрышына бұру орындалатын қозғалысты атайды (107-сурет). Бұру оның сағат тілі бағытымен немесе сағат тіліне қарсы бағытта саналатын бұру бұрышымен беріледі. Мысалы, есіктің немесе дөңгелектің осьтен айнала бұрылуы осылай орындалады. Кеңістіктегі осьтік симметрия – симметрия осінен айналдыра 180°-қа бұру.

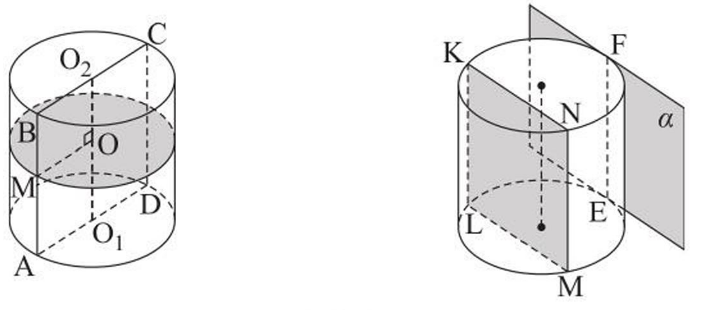


108-сурет

Цилиндр деп тіктөртбұрышты оның қабырғасынан айналдырғанда шығатын фигура аталады. Мысалы, 108-суретте *ABCD* тіктөртбұрышын оның *CD* қабырғасынан айналдырғанда шыққан цилиндрдің кескіні берілген. Бұл ретте оның *CB* мен *DA* қабырғалары параллель жазықтықтарда жататын тең дөңгелектер сызады. Осы дөңгелектер – цилиндрдің **табандары**. Айналу осін қамтитын түзу (немесе цилиндр табандарының центрлерін қосатын кесінді) **цилиндрдің осі** деп аталады. Цилиндрдің *CD* осіне параллель *AB* қабырғасы цилиндрдің **бүйір беті** деп аталатын бетті сызады.

Цилиндрдің табандары мен бүйір бетінен тұратын фигура **цилиндрдің толық беті** деп аталады. Цилиндрдің бір табанының кез келген нүктесінен екінші табанына жүргізілген перпендикуляр цилиндрдің **биіктігі** деп аталады. Осы биіктіктің ұзындығын да цилиндрдің биіктігі деп атайды. Цилиндрдің биіктігі оның табан жазықтықтарының арақашықтығына тең. *AB* кесіндісі және бүйір бетінің *CD* осіне параллель әрбір кесіндісі – цилиндрдің **жасаушылары**.

Цилиндрдің осіне перпендикуляр қимасы оның табанына тең дөңгелек болады (109, *а*-сурет). Бұл цилиндрдің *AB* жасаушысының кез келген *M* нүктесі оның осінен цилиндрдің табанының радиусына тең қашықтықта болатынынан шығады.

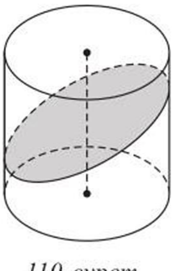


109-сурет

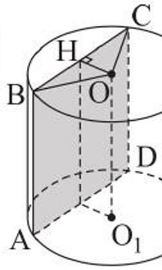
Цилиндрдің табанына перпендикуляр қимасы тіктөртбұрыш болады (мысалы, 109-суреттегі *ABCD* немесе *MNKL*). Мұны өздігінен негіздеңдер. Цилиндрдің табанына перпендикуляр және оның центрінен өтетін қима оның **осьтік қимасы** деп аталады (мысалы, 109, *а*-суреттегі *ABCD* тіктөртбұрышы). Осьтік қимасы шаршы болатын цилиндр **теңқабырғалы цилиндр** деп аталады.

Цилиндрдің жасаушысын қамтитын және цилиндрмен одан басқа ортақ нүктесі болмайтын жазықтық *цилиндрге жанама жазықтық* деп аталады (109, *ә*-суреттегі *α* жазықтығы).

Цилиндрдің бүйір бетінің оның табанына параллель емес жазықтықпен қимасы эллипс болады (110-сурет). Мысалы, цилиндр пішінді көлбеу стақандағы судың беті шекарасы эллипс болатын фигураны құрайды.



110-сурет



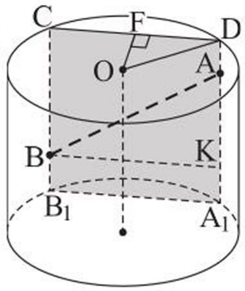
111-сурет

1 - е с е п. Цилиндрдің биіктігі 8 см-ге, ал табанының радиусы 5 см-ге тең. Оның осіне параллель шаршы болатын қимасы жүргізілген. Цилиндрдің осі мен осы қима жазықтығының арасындағы қашықтықты табу керек.

Ш е ш у і. $ABCD$ шаршысы – берілген қима, ал OO_1 түзуі цилиндрдің осі болсын (111-сурет). Сонда OBC үшбұрышының OH биіктігі ізделінді қашықтық болады, себебі ол OO_1 түзуі мен оған параллель $ABCD$ жазықтығының арақашықтығы. Есептің шарты бойынша $AB = BC = 8$ см, демек, $BH = HC = 4$ см, ал $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Ж а у а б ы. 3 см.

2 - е с е п. Цилиндрдің бүйір бетінің A және B нүктелерінен оның табан жазықтығының біріне жүргізілген AA_1 және BB_1 перпендикулярларының ұзындықтары, сәйкесінше, $6\frac{3}{4}$ дм-ге және $2\frac{1}{4}$ дм-ге тең. Цилиндр табанының радиусы 5 дм-ге, ал сол табанының O центрінен AA_1B жазықтығына дейінгі қашықтық 4 дм-ге тең (112-сурет). AB кесіндісінің ұзындығын табу керек.



112-сурет

Ш е ш у і. A мен B нүктелері арқылы цилиндрдің DA_1 мен CB_1 жасаушыларын жүргіземіз.

A_1B_1CD төртбұрышы – тіктөртбұрыш. O нүктесінен AA_1B жазықтығына дейінгі қашықтық OF кесіндісінің ұзындығына тең, мұндағы F – CD кесіндісінің ортасы. Тікбұрышты AA_1B_1B трапециясының BK биіктігін жүргіземіз, $BK \parallel B_1A_1$.

Тікбұрышты ΔABK-да $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2}$. $AK = 6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = 4{,}5$ (дм), $BK = B_1A_1 = 2FD = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$ (дм) болғандықтан, $AB = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = 7{,}5$ (дм).

Ж а у а б ы. 7,5 дм.

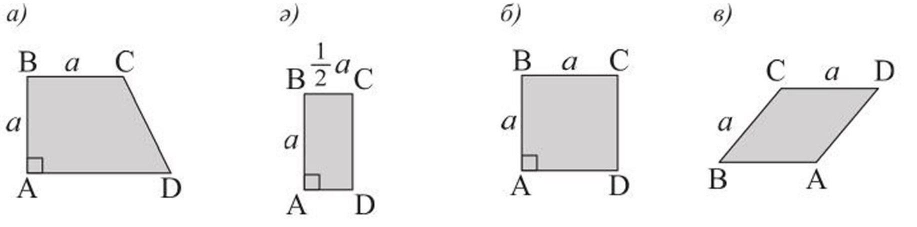
СҰРАҚТАР

1. Цилиндр дегеніміз не?
2. Цилиндрдің жасаушысы, табаны, биіктігі деп нені атайды?
3. Цилиндрдің бүйір беті және толық беті деп нені атайды?
4. Қай жағдайда цилиндрдің жазықтықпен қимасы: а) дөңгелек; ә) тіктөртбұрыш болады?
5. Цилиндрдің остік қимасы дегеніміз не?
6. Қандай цилиндрді теңқабырғалы цилиндр деп атайды?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

285. 113-суреттегі қай төртбұрышты AB қабырғасынан айналдырғанда теңқабырғалы цилиндр шығады?



113-сурет

286. Екі цилиндрдің осьтік қималары тең. Осы цилиндрлердің биіктіктері де тең болады деп ұйғаруға бола ма?

287. Егер цилиндр жазықтықпен дөңгелегенде тіктөртбұрыш болатын із қалдырса, оның осі қандай фигураны құрайды?

288. а) Егер ұштары цилиндрдің бүйір бетінде жататын кесінді оның осін қиып өтсе, онда ол осы оcьпен қақ бөлінеді; ә) егер тіктөртбұрыштың барлық төбелері цилиндрдің бүйір бетіне тиісті болса, онда оның қарама-қарсы қабырғаларының екеуі цилиндрдің осіне перпендикуляр болады деген ақиқат па?

289. а) Теңқабырғалы цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі $16\sqrt{2}$ см-ге тең. Цилиндр табанының радиусы неге тең?

ә) Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі оның жасаушысымен $30°$ бұрыш жасайды, ал табанының диаметрі $4\sqrt{3}$ см-ге тең. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

290. а) Цилиндрдің табанының радиусы 2,6 см-ге, ал жасаушысы 4,8 см-ге тең. Цилиндр осіне параллель қимасы – шаршы цилиндр осінен қандай қашықтықта орналасқан?

ә) Цилиндрдің осіне параллель және одан 8 см қашықтықта орналасқан жазықтықпен қимасы – ауданы 144 см^2-ге тең шаршы. Цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

291. а) Цилиндрдің биіктігі 20 см-ге, ал табанының радиусы 5 см-ге тең. Цилиндр осіне параллель және одан 1,4 см қашықтықта жатқан жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

ә) Цилиндрдің табанының радиусы 7 см. Цилиндрдің осіне параллель және одан 3 см қашықтықта жататын, ауданы 320 $см^2$-ге тең қима жазықтық жүргізілген. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

292. Шаршыны 15 см-ге тең қабырғасынан айналдырып, цилиндр алынған. Цилиндрдің осіне параллель жазықтықпен қимасының ауданы 270 $см^2$-ге тең. Цилиндр осінен қима жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

293. Цилиндрдің табанының радиусы 12 см-ге тең. Цилиндрдің осьтік қимасынан оған параллель және ауданы оның ауданынан екі есе кіші болатын қимасына дейінгі қашықтықты табыңдар.

294. Цилиндрдің екі жасаушысы арқылы оның табан шеңберінен 300°-қа тең доғаны қиятын жазықтық жүргізілген. Егер цилиндрдің биіктігі 1 м-ге, табанының радиусы 1 дм-ге тең болса, цилиндрдің осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

295. Цилиндрдің жасаушысы – оның аудандары 15 $дм^2$-ге және 8 $дм^2$-ге тең екі перпендикуляр қимасының ортақ қабырғасы. Егер цилиндрдің биіктігі 5 дм-ге тең болса, оның осьтік қимасының ауданын табыңдар.

296. Жазықтық цилиндрдің табандарын 12 см-ге және 16 см-ге тең хордалармен қиып өтеді. Хордалардың арақашықтықтары 18 см-ге тең. Цилиндрдің табанының радиусы 10 см-ге тең болса, оның биіктігін табыңдар.

297. Цилиндрдің осіне параллель және одан 4 дм қашықтықта өтетін қиманың диагоналі цилиндрдің табанының радиусынан 2 есе ұзын. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

B деңгейі

298. Цилиндрдің: а) симметрия центрі; ә) симметрия осі; б) симметрия жазықтығы бола ма?

299. Цилиндрдің жасаушысы арқылы екі қима жазықтық жүргізілген, олардың арасындағы бұрыш β-ға тең. Егер цилиндрдің осы жазықтықтармен қималарының бірі осьтік болса, олардың аудандарының қатынасын табыңдар.

300. Цилиндр 60°-қа тең екіжақты бұрыштың ішіне орналасқан, бұрыштың жақтарында оның бір-бірден жасаушылары жатыр. Цилиндрдің табанының центрінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтық 15 см-ге тең. Цилиндр табанының радиусын табыңдар.

301. Цилиндрдің осіне параллель жазықтық табан шеңберінен 120°-қа тең доғаны қияды және осьтен d қашықтықта өтеді. Алынған қиманың диагоналі $4d$-ға тең. Цилиндрдің биіктігі мен табанының радиусын табыңдар.

302. Цилиндрдің жасаушысы арқылы екі қима жазықтық жүргізілген. Алынған қималардың аудандары $10\sqrt{3}$ см^2 және $10\sqrt{2}$ см^2-ге тең. Цилиндрдің табанының радиусы 2 см-ге, ал биіктігі 5 см-ге тең болса, осы қима жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

303. Цилиндр жасаушыларының бірі арқылы өтетін екі қима жазықтықтың арасындағы екіжақты бұрыш 60°-қа тең. Осы қималардың аудандары 110 см^2 және 130 см^2-ге тең. Егер цилиндрдің биіктігі 10 см-ге тең болса, оның табанының радиусын табыңдар.

С деңгейі

304. Цилиндрдің жасаушысы – оның аудандары S_1 және S_2-ге тең екі перпендикуляр қимасының ортақ қабырғасы. Цилиндрдің осьтік қимасының ауданын табыңдар.

305. а) Табан радиусы 6 см-ге, ал биіктігі 5 см-ге тең цилиндрдің бетіндегі екі нүктенің ең үлкен қашықтығын табыңдар.

ә) Табанының радиусы r-ге, жасаушысы l-ге тең цилиндр берілген. Цилиндрдің табан жазықтығы мен оның табандары шеңберлерінің екі нүктесінен өтетін түзудің арасындағы ең кіші бұрышты табыңдар.

306. Қыры 4 дм-ге тең куб пен табан радиусы r-ге тең цилиндр берілген (r – айнымалы шама). Цилиндрдің осі кубтың қарама-қарсы екі жағының центрлері арқылы өтеді. r-дің әрбір мәні үшін цилиндрдің куб жақтарында жататын жасаушыларының санын көрсетіңдер.

307. Биіктігі 1,9 м-ге тең үйдің еденінде цилиндрлік бөшке тұр. Егер оның табанының диаметрі 1,2 м, ал биіктігі 1,6 м болса, бөшкені бүйіріне жатқызуға бола ма?

13. Цилиндр бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

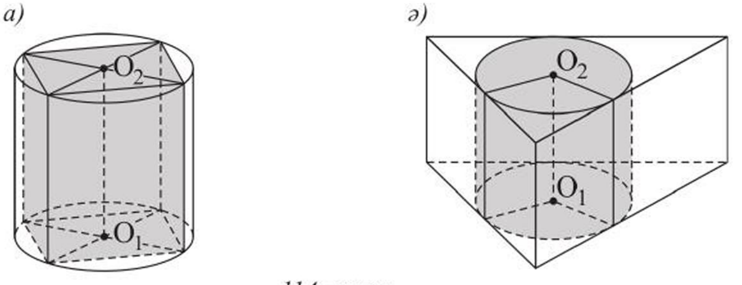
• цилиндрдің бүйір және толық беті, цилиндрдің жазбасы ұғымдарын білетін боласыңдар;

• цилиндрдің бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер призманың табандары цилиндрдің табандарына іштей сызылған болса, *призма цилиндрге іштей сызылған* (ал цилиндр призмаға сырттай сызылған) деп аталады. Табанын цилиндрдің табанына іштей сызуға болатын тік призманы ғана цилиндрге іштей сызуға болады. Мысалы, 114, *а*-суретте цилиндрге іштей сызылған тікбұрышты параллелепипед кескінделген.

Егер призманың табандары цилиндрдің табандарына сырттай сызылған болса, призма *цилиндрге сырттай сызылған* (ал цилиндр призмаға іштей сызылған) деп аталады. Табанын цилиндрдің табанына сырттай сызуға болатын тік призманы ғана цилиндрге сырттай сызуға болады. Мысалы, 114, *ә*-суретте үшбұрышты тік призма цилиндрге сырттай сызылған.

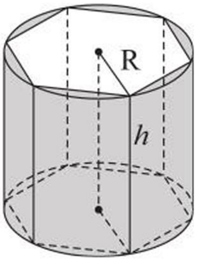


114-сурет

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданына оған іштей сызылған дұрыс призманың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде призманың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Теорема. **Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығы мен оның биіктігінің көбейтіндісіне тең: $S_{б.б.} = 2\pi Rh$**, мұндағы R – табанының радиусы, h – цилиндрдің биіктігі.

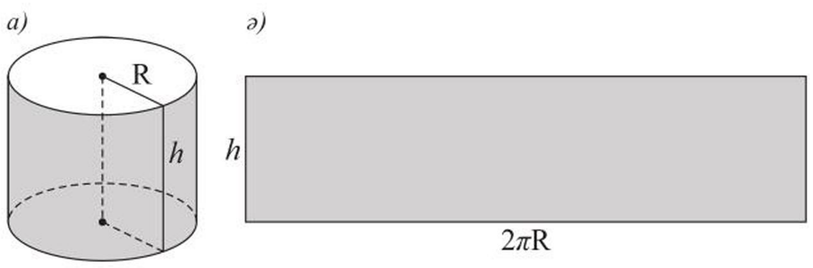
Дәлелдеуі. Цилиндрге іштей дұрыс n-бұрышты призма сызайық (115-сурет). Оның биіктігі цилиндрдің биіктігіне, ал осы призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең. Призманың табаны шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыш болғандықтан, оның табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде көпбұрыштың периметрі шеңбердің $2\pi R$ ұзындығына ұмтылады. Сонда призманың бүйір бетінің ауданы $2\pi Rh$-қа тең шамаға ұмтылады. Демек, цилиндрдің бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = 2\pi Rh$ болады.



115-сурет

Цилиндрдің толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің ауданы мен табандары аудандарының қосындысы аталады. **Цилиндрдің толық бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын табанының радиусы мен цилиндр биіктігінің қосындысына көбейткенге тең:**

$$\boldsymbol{S_{т.б.} = 2\pi R(R + h).}$$

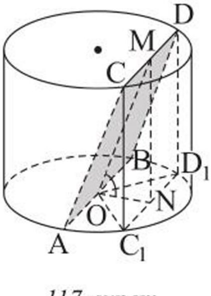


116-сурет

Егер цилиндрді оның бүйір бетінің (116, *а*-сурет) жасаушысы бойымен қиып, барлық жасаушылары бір жазықтықта жататындай етіп жазсақ, онда цилиндрдің бүйір бетінің *жазбасы* деп аталатын тіктөртбұрышты аламыз (116, *ә*-сурет).

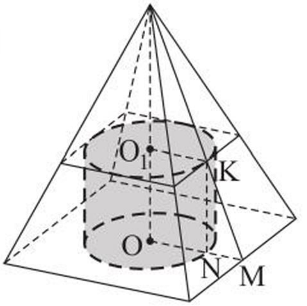
1 - е с е п. Цилиндрдің төменгі табанының центрі арқылы өтетін жазықтық оған 60° бұрышпен көлбеген. Осы жазықтық цилиндрдің жоғарғы табанын 90°-тық доғаны керетін, ұзындығы 10 см-ге тең хорда бойымен қияды. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Қима жазықтық цилиндрдің табандарын AB және CD хордалары бойымен қиятын болсын, сонда $AB \parallel CD$ (117-сурет). $C_1D_1 = CD$ хордасын салайық және N мен M нүктелері осы хордалардың орталары болсын. Сонда MN – цилиндрдің биіктігі, OD_1 – табанының радиусы, $\angle MOH = 60°$, $\angle C_1OD_1 = 90°$. Тікбұрышты C_1OD_1 мен MON үшбұрыштарынан $ON = ND_1 = 5$ см, $OD_1 = 5\sqrt{2}$ см, $MN = ON \cdot \mathrm{tg}\ 60° = 5\sqrt{3}$ см шығады. Сонда цилиндрдің бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = 2\pi \cdot OD_1 \cdot MN = 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi\sqrt{6}$ (см^2).



117-сурет

Ж а у а б ы. $50\pi\sqrt{6}$ см^2.

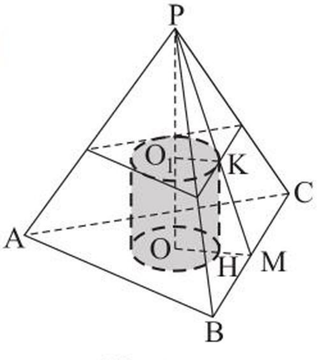


118-сурет

Егер цилиндрдің бір табаны пирамиданың табанына тиісті, ал басқасы пирамиданың әр бүйір жағымен жанасатын болса, онда *цилиндр пирамидаға іштей сызылған* (немесе пирамида цилиндрге сырттай сызылған) деп аталатынын атап өтелік.

Пирамиданың табанына параллель қимасы оған ұқсас болады. Егер осы қимаға іштей шеңбер сызуға болса, онда пирамидаға іштей цилиндр сызуға болады. Мысалы, 118-суретте цилиндр табаны ромб болатын төртбұрышты пирамидаға іштей сызылған.

2 - е с е п. Табаны a-ға, биіктігі h-қа тең үшбұрышты дұрыс пирамидаға цилиндр іштей сызылған. Егер цилиндрдің табанының радиусы r-ге тең болса, оның биіктігін табу керек.



119-сурет

Ш е ш у і. Пирамиданың биіктігі $PO = h$, табан қабырғасы $AB = a$, цилиндр табанының радиусы $O_1K = r$ болсын (119-сурет). Цилиндрдің O_1O биіктігіне тең KH жасаушысының ұзындығын x деп белгілейік. POM және PO_1K тікбұрышты үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{PO}{PO_1} = \frac{OM}{O_1K}$, яғни $\frac{h}{h-x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{r}$ аламыз. Бұдан $h \cdot r = (h - x) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $h - x = \frac{6hr}{a\sqrt{3}}$,

$x = h - \frac{2hr\sqrt{3}}{a}$.

Ж а у а б ы. $h - \frac{2hr\sqrt{3}}{a}$.

СҰРАҚТАР

1. Цилиндр бетінің ауданы деп нені атайды?

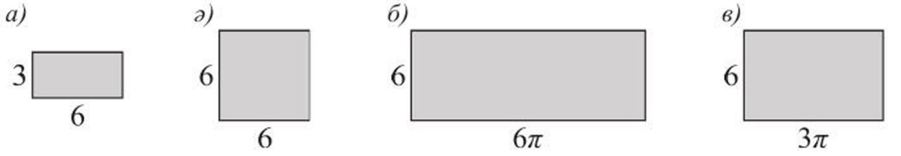
2. Цилиндрдің бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады? Осы формулаларды қорытып шығарыңдар.

3. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы не болып табылады? Цилиндрдің толық бетінің жазбасын кескіндеңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

308. 120, *а*, *ә*, *б*, *в*-суреттерінің қайсысы табанының радиусы 3-ке, жасаушысы 6-ға тең цилиндрдің бүйір беті жазбасының кескіні болатынын көрсетіңдер:



120-сурет

309. Бүйір бетінің ауданы табандары аудандарының қосындысына тең цилиндр бар бола ма? Жауабын түсіндіріңдер.

310. Қабырғалары 6 см-ге және 8 см-ге тең тіктөртбұрышты оның: а) кіші қабырғасынан; ә) үлкен қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің толық бетінің ауданын табыңдар.

311. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі $10\sqrt{2}$ см-ге тең және жасаушымен 45° бұрыш жасайды. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

312. Цилиндрдің табанының ауданы π дм^2-ге, ал осьтік қимасының ауданы 2 дм^2-ге тең. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

313. Теңқабырғалы цилиндрдің биіктігі h-қа тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

314. Теңқабырғалы цилиндрдің толық бетінің ауданы: а) 12π м^2-ге; ә) қыры 2 м-ге тең кубтың бетінің ауданына тең болса, оның табанының радиусы қандай болуы керек?

315. Бүйір бетінің ауданы 16π дм^2-ге тең теңқабырғалы цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

316. Өлшемдері $\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$ дм және $\sqrt{\dfrac{24}{\pi}}$ дм болатын тіктөртбұрыш – әртүрлі екі цилиндрдің бүйір беттерінің жазбасы. Олардың толық беттері аудандарының айырымын табыңдар.

317. Цилиндрдің: а) бүйір бетінің жазбасы – қабырғасы 1 дм-ге тең шаршы болса; ә) бүйір беті жазбасының диагоналі жасаушымен 60°-қа тең бұрыш жасаса, ал цилиндрдің биіктігі 2 дм-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

318. Цилиндрдің осіне параллель жазықтықпен қимасы оның табанындағы шеңберден 90°-қа тең доғаны қияды. Қиманың диагоналі цилиндрдің

4 см-ге тең радиусынан екі есе үлкен. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

319. Биіктігі 30 см-ге тең теңқабырғалы цилиндр пішіндес 20 шелек жасау үшін, оның тігісіне бүйір бетінің ауданының 1%-ы кететін болса, $9\,м^2$ қаңылтыр жете ме?

B деңгейі

320. а) Цилиндрдің бүйір беті ауданының оның осьтік қимасының ауданына қатынасы неге тең?

ә) Цилиндр табанының және осьтік қимасының аудандары, сәйкесінше, Q және S-ке тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

321. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қыры $9\sqrt{2}$ см-ге тең және табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Осы пирамидаға іштей сызылған теңқабырғалы цилиндрдің биіктігін табыңдар.

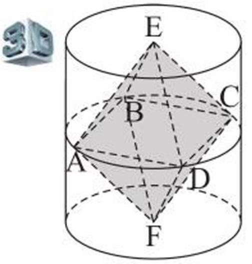
322. Пирамиданың табаны – қабырғасы a-ға тең дұрыс үшбұрыш. Пирамиданың екі бүйір жағы табанына перпендикуляр, ал үшіншісі онымен α бұрышын жасайды. Пирамидаға биіктігі табанының радиусына тең цилиндр іштей сызылған. Цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

323. Қыры b-ға тең $OABC$ дұрыс тетраэдрі мен цилиндр былай орналасқан: тетраэдрдің O төбесі – цилиндрдің бір табанының центрі, ал A, B, C төбелері оның екінші табанының шеңберінде жатыр. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

C деңгейі

324. Цилиндрдің осьтік қимасының периметрі P. Егер цилиндрдің бүйір бетінің ауданы ең үлкен болса, оның биіктігі мен табанының радиусын табыңдар.

325. Табанының диаметрі d-ға тең цилиндр берілген. Цилиндрдің бүйір бетінің қимасы – эллипс, оның жазықтығы табан жазықтығына 30° бұрышпен көлбеген. Цилиндрдің осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.



121-сурет

326. Цилиндр мен дұрыс $EABCDF$ октаэдрі былай орналасқан: октаэдрдің E және F төбелері – цилиндр табанының центрлері, ал A, B, C, D төбелері цилиндрдің бетіне тиісті (121-сурет). Егер октаэдрдің қабырғасы a-ға тең болса, цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

14. Конус және оның элементтері. Конустың жазықтықпен қимасы

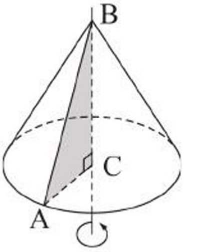
Тақырыпты оқу барысында:

• конустың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;

• конусты және оның жазықтықпен қимасын кескіндейсіңдер;

• конустың элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

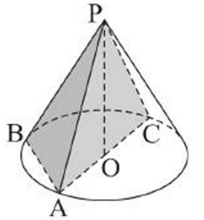
Тікбұрышты үшбұрышты оның катетінен айналдырғанда шығатын дене конус деп аталады. Конустың айналу осін қамтитын түзу (немесе оның төбесін табанының центрімен қосатын кесінді) **конустың осі** деп аталады. Мысалы, 122-суретте тікбұрышты ΔABC-ны оның BC катетінен айналдырғанда шыққан конустың кескіні берілген. B нүктесі **конустың төбесі** деп аталады. BA гипотенузасы конустың **жасаушысы** деп аталып, оның **бүйір бетін** сызады. CA катеті конустың **табанын** – дөңгелекті сызады. Конустың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр конустың **биіктігі** деп аталады. Осы кесіндінің ұзындығы да конустың биіктігі деп аталады. Конустың бүйір беті мен табанының бірігуінен тұратын фигура конустың **толық беті** деп аталады.



122-сурет

Конустың төбесін қамтитын барлық қималары теңбүйірлі үшбұрыштар болады (мысалы, 123-суреттегі ΔPAB немесе ΔPAC).

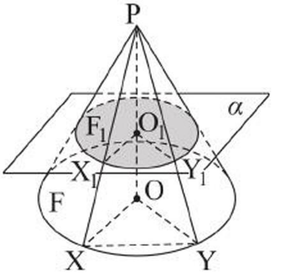
Конустың төбесі мен табанының центрін қамтитын қимасы конустың **осьтік қимасы** деп аталады. Осьтік қимасы теңқабырғалы үшбұрыш болатын конус **теңқабырғалы конус** деп аталады.



123-сурет

Т е о р е м а. **Конустың оның табанына параллель жазықтықпен қимасы дөңгелек болады.**

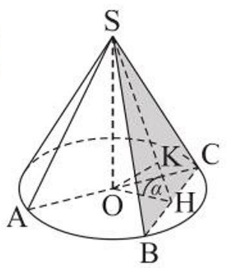
Д ә л е л д е у і. Конустың табаны F, оған параллель қимасы – F_1, O_1 – PO биіктігінің қима жазықтығымен қиылысу нүктесі (124-сурет). F_1 және F фигуралары ұқсас болатынын дәлелдейік. Шынымен де, конустың F табанының қайсыбір X нүктесіне PX кесіндісі мен қима жазықтығының X_1 қиылысу нүктесі, ал Y нүктесіне Y_1 нүктесі сәйкес келетін болсын. Сонда $POXY$ пирамидасының



124-сурет

оның табанына параллель жазықтықпен қимасының қасиеті бойынша: $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{PO_1}{PO} = k$, мұндағы k – тұрақты сан. Конустың F табанының кез келген X және Y нүктелері мен F_1 қимасының оларға сәйкес келетін нүктелері үшін $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$ теңдігі ақиқат болатындықтан, $F_1 \sim F$. Демек, конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы дөңгелек болады.

1 - е с е п. Теңқабырғалы конустың төбесі мен табанының хордасы арқылы өтетін жазықтық табанымен 60° бұрыш жасайды. Конустың жасаушысы l-ге тең болса, оның табанының центрінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.

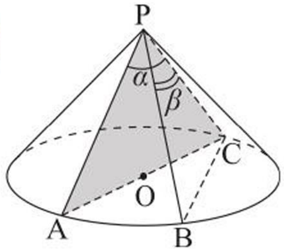


125-сурет

Ш е ш у і. ΔSBC конустың көрсетілген жазықтықпен қимасы, ал ΔASC оның осьтік қимасы болсын, сонда $AS = SC = AC = l$ болады (125-сурет). Конустың биіктігі: $SO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. SBC жазықтығының табанына көлбеулік бұрышы SHO-ға тең, мұндағы H – BC хордасының ортасы, ал O нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтық – ΔSOH-тың OK биіктігі (неге екенін түсіндіріңдер). ΔOKH-тан $OK = OH \cdot \sin\alpha$ болғандықтан, ΔSOH-тан $OH = SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ болады, бұдан $OK = SO \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = SO \cdot \cos\alpha =$ $= \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$.

Ж а у а б ы. $\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

2 - е с е п. Конустың оның P төбесін қамтитын, ауданы ең үлкен болатын қимасы салынған. Конустың жасаушысы 8 см-ге, ал оның осьтік қимасының P төбесіндегі бұрышы α-ға (α – айнымалы шама) тең болса, осы қиманың ауданын табу керек.



126-сурет

Ш е ш у і. ΔPAC конустың осьтік қимасы болсын, сонда $\angle APC = \alpha$ болады. Конустың төбесін қамтитын басқа қимасы – ΔPBC, $\angle BPC = \beta$ болсын (126-сурет). Конустың екі жасаушысы арқылы өтетін кез келген қимасының ауданы: $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\varphi$, мұндағы l – конус жасаушысының ұзындығы, φ – жасаушылардың арасындағы бұрыш.

$\sin\varphi$-дің мәні ең үлкен болғанда S-тің мәні ең үлкен болады.

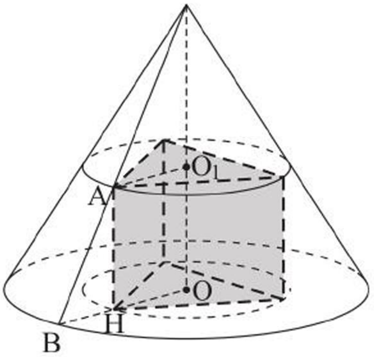
Егер $\alpha \le 90°$ болса, онда конустың осьтік қимасының ауданы ең үлкен болады, себебі $\sin\alpha > \sin\beta$. $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\alpha = 32\sin\alpha$ (см^2).

Егер $90° < \alpha < 180°$ болса, онда конустың арасындағы бұрышы 90°-қа тең екі жасаушысы табылады. Сонда осы екі жасаушыны қамтитын ауданы ең үлкен болады, себебі $\sin 90° > \sin \alpha$. $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin 90° = \frac{1}{2}l^2 =$ $= 32$ (см^2).

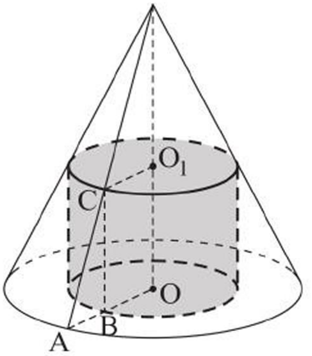
Ж а у а б ы. Егер $0° < \alpha \leq 90°$ болса, $32\sin \alpha$ см^2; егер $90° < \alpha < 180°$ болса, 32 дм^2.

Бір табаны конустың табанында, ал басқа табанының төбелері оның бүйір бетінде жататын призманы конусқа *іштей сызылған призма* (ал конус призмаға сырттай сызылған) деп атайды.

Конустың оның табанына параллель қимасы дөңгелек болады, сондықтан, егер осы дөңгелекке іштей n-бұрыш сызуға болса, онда конусқа іштей n-бұрышты призма сызуға болады (127-сурет).



127-сурет



128-сурет

Бір табаны конустың табанында, ал басқа табанының шеңбері конустың бүйір бетінде жататын цилиндрді конусқа *іштей сызылған цилиндр* (ал конус цилиндрге сырттай сызылған) деп атайды (128-сурет).

СҰРАҚТАР

1. Конус дегеніміз не?

2. Конустың төбесі, жасаушысы, табаны, биіктігі дегеніміз не?

3. Конустың бүйір беті және толық беті дегеніміз не?

4. Конустың остік қимасы дегеніміз не?

5. Қандай конус теңқабырғалы конус деп аталады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

327. Конустың табанының нүктесі мен биіктігінің ортасы арқылы түзу жүргізіп, оның конустың бүйір бетімен қиылысу нүктесін белгілеңдер.

328. Табанының радиусы 12 см-ге тең конустың табанына параллель және биіктігін тең үш бөлікке бөлетін екі қима жүргізілген. Осы қималардың аудандарын табыңдар.

329. Конустың осьтік қимасы: а) гипотенузасы 12 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш; ә) ауданы $16\sqrt{3}$ см^2-ге, ал бұрыштарының бірі 120°-қа тең үшбұрыш болса, конустың биіктігі мен жасаушысын табыңдар.

330. Конустың төбесі арқылы табан жазықтығымен тең бұрыш жасайтын екі жазықтық жүргізілген. Конустың осы жазықтықтармен жасайтын қималары тең болады деген ақиқат па? Жауабын түсіндіріңдер.

331. а) Конустың осьтік қимасының екі қабырғасы 4 см және 8 см. Конустың төбесі арқылы өтіп, табанынан 60° доғаны қиятын жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

ә) Конустың осьтік қимасының бір бұрышы 90°-қа тең. Конус табанының $4\sqrt{3}$ см-ге тең хордасы 120°-қа тең доғаны кереді. Конустың төбесі мен осы хорда арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

332. Конустың осьтік қимасы мен биіктігінің ортасы арқылы табанына параллель жүргізілген қимасының аудандары, сәйкесінше, 48 см^2 және 9π см^2. Конустың жасаушысы мен табан жазықтығының арасындағы бұрышты табыңдар.

333. Теңқабырғалы конустың табанының радиусы 10 см-ге тең. Конустың осьтік қимасының ауданы оның табанына параллель жазықтықпен қимасының ауданына тең болса, сол қиманың радиусын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

334. Конустың табанының радиусы 6 см-ге тең, ал оның жасаушысы табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Конустың биіктігі оның төбесі арқылы өтетін жазықтықпен 30° бұрыш жасайтын болса, осы қиманың ауданын табыңдар.

В деңгейі

335. Конустың жасаушыларының бірі конуспен ортақ ішкі нүктелері жоқ жазықтыққа тиісті. Егер конустың жасаушысы 2,5 дм-ге, ал табанының радиусы 2 дм-ге тең болса, осы жазықтықтан конус нүктелеріне дейінгі ең үлкен қашықтық қандай?

336. Екі конустың төбелері ортақ және табандарының центрлері де ортақ. Үлкен конустың табан шеңберінің нүктесінен кіші конустың табанының шеңберіне арасындағы бұрышы 60° болатын екі жанама жүргізілген. Үлкен конустың жасаушысы табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Егер кіші конустың биіктігі 5 см-ге тең болса, оның табанының радиусын табыңдар.

337. а) 1 дм-ге тең жасаушысы табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген конусқа іштей сызылған кубтың қырын табыңдар.

ә) Конусқа іштей куб сызылған. Егер конустың биіктігінің ортасы кубтың жоғарғы табанына тиісті болса, конустың осьтік қимасының конус төбесіндегі бұрышының косинусын табыңдар.

338. Үш жасаушысы өзара перпендикуляр, биіктігі h болатын конустың табанының ауданын табыңдар.

С деңгейі

339. а) Конустың табанының радиусы 12 см-ге, ал оның биіктігі 8 см-ге тең. Конустың төбесін қамтитын қимасының ең үлкен ауданы қандай болады?

ә) Конустың оның төбесін қамтитын ең үлкен қимасының ауданы оның осьтік қимасының ауданынан 2 есе артық. Конустың жасаушысының табан жазықтығымен жасайтын бұрышын табыңдар.

340. а) Конустың жасаушысы 1 м-ге тең және табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Конусқа іштей сызылған теңқабырғалы цилиндрдің биіктігін табыңдар.

ә) Жасаушысы 1 м-ге тең теңқабырғалы конусқа іштей теңқабырғалы цилиндр сызуға бола ма? Егер болса, онда сондай цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

341. Конусқа қырлары тең үшбұрышты тік призма іштей сызылған. Конустың табанының радиусы R-ге, ал жасаушысының табан жазықтығына көлбеулік бұрышы 60°-қа тең. Призма қырының ұзындығын табыңдар.

15. Конус бетінің ауданы

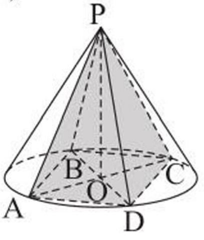
Тақырыпты оқу барысында:

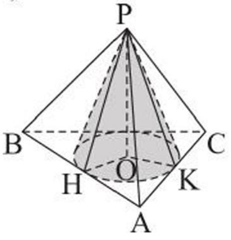
• конустың бүйір және толық беті, конустың жазбасы ұғымдарын білесіңдер;

• конустың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табанына іштей сызылған көпбұрыш болса, онда *пирамида конусқа іштей сызылған* (немесе конус пирамидаға сырттай сызылған) деп аталады. Конусқа бүйір қырлары тең кез келген пирамиданы іштей сызуға болады (129, *а*-сурет). Бұл ретте пирамиданың бүйір қырлары конустың жасаушылары болады.





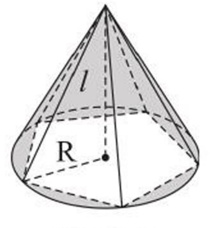
129-сурет

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табанына сырттай сызылған болса, онда *пирамида конусқа сырттай сызылған* (ал конус пирамидаға іштей сызылған) деп аталады. Бұл ретте пирамиданың барлық бүйір жақтарының жазықтықтары конустың бүйір бетімен жанасады (129, *ә*-сурет).

Конустың бүйір бетінің ауданы ретінде оған іштей сызылған дұрыс пирамиданың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде пирамиданың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Т е о р е м а. **Конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңбері ұзындығының жартысы мен жасаушысының көбейтіндісіне тең: $S_{б.б.} = \pi Rl$**, мұндағы R – конустың табанының радиусы, l – жасаушысының ұзындығы.

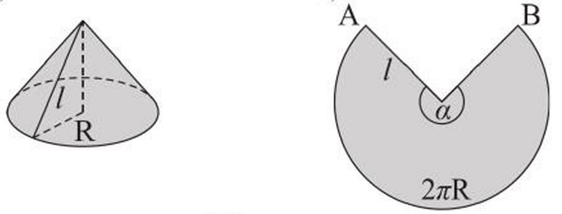
Д ә л е л д е у і. Конусқа іштей дұрыс n-бұрышты пирамида салайық (130-сурет). Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданы табанының жарты периметрі мен оның апофемасының көбейтіндісіне тең. Пирамиданың табан қабырғаларының n санын шексіз өсіргенде, оның бүйір бетінің ауданы πRl-ге тең шамаға ұмтылады. Демек, конустың бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = \pi Rl$.



130-сурет

Егер конустың бүйір бетін оның жасаушысы бойымен қиып (131, *а*-сурет), барлық жасаушылары бір жазықтықта жататындай етіп жазсақ, онда конустың бүйір бетінің *жазбасы* деп аталатын дөңгелек сектор шығады (131, *ә*-сурет).

а) *ә)*



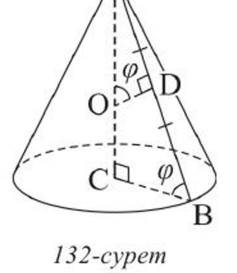
131-сурет

Конустың бүйір беті жазбасының ауданы конустың бүйір бетінің ауданына тең. Сектордың ауданының формуласы бойынша $\boldsymbol{S_{кон.б.б.} = \frac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ}}$, мұндағы l – жасаушының ұзындығы, α – AB доғасының градустық өлшемі немесе оның центрлік бұрышының өлшемі.

Конустың толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің және табанының аудандарының қосындысын айтады. Конустың толық бетінің ауданы: $\boldsymbol{S_{т.б.} = \pi R(R + l)}$, R – конустың табанының радиусы, l – жасаушысының ұзындығы.

Е с е п (конустың бүйір бетінің ауданы туралы). Конустың бүйір бетінің ауданы $\boldsymbol{S_{б.б.} = 2\pi hd}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы h – конустың биіктігі, d – конустың жасаушысына жүргізілген, бір ұшы жасаушыда, екіншісі – конустың осінде жататын орта перпендикуляр кесіндісінің ұзындығы.

Д ә л е л д е у і. $S_{кон.б.б.} = \pi Rl$, мұндағы $l = 2AD$, $R = BC$ (132-сурет). AB жасаушысына жүргізілген орта перпендикулярдың кесіндісі $DO = d$, конустың биіктігі $AC = h$. ABC мен AOD үшбұрыштары ұқсас болғандықтан, $\angle ABC = \angle AOD = \varphi$, сонда $BC = AC \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi = h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi$, $AD = DO \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = d \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$. Демек, $S_{кон.б.б.} = 2\pi \cdot BC \cdot AD = 2\pi h \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot d \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = 2\pi hd$.



132-сурет

СҰРАҚТАР

1. Конустың толық бетінің ауданы деп нені айтады?

2. Конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады?

3. Конустың бүйір бетінің жазбасы не болып табылады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

342. а) Конустың бүйір бетінің ауданы табанының ауданына тең болуы мүмкін бе? ә) Цилиндр мен конустың табандарының радиустары мен биіктіктері тең. Олардың бүйір беттерінің аудандары тең болуы мүмкін бе?

343. Теңқабырғалы конустың табанының, бүйір бетінің және толық бетінің аудандары қандай қатынаста болады?

344. Конустың: а) биіктігі 8 дм-ге, ал табанының радиусы 6 дм-ге тең болса; ә) жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасаса, ал биіктігі 4 дм-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

345. Мұнараның шатыры конус пішіндес. Шатырдың биіктігі 1,5 м, ал мұнара табанының диаметрі 4 м. Шатырдың толық бетінің ауданын 0,1 $м^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

346. а) Бүйір бетінің жазбасы жарты дөңгелек болатын конустың осьтік қимасының төбесіндегі бұрышты табыңдар.

ә) Конустың бүйір бетінің ауданы оның табанының ауданынан үш есе үлкен. Конустың жасаушысының табан жазықтығына көлбеулік бұрышын табыңдар.

347. Сектордың радиусы 6 дм, ал бұрышы 120°. Секторды орап, конустық бет жасаған. Конустың табанының радиусын табыңдар.

348. Конустың: а) толық бетінің ауданы 27π, ал бүйір бетінің ауданы 18π; ә) жасаушысы 5 см, ал толық бетінің ауданы 24π $см^2$ болса, оның бүйір беті жазбасының центрлік бұрышын табыңдар.

349. Конус тәрізді қаңылтыр құйғыштың табанының диаметрі 10 см, ал биіктігі 12 см болуы керек. Оның дайындамасының өлшемдерін (конустың бүйір бетінің жазбасы секторының бұрышы мен радиусын) табыңдар.

350. Конустың биіктігі 6 дм, ал бүйір бетінің ауданы табанының ауданынан екі есе үлкен болса, оның осьтік қимасының ауданын табыңдар.

В деңгейі

351. а) Бүйір қабырғасы 8 см, табанындағы бұрышы 60° болатын теңбүйірлі үшбұрышты бүйір қабырғасынан; ә) катеттері 6 см және 8 см болатын тікбұрышты үшбұрышты гипотенузасынан айналдырғанда шығатын айналу денесінің бетінің ауданын табыңдар.

352. Қабырғасы 4 см-ге, бұрышы 30°-қа тең ромбыны: а) оның қабырғасынан; ә) оның кіші диагоналінен айналдырғанда шыққан дене бетінің ауданын табыңдар.

353. Теңқабырғалы конусқа іштей дұрыс алтыбұрышты пирамида сызылған. Пирамиданың табан қырындағы екіжақты бұрышты табыңдар.

354. Конусқа іштей табан қабырғасы a-ға және көршілес бүйір қырларының арасындағы бұрышы 30°-қа тең болатын дұрыс төртбұрышты пирамида салынған. Конустың биіктігін табыңдар.

С деңгейі

355. Биіктігі 12 дм-ге, табан радиусы 5 дм-ге тең конусқа іштей сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ең үлкен ауданын табыңдар.

356. Конустың табан радиусының оның биіктігіне қатынасы $1 : \sqrt{2}$. Осы конусқа іштей сызылған дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір жақтарының арасындағы бұрышты табыңдар.

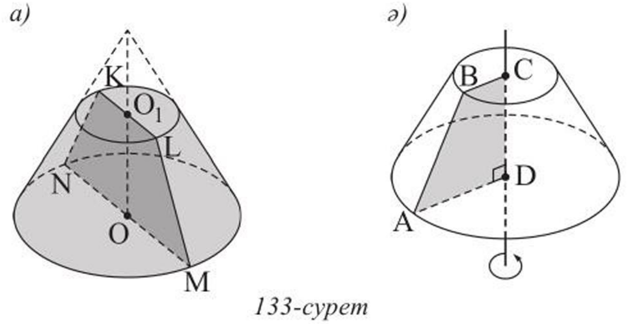
357. Дұрыс үшбұрышты пирамида табанының төбесі оған қарсы жатқан бүйір жағынан 10 см қашықтықта орналасқан. Пирамидаға іштей жасаушысы табан жазықтығымен 75° бұрыш жасайтын конус сызылған. Конустың биіктігі мен табанының радиусын табыңдар.

16. Қиық конус және оның элементтері

Тақырыпты оқу барысында:

• қиық конустың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;
• қиық конусты және оның жазықтықпен қимасын кескіндей аласыңдар;
• қиық конустың элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Конустың табаны мен осы табанына параллель жазықтықпен қимасының арасындағы бөлігі қиық конус деп аталады (133, *а*-сурет). Бұл ретте конустың табаны мен оның көрсетілген жазықтықпен қимасы қиық конустың **табандары** деп аталады. Қиық конустың бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр қиық конустың **биіктігі** деп аталады. Осы перпендикулярдың ұзындығы да қиық конустың биіктігі деп аталады. Конустың жасаушысында жататын және ұштары қиық конустың табандарының шеңберлерінде болатын кесінді қиық конустың **жасаушысы** деп аталады. Қиық конустың екі жасаушысын қамтитын кез келген қимасы теңбүйірлі трапеция болады. Қиық конустың барлық жасаушыларынан тұратын фигура оның *бүйір беті* деп, ал табандары мен бүйір бетінің бірігуінен тұратын фигура *қиық конустың толық беті* деп аталады.

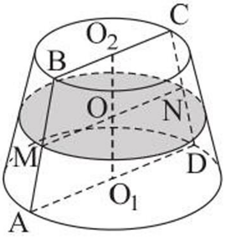


133-сурет

Тікбұрышты трапецияны оның кіші бүйір қабырғасынан айналдыру арқылы қиық конусты алуға болады. Мысалы, 133, *ә*-суретте тікбұрышты *ABCD* трапециясын оның кіші *CD* бүйір қабырғасынан айналдырғанда шыққан қиық конустың кескіні берілген. Трапецияның *BC* мен *AD* табандары қиық конустың табандарының дөңгелектерін, ал *AB* кесіндісі оның бүйір бетін сызады. Қиық конустың табандарының центрлерінен өтетін түзуді (немесе осы центрлерді қосатын кесіндіні) қиық конустың **осі** деп атайды. Қиық конустың осін қамтитын кез келген қима қиық конустың **осьтік қимасы** деп аталады. 133, *а*-суреттегі *MNKL* теңбүйірлі трапециясы – қиық конустың осьтік қимасы.

Е с е п. Қиық конустың табандарының аудандары $4\,см^2$ және $16\,см^2$. Оның биіктігінің ортасы арқылы қиық конустың табандарына параллель жазықтық жүргізілген. Конустың осы жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Көрсетілген қима – диаметрі қиық конустың осьтік қимасы болатын $ABCD$ трапециясының MN орта сызығына тең дөңгелек (134-сурет). $MN = 0{,}5(AD + BC) = AO_1 + BO_2$. Есептің шарты бойынша $4 = \pi \cdot BO_2^2$, $16 = \pi \cdot AO_1{}^2$ болғандықтан, $BO_2 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, $AO_1 = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$. Демек, $MN = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$, $MO = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$. Сонда $S_{қима} = \pi \cdot MO^2 = \pi \cdot \dfrac{9}{\pi} = 9$ ($см^2$).



134-сурет

Ж а у а б ы. $9\,см^2$.

СҰРАҚТАР

1. Қиық конус дегеніміз не?
2. Қиық конустың жасаушысы, табандары, биіктігі дегеніміз не?
3. Қиық конустың бүйір беті және толық беті дегеніміз не?
4. Қиық конустың осьтік қимасы дегеніміз не?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

358. Табандарының радиустары 8 см-ге және 14 см-ге, ал жасаушысы 10 см-ге тең қиық конустың осьтік қимасының ауданын табыңдар.

359. Табандарының радиустары 3 м және 6 м-ге тең, ал жасаушысы табанына: а) 45°; ә) 30° бұрышпен көлбеген қиық конустың биіктігін табыңдар.

360. а) Жоғарғы табаны үлкен болатын қиық конус пішіндес шелектің жасаушысы 2,5 дм, ал табандарының радиустары 1,7 дм және 1 дм. Шелектің биіктігін табыңдар.

ә) Қиық конустың биіктігі $\sqrt{30}$ дм-ге тең, ал табандарының аудандары 6π $дм^2$ және 24π $дм^2$. Қиық конустың жасаушысының ұзындығын табыңдар.

361. Қиық конустың осьтік қимасының ауданы $32\,см^2$-ге, биіктігі жоғарғы табанының диаметріне тең, ал жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Қиық конустың: а) табандарының радиустарын; ә) жасаушысын табыңдар.

362. а) Биіктігі 12 см-ге, төменгі табанының радиусы 8 см-ге, ал жасаушысы мен табанының арасындағы бұрыштың тангенсі 2,4-ке тең қиық конус берілген. Осы қиық конустың жоғарғы табанының ауданын табыңдар.
ә) Қиық конустың 16 см-ге тең жасаушысы табанына 60° бұрышпен көлбеген. Қиық конустың табандарының радиустарының қатынасы 3-ке тең болса, осы радиустарды табыңдар.

363. Жасаушысы 20 см, жоғарғы табанының диаметрі 8 см, биіктігі 16 см болатын қиық конус пішіндес қалпақ тігілген. Басының айналымы 1 м-ге тең аққалаға осы қалпақ келе ме?

364. Биіктігі 5 м, табандарының радиустары 0,25 м және 0,09 м болатын қиық конус пішіндес бөренені биіктіктері тең үш бөлікке бөлді. Сонда шыққан қиық конус жасаушыларының ұзындықтарын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

B деңгейі

365. Қиық конустың 8 см-ге тең жасаушысы оның төменгі табанымен 60°-қа тең бұрыш жасайды. Оның осьтік қимасының диагоналін қамтитын түзу осы бұрышты қақ бөледі. Қиық конустың табандарының радиустарын табыңдар.

366. а) Конустан қиып алынған қиық конустың табандарының радиустары 18 см, 15 см және жасаушысы 9 см. Бастапқы конус жасаушысының ұзындығын табыңдар.
ә) Конустың биіктігі $\sqrt{2}$ м-ге тең. Конустан оның табанына параллель жазықтықпен қиып алынған қиық конустың табандары аудандарының қатынасы 1 : 2 болуы үшін, қима жазықтықты конустың төбесінен қандай қашықтықта жүргізу керек?

367. Қиық конустың жасаушысы l-ге тең және оның төменгі табан жазықтығына φ бұрышпен көлбеген. Қиық конустың табандары аудандарының қатынасы $\frac{1}{9}$-ге тең болса, оның табандарының радиустарын табыңдар.

C деңгейі

368. Қиық конустың биіктігінің ортасынан оған перпендикуляр өтетін қимасы ауданының оның диагональдары перпендикуляр болатын осьтік қимасының ауданына қатынасын табыңдар.

369. Қиық конустың осьтік қимасының ауданы S-ке тең. Конус табандарының 2α-ға тең доғаларын керетін хордалары арқылы жүргізілген қимасы оның табан жазықтығымен φ бұрышын жасайтын болса, осы қиманың ауданын табыңдар.

17. Қиық конус бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• қиық конустың бүйір және толық беті, қиық конустың жасаушысы ұғымдарын білесіңдер;

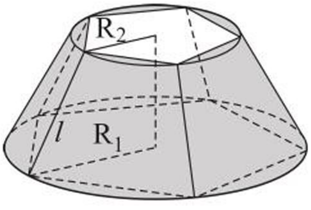
• қиық конустың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Қиық конустың бүйір бетінің ауданы ретінде оған іштей сызылған дұрыс қиық пирамиданың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Теорема. **Қиық конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңберлерінің ұзындықтары қосындысының жартысы мен жасаушысының көбейтіндісіне тең: $\boldsymbol{S_{б.б.} = \pi l(R_1 + R_2)}$**, мұндағы R_1, R_2 – қиық конустың табандарының радиустары, l – жасаушысының ұзындығы.

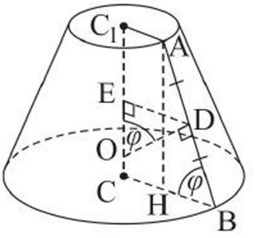
Дәлелдеуі. Қиық конусқа іштей дұрыс n-бұрышты қиық пирамида сызайық (135-сурет). Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы табандарының жарты периметрлерінің қосындысы мен апофемасының көбейтіндісіне тең. Қиық пирамиданың табан қабырғаларының n санын шексіз өсіргенде, оның табандарының периметрлері $2\pi R_1$ және $2\pi R_2$ шамаларына, ал қиық пирамиданың апофемасының ұзындығы қиық конустың жасаушысының ұзындығына ұмтылады. Сонда оның бүйір бетінің ауданы $\pi l(R_1 + R_2)$ шамасына ұмтылады. Демек, қиық конустың бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = \pi l(R_1 + R_2)$ болады.



135-сурет

Қиық конустың толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің және табандары аудандарының қосындысын айтады. Қиық конустың толық бетінің ауданы: $\boldsymbol{S_{т.б.} = \pi R_1^2 + \pi l(R_1 + R_2) + \pi R_2^2}$, мұндағы R_1, R_2 – қиық конустың табандарының радиустары, l – жасаушысының ұзындығы.

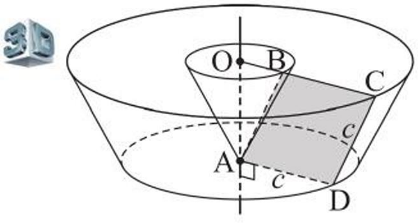
1-есеп (қиық конустың бүйір бетінің ауданы туралы). Қиық конустың бүйір бетінің ауданы $\boldsymbol{S_{б.б.} = 2\pi hd}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы h – қиық конустың биіктігі, d – қиық конустың жасаушысына жүргізілген, бір ұшы жасаушыда, екіншісі қиық конустың осінде жататын орта перпендикулярдың кесіндісінің ұзындығы.



136-сурет

Д ә л е л д е у і. $S_{\text{қ.к.б.б.}} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, мұндағы $l = AB$, $R_1 = BC$, $R_2 = AC_1$ (136-сурет). AB жасаушысына жүргізілген орта перпендикулярдың кесіндісі $DO = d$, қиық конустың биіктігі $CC_1 = h$. $AH \perp BC$ және $DE \perp CC_1$ жүргіземіз, сонда $\angle ABC = \angle DOE = \varphi$ (қабырғалары өзара перпендикуляр бұрыштар ретінде) және $AH = CC_1 = h$. ΔABH-тан $AB = \dfrac{AH}{\sin\varphi} = \dfrac{h}{\sin\varphi}$ аламыз. $ABCC_1$ трапециясында орта сызығының қасиеті бойынша: $BC + AC_1 = 2DE$. ΔDOE-ден $DE = DO \cdot \sin\varphi = d \cdot \sin\varphi$ аламыз. Демек, $S_{\text{қ.к.б.б.}} = \pi \cdot AB \cdot 2DE = \pi \cdot \dfrac{h}{\sin\varphi} \cdot 2d \cdot \sin\varphi = 2\pi hd$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

2 - е с е п. Қабырғасы c-ға, бұрышы 60°-қа тең ромб оның қабырғасына перпендикуляр болатын және сүйір бұрышының төбесінен өтетін осьтен айналады. Айналу денесі бетінің ауданын табу керек.



137-сурет

Ш е ш у і. Бұл айналу денесінің беті табандарының радиустары AD, OC және жасаушысы CD болатын қиық конустың бүйір бетінен, табан радиусы OB және жасаушысы AB болатын конустың бүйір бетінен, радиусы AD болатын дөңгелектен және радиустары OC мен OB болатын сақинадан тұрады (137-сурет).

$S_{\text{қ.к.б.б.}} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2) = \pi c(c + c + 0{,}5c) = 2{,}5c^2\pi$, мұндағы $l = CD = c$, $R_2 = OC = BC + OB = c + 0{,}5c$, себебі, ΔABO-да $\angle A = 30°$ және $OB = 0{,}5AB = 0{,}5c$.

$S_{\text{кон.б.б.}} = \pi Rl = 0{,}5c^2\pi$, мұндағы $l = AB = c$, $R = OB = 0{,}5c$.

$S_{\text{дөңг.}} = \pi c^2$.

$S_{\text{сақина}} = \pi(OC^2 - OB^2) = \pi((1{,}5c)^2 - (0{,}5c)^2) = 2\pi c^2$.

Сонда ізделінді аудан: $2{,}5c^2\pi + 0{,}5c^2\pi + \pi c^2 + 2\pi c^2 = 6\pi c^2$.

Ж а у а б ы. $6\pi c^2$.

СҰРАҚТАР

1. Қиық конустың толық бетінің ауданы дегеніміз не?

2. Қиық конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

370. Табандары 4 см, 10 см және бүйір қабырғасы 5 см болатын теңбүйірлі трапеция өзінің симметрия осінен айналдырылған. Айналу денесінің толық бетінің ауданын табыңдар.

371. Қиық конустың 6 см-ге тең жасаушысы төменгі табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайды. Қиық конустың жоғарғы табанының диаметрі 10 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданын табыңдар.

372. Қиық конустың табандарының аудандары 4π см^2-ге және 100π см^2-ге тең, ал осьтік қимасының ауданы 180 см^2. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

373. Қиық конустың жасаушысы 10 см-ге, биіктігі 8 см-ге, ал бүйір бетінің ауданы 140π см^2-ге тең. Қиық конустың табандарының радиустарын табыңдар.

374. а) Табандарының радиустарының қатынасы 1 : 2, биіктігі 8 см-ге тең, ал жасаушысы табан жазықтығымен $45°$ бұрыш жасайтын қиық конустың бүйір бетінің ауданын 1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Жасаушысы 2 дм, табандарының радиустары 2 см және 4 см болатын қиық конус пішіндес дауыс зорайтқыш жасау үшін қанша материал қажет? Жауабын 1 см^2-ге дейінгі дәлдікпен беріңдер.

375. Бүйір бетінің ауданы табандары аудандарының қосындысына тең қиық конус бола ма?

В деңгейі

376. Қиық конустың осьтік қимасының диагональдары өзара перпендикуляр, ал 12 см-ге тең жасаушысы төменгі табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайды. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

377. Қиық конустың арасындағы бұрышы $60°$-қа тең екі жасаушысы арқылы жүргізілген жазықтық оның табандарын 6 см-ге және 4 см-ге тең хордалар бойымен қияды. Осы хордалардың әрқайсысы $90°$-қа тең доғаларды кереді. Қиық конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

378. Шелектің бүйір бетін жасауға дайындаған қаңылтырдың доғаларының шамалары $60°$-қа, ал олардың радиустары 72 см-ге және 48 см-ге тең. Шелектің биіктігі қандай болады? Жауабын 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

379. Қиық конустың арасындағы бұрышы 90°-қа тең екі жасаушысы арқылы оның табандарының шеңберлерінен 120°-қа тең доғаларды қиятын жазықтық жүргізілген. Қиық конустың табандарының аудандарының қатынасы $\frac{1}{4}$-ге, ал жасаушысы $2\sqrt{6}$ см-ге тең болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

380. Қиық конустың осьтік қимасының диагональдары өзара перпендикуляр, биіктігі 12 см-ге тең, ал жасаушысы төменгі табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

С деңгейі

381. Қиық конустың төменгі, жоғарғы табандары мен бүйір беті аудандарының қатынасы, сәйкесінше, 4 : 3 : 2 қатынасына тең. Оның жасаушысының төменгі табанына көлбеулік бұрышын табыңдар.

382. Егер шелектің бүйір бетін жасау үшін доғаларының шамасы 72°-тан, ал олардың радиустары 92 см және 65 см болатын материал дайындалған болса, шелектің биіктігі қандай болуы мүмкін? Шелекті жасау үшін өлшемдері 105×30 см болатын қаңылтыр жете ме?

18. Сфера және шар. Шардың жазықтықпен қимасы

Тақырыпты оқу барысында:

• сфера мен шардың анықтамаларын білесіңдер;

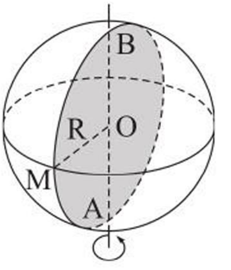
• сфера мен жазықтықтың өзара орналасуын; сфераға жанама жазықтықтың анықтамасы мен қасиетін білесіңдер;

• шарды, шардың жазықтықпен қимасын; сфераға жанама жазықтықты кескіндейсіңдер;

• жазықтық пен сфераның өзара орналасуына және шар мен сфераның жазықтықпен қиылысуына байланысты берілген есептерді шығарасыңдар.

Кеңістіктің берілген нүктесінен бірдей қашықтықтағы барлық нүктелерінен тұратын фигура сфера деп, ал кеңістіктің қайсыбір нүктесінен берілгеннен артық емес қашықтықта жататын барлық нүктелер жиыны шар деп аталады. Берілген нүктені *сфераның* (немесе шардың) *центрі* деп атайды. Шар – беті сфера болатын дене.

Шеңберді оның диаметрін қамтитын түзуден айналдырып, сфераны, ал дөңгелекті сондай түзуден айналдырып, шарды алуға болады (138-сурет). Осы дөңгелектің центрі *шардың центрі* және шардың беті болатын сфераның да центрі болады.



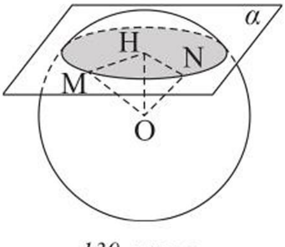
138-сурет

Шардың центрін оның бетінің кез келген нүктесімен қосатын кесінді **шардың радиусы** немесе сфераның радиусы деп аталады. Сфераның екі нүктесін қосатын кесінді **сфераның хордасы** немесе шекарасы осы сфера болатын шардың хордасы деп аталады. Сфераның центрі арқылы өтетін хорда **сфераның** (шардың) **диаметрі** деп аталады. Шардың кез келген хордасы оның диаметрінен үлкен емес. Шардың диаметрін қамтитын түзу (немесе диаметрдің өзі) шардың **осі** деп аталады.

Сфераның (немесе шардың) жазықтықпен бір ғана ортақ нүктесі болуы, ортақ нүктесі болмауы немесе шексіз көп ортақ нүктесі болуы мүмкін. Сферамен бірден артық ортақ нүктесі бар болатын жазықтық *қиюшы жазықтық* деп аталады. Сфера мен қиюшы жазықтықтың барлық ортақ нүктелері *сфераның қимасы* деп, ал шар мен қиюшы жазықтықтың барлық ортақ нүктелері *шардың қимасы* деп аталады.

Т е о р е м а. **Сфераның жазықтықпен қимасы шеңбер болады.**

Д ә л е л д е у і. α жазықтығы сфераны қиып өтсін және сфера центрі бұл жазықтықта жатпасын. Олардың қиылысу сызығынан қайсыбір M нүктесін



139-сурет

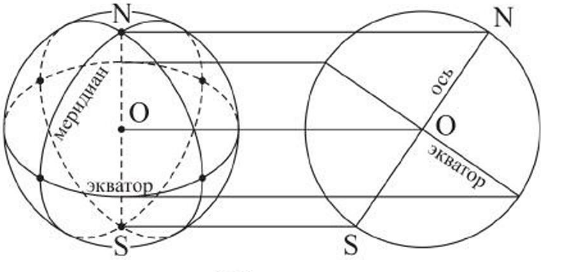
алайық (139-сурет). Сфераның O центрінен α жазықтығына OH перпендикулярын жүргізейік. ΔOMH-тан $MH = \sqrt{OM^2 - OH^2}$ – кез келген M нүктесі үшін тұрақты шама.

Сфера мен жазықтықтың қиылысу сызығы α жазықтығында жататындықтан және H нүктесінен бірдей қашықтықта болатындықтан, олардың барлығы центрі H нүктесі болатын шеңберде жатады. Сонымен бірге осы шеңбердің кез келген N нүктесі үшін $ON^2 = NH^2 + OH^2$ теңдігі орындалады. $MH = NH$ болғандықтан, бұл нүкте сфераға тиісті болады.

Егер қиюшы жазықтық сфераның центрі арқылы өтсе, онда оның сферамен қиылысу нүктелері сфераның центрінен оның радиусына тең қашықтықта болады, демек, бұл жағдайда да сфераның жазықтықпен қимасы шеңбер болады. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан:

1) шардың жазықтықпен кез келген қимасы дөңгелек болады;
2) шарды оның центрінен бірдей қашықтықтағы жазықтықтармен қиятын қималары тең болады;
3) шардың центрі арқылы өтетін жазықтықпен қимасын **шардың үлкен дөңгелегі** деп атайды және оның ауданы да ең үлкен болады. Шардың барлық үлкен дөңгелектері тең болады.
4) Қима жазықтығына перпендикуляр диаметр шардың қимасы болатын дөңгелектің центрінен өтеді және керісінше, шар қимасының центрі арқылы өтетін диаметр қима жазықтығына перпендикуляр болады.
5) Егер екі сфераның үш ортақ нүктесі бар болса, онда олардың осы нүктелерден өтетін ортақ шеңбері бар болады (ондай сфераларды *қиылысатын сфералар* деп атайды).



140-сурет

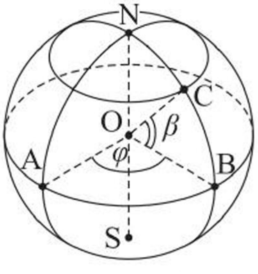
Егер шардың қайсыбір үлкен дөңгелегіне оған перпендикуляр диаметр жүргізілсе, онда диаметрдің ұштары *полюстер*, үлкен дөңгелектің шеңбері *экватор*, ал полюстер арқылы өтетін үлкен дөңгелектердің шеңберлері *меридиандар* деп аталады. Сфераның экваторға параллель жазықтықтармен қималары *параллельдер* деп аталады. Сфера мен шардың проекциядағы кескінін, мысалы, 140-суреттегідей етіп көрсетеді.

Жер планетасын шартты түрде шар деп есептейді, оның екі полюсі (Солтүстік және Оңтүстік) және олармен байланысқан көптеген параллельдері мен меридиандары бар (141-сурет). Жазықтықта сияқты сферада да координаталар жүйесін енгізуге болады. Әдетте, географиялық координаталар жүйесін, бойлық пен ендікті пайдаланады.

141-сурет

Бойлық – φ бұрышы ($0° \le \varphi \le 360°$), экватор жазықтығында бастапқы (нөлдік) меридианнан сағат тіліне қарсы бағытта берілген нүкте жататын меридианға дейін өлшенеді (142-сурет).

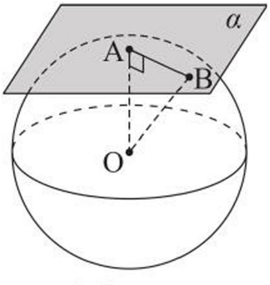
Ендік – β бұрышы ($-90° \le \beta \le 90°$), берілген нүктенің меридиан жазықтығында экватордан осы нүкте жататын радиусқа дейін өлшенеді; «плюс» таңбасы Солтүстік полюске, «минус» – Оңтүстік полюске қарай.



142-сурет

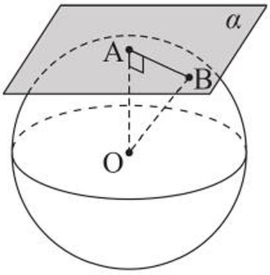
Сферамен бір ғана ортақ нүктесі бар жазықтық **сфераға жанама** жазықтық деп, ал сол нүкте олардың жанасу нүктесі деп аталады.

Сферамен бір ғана ортақ нүктесі бар түзу сфераға жанама түзу деп аталады. Сфераға жанама жазықтықта жататын және жанасу нүктесі арқылы өтетін кез келген түзудің сферамен бір ғана ортақ нүктесі болады. Осындай түзулердің барлығы сфераға жанама болады (143-сурет).



143-сурет

Сфера мен түзудің бір ғана ортақ нүктесі болуы, ортақ нүктелері болмауы немесе тек екі ортақ нүктесі болуы мүмкін.



144-сурет

Т е о р е м а (*сфераға жанама жазықтықтың белгісі*). **Егер жазықтық сфераға тиісті нүкте арқылы өтсе және оның осы нүктеге жүргізілген радиусына перпендикуляр болса, онда ол осы сфераға жанама жазықтық болады.**

Д ә л е л д е у і. α жазықтығы сфераның A нүктесі арқылы өтіп, оның OA радиусына перпендикуляр болсын, мұндағы O – сфераның центрі (144-сурет). α жазықтығынан A нүктесінен басқа кез келген B нүктесін аламыз. OAB – тікбұрышты үшбұрыш. Оның OB гипотенузасы OA катетінен ұзын болғандықтан, B нүктесі сферадан тыс орналасады. Сонымен α жазықтығының A нүктесінен басқа кез келген нүктесі сфераға тиісті емес. Демек, A – α жазықтығы мен сфераның жалғыз ортақ нүктесі, сондықтан α жазықтығы сфераға жанама жазықтық болады. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан шығатыны, сфераның әр нүктесінен оны жанайтын, сфера центрінен оның радиусына тең қашықтықта өтетін тек бір жазықтық жүргізуге болады.

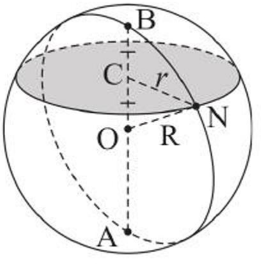
Т е о р е м а (*сфераға жанама жазықтықтың қасиеті*). **Сфераға жанама жазықтық жанасу нүктесіне жүргізілген радиусқа перпендикуляр.**

Д ә л е л д е у і. α жазықтығы O нүктесі центрі болатын сфераға жанама және A жанасу нүктесі болсын (144-сурет). $OA \perp \alpha$ болатынын дәлелдейік. Олай болмайды деп болжайық, сонда сфераның OA радиусы α жазықтығына көлбеу болады және сфераның центрінен α жазықтығына дейінгі қашықтық сфераның радиусынан кем болады. Сондықтан α жазықтығы мен сфера қиылысады. Бұл α жазықтығы сфераны жанайды деген шартқа қайшы келеді. Демек, біздің болжауымыз дұрыс емес, ендеше $OA \perp \alpha$. Теорема дәлелденді.

Жанасу нүктесі деп аталатын тек бір ортақ нүктесі бар *екі сфера жанасатын сфералар* деп аталады. Сфералар іштей немесе сырттай жанасуы мүмкін. *Центрлерінің арақашықтығы олардың радиустарының қосындысына тең болатын екі шар жанасады*.

1 - е с е п. Шар радиусының ортасы арқылы оған перпендикуляр жазықтық жүргізілген. Шардың осы жазықтықпен қимасының ауданы мен оның үлкен дөңгелегінің ауданының қатынасын табу керек.

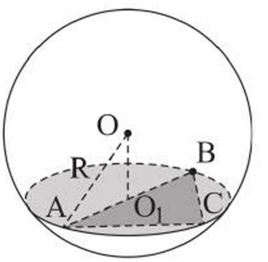
Ш е ш у і. Шардың радиусы R-ге тең болсын (145-сурет). Шардың қимасы болатын дөңгелектің r радиусы: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Сонда ізделінді қатынас: $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$.



145-сурет

Ж а у а б ы. 0,75.

2 - е с е п. Шардың бетінде жататын, арақашықтықтары 6 дм, 8 дм, 10 дм болатын үш нүкте берілген. Шардың радиусы 13 дм. Шардың центрінен осы нүктелер арқылы өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.



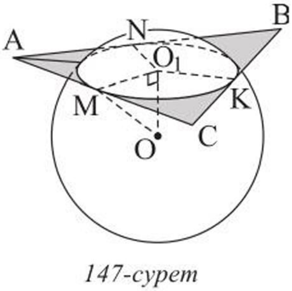
146-сурет

Ш е ш у і. A, B, C – берілген үш нүкте, O шардың центрі болсын, BC = 6 дм, AC = 8 дм, AB = 10 дм, $OA = OB = OC$ = 13 дм (146-сурет). Шардың ABC жазықтығымен қимасы дөңгелек болады, оның шеңбері тікбұрышты ΔABC-ға сырттай сызылған (Пифагор теоремасына кері теорема бойынша). Ізделінді қашықтық – OO_1 кесіндісі, мұндағы O_1 – AB кесіндісінің ортасы, ΔABC-ға сырттай сызылған шеңбердің центрі. Сонда $OO_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (дм).

Ж а у а б ы. 12 дм.

3 - е с е п. Радиусы R-ге тең шар қабырғасы a-ға тең (a – айнымалы шама) дұрыс ΔABC-ның барлық қабырғаларын жанайды. Шардың O центрінен үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек.

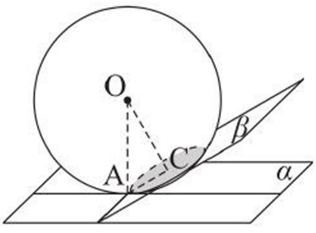
Ш е ш у і. M, N, K нүктелері шардың ΔABC-ның қабырғаларымен жанасу нүктелері болсын (147-сурет). Шардың O центрінен ABC үшбұрышының жазықтығына OO_1 перпендикулярын жүргіземіз. Сонда O_1 нүктесі ΔABC-ға іштей сызылған шеңбердің центрі болады. ABC дұрыс үшбұрыш болғандықтан, осы шеңбердің O_1M радиусы $\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$-ға тең. Тікбұрышты ΔMOO_1-ден ізделінді OO_1 қашықтығын табамыз: $OO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$, мұндағы $R^2 - \frac{a^2}{12} > 0$, $0 < a < 2R\sqrt{3}$.



147-сурет

Ж а у а б ы. $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$, $0 < a < 2R\sqrt{3}$.

4 - е с е п. Радиусы R-ге тең шар берілген. Оның бетіндегі бір нүктеден екі жазықтық жүргізілген: біреуі – шарға жанама, екіншісі – бірінші жазықтықпен 30° бұрыш жасайтын қиюшы жазықтық. Шардың пайда болған қимасының ауданын табу керек.



148-сурет

Ш е ш у і. O центрі болатын шар α жазықтығымен жанасатын, ал қиюшы β жазықтығы α жазықтығымен 30° бұрыш жасайтын болсын (148-сурет). Әрі шардың β жазықтығымен қимасы C нүктесі – центрі, радиусы CA-ға тең дөңгелек болады. Сонда $OA \perp \alpha$, $OC \perp \beta$, ал $\angle AOC = 30°$ болады, себебі жазықтықтардың арасындағы бұрыш осы жазықтықтарға перпендикуляр түзулердің арасындағы бұрышқа тең. ΔAOC-дан $CA = 0{,}5R$ аламыз. Демек, қиманың ауданы $0{,}25\pi R^2$.

Ж а у а б ы. $0{,}25\pi R^2$.

СҰРАҚТАР

1. Сфераның және шардың анықтамасын тұжырымдаңдар.

2. Сфераның және шардың жазықтықпен қимасы не болады?

3. Қандай жазықтық сфераға жанама жазықтық деп аталады?

4. Сфераға жанама жазықтықтың қандай қасиеттерін білесіңдер?

5. R – сфераның радиусы, d – оның центрінен жазықтыққа дейінгі қашықтық болсын. Неліктен жазықтық: а) $d < R$ болса, сфераны қиятынын; ә) $d = R$ болса, сферамен жанасатынын; б) $d > R$ болса, сфераны қимайтынын, яғни онымен ортақ нүктесі болмайтынын түсіндіріңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

383. Жазықтық сфераның центрі арқылы өтіп, оны ұзындығы 31,4 см-ге тең шеңбер бойымен қияды. Сфераның диаметрін 1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

384. а) Шардың жазықтықпен қимасының ауданы 36π см^2-ге тең. Шардың радиусы 10 см-ге тең болса, қима жазықтығынан шардың центріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) Шардың жазықтықпен қимасының ауданы оның үлкен дөңгелегінің ауданынан 4 есе кем. Қиманың радиусы 2 см-ге тең болса, шардың центрінен қима жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

385. а) Радиусы 16 см-ге тең шар пішіндес қарбызды оның бір радиусының ортасынан оған перпендикуляр қимамен бөлген. Осы қиманың ауданы қандай?

ә) Радиусы 8 см-ге тең шар берілген. Радиустың ұшы арқылы онымен $60°$ бұрыш жасайтын жазықтық жүргізілген. Шардың осы жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

386. Шардың жазықтықпен қимасы оның центрінен 5 см қашықтықта орналасқан. Шардың радиусы 7 см-ге тең болса, сол қимаға іштей сызылған дұрыс алтыбұрыштың ауданын табыңдар.

387. Радиусы 5 см-ге тең сфераға жүргізілген жанама жазықтықтың нүктесі жанасу нүктесінен 12 см қашықтықта орналасқан. Осы нүктеден сфераның оған ең жақын нүктесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

388. Құдықтың шеңберінің ұзындығы шамамен 3,5 м-ге тең. Құдықтың бетін биіктігі 0,6 м-ге тең жарты сфера пішіндес қақпақпен жабуға бола ма?

389. Центрі $A(2; -4; 7)$ нүктесінде болатын, радиусы 3-ке тең сфераның теңдеуін құрыңдар. а) Ол сфера координаталар жазықтықтарын қия ма? ә) Сфераның нүктелерінен xOy жазықтығына дейінгі ең қысқа қашықтықты анықтаңдар.

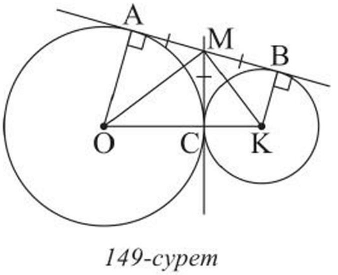
390. Сфера $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ теңдеуімен берілген. Осы сфера мен: а) $2x - 3y + 4z - 10 = 0$; ә) $2x + y - 2z - 6 = 0$; б) $6x - 3y + 6z + 5 = 0$ жазықтығының өзара орналасуын анықтаңдар.

391. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ сферасын: а) $M(1; 2; 2)$; ә) $N(1; -2; -2)$ нүктесінде жанайтын жазықтықтың теңдеуін құрыңдар.

392. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 12)^2 = 169$ сферасы координаталар басынан өтеді. Осы сфераға координаталар басы арқылы өтетін жанама жазықтықтың теңдеуін жазыңдар.

393. Шардың диаметрінің ұштарынан оны жанайтын жазықтыққа дейінгі қашықтықтар 6 см және 4 см. Шардың радиусын табыңдар.

394. Радиустары 16 см және 9 см-ге тең екі шар C нүктесінде жанасады, AB – олардың ортақ жанамасы (A мен B – жанасу нүктелері). Осы шарлардың ортақ CM жанамасы AB түзуін M нүктесінде қияды (149-сурет). CM қашықтығын табыңдар.



149-сурет

395. Радиусы 3 см-ге тең шар екі параллель жазықтықты A және B нүктелерінде жанайды. AB кесіндісінің ортасы арқылы AB түзуімен $60°$ бұрыш құрайтын түзу жүргізілген. Осы түзудің берілген жазықтықтардың арасындағы кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

396. а) Радиустары 7 дм-ге және 1 дм-ге тең екі шар жанасады, AB – олардың ортақ жанамасы (A мен B – жанасу нүктелері). AB қашықтығын табыңдар.

ә) Радиустары 8 см-ге және 12 см-ге тең жанасатын екі шар жазықтықта жатыр. Шарлардың жанасу нүктесінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

397. Центрлерінің арақашықтығы 8 см, 9 см, 10 см болатын үш шар қос-қостан жанасады. Осы шарлардың диаметрлерін табыңдар.

398. Өзара перпендикуляр екі жазықтықпен жанасатын шардың центрі осы жазықтықтардың ортақ түзуінен 8 см қашықтықта жатыр. Шардың радиусын табыңдар.

В деңгейі

399. X қаласы солтүстік ендіктің $60°$-да орналасқан. Осы қаланың Жердің өз осінен айналу нәтижесінде бір тәулікте өтетін жолының ұзындығын табыңдар. Жердің радиусын 6370 км-ге тең деп санаңдар. Жауабын 10 км-ге дейінгі дәлдікпен дөңгелектеңдер.

400. Табаны $6\sqrt{2}$ см-ге және төбесіндегі бұрышы $45°$-қа тең болатын теңбүйірлі үшбұрыштың төбелері арқылы сфера өтеді. Сфераның центрінен үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтық 8 см-ге тең. Сфераның радиусын табыңдар.

401. а) Радиусы 10 см-ге тең сфера $ABCD$ параллелограмының A, B, D төбелері арқылы өтеді. $AD = BD = 10$ см, $\angle BCD = 45°$ болса, сфераның центрінен параллелограмның жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) Сфера қабырғасы 12 см-ге, бұрышы $60°$-қа тең ромбының үш төбесі арқылы өтеді. Сфераның радиусы 8 см болса, сфераның центрінен ромбының төртінші төбесіне дейінгі қашықтықты табыңдар.

402. а) Радиусы R-ге тең шардың центрі екіжақты тік бұрыштың ішінде жатыр. Шар осы бұрыштың бір жағымен жанасады, ал екінші жағының жазықтығымен қиылысады. Пайда болған қиманың диаметрі R-ге тең болса, шардың центрінен екіжақты бұрыштың қырына дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) $120°$-қа тең екіжақты бұрыштың жақтарымен жанасатын сфераның центрі оның қырынан b см қашықтықта орналасқан. Сфераның радиусын табыңдар.

403. а) Сфера қабырғалары 6 см, 8 см, 10 см болатын үшбұрыштың жазықтығымен оған сырттай сызылған шеңбердің центрінде жанасады. Егер сфераның радиусы 12 см-ге тең болса, сфераның центрінен үшбұрыштың төбелеріне дейінгі қашықтықты табыңдар.

ә) Сфера қабырғалары 3 см, 4 см, 5 см болатын үшбұрыштың жазықтығымен оған іштей сызылған шеңбердің центрінде жанасады. Сфераның радиусы 2,4 см-ге тең болса, сфераның центрінен үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықты табыңдар.

404. Сфера ABC үшбұрышының қабырғаларымен жанасады. Сфераның центрі осы үшбұрыштың жазықтығында жатса және $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см болса, сфераның радиусын табыңдар.

405. а) Ромбының $6\sqrt{2}$ см-ге тең әрбір қабырғасы радиусы 5 см-ге тең шармен жанасады. Ромбының жазықтығы шардың центрінен 4 см қашықтықта болса, ромбының ауданын табыңдар.

ә) Ромбының диагональдары 15 см және 20 см. Радиусы 10 см-ге тең сфера ромбының барлық қабырғаларын жанайды. Сфераның центрінен ромбының жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

С деңгейі

406. а) Егер екі сфераның үш ортақ нүктесі бар болса, онда олар сфералардың центрлері арқылы өтетін түзуге перпендикуляр жазықтықта жататын шеңбер бойымен қиылысатынын дәлелдеңдер. ә) Радиустары 50 мм және 58 мм-ге, ал центрлерінің арақашықтығы 72 мм-ге тең сфералардың қиылысу сызығының ұзындығын табыңдар.

407. а) Шардың AB мен CD хордалары M нүктесінде қиылысатын болса, онда $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ болатынын дәлелдеңдер. ә) Радиусы $\sqrt{41}$ см-ге тең сфераны екі перпендикуляр жазықтық ортақ хордасы 6 см болатын өзара тең шеңберлер бойымен қияды. Осы шеңберлердің радиустарын табыңдар.

408. C нүктесі арқылы сфераға CM жанамасы (M – жанасу нүктесі) және сфераны A мен B нүктелерінде қиятын түзу жүргізілсе, онда $CM^2 = CA \cdot CB$ болатынын дәлелдеңдер.

409. Ішкі диаметрі 5 дм-ге тең жарты сфера пішінді ыдысқа 1 дм деңгейінде су құйылған. Ыдысты ішіндегі суы төгілмейтіндей еңкейткенде шыққан көлбеулік бұрышының мүмкін болатын мәндер жиынын табыңдар.

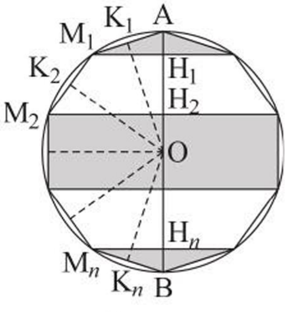
19. Шар бетінің ауданы

Тақырыпты оқу барысында:

• шар бетінің ауданы (сфераның ауданы) ұғымын білетін боласыңдар;

• шар беті ауданының формуласын білесіңдер;

• оны есептер шығаруда қолданасыңдар.



150-сурет

Дөңгелекке іштей сызылған, қабырғаларының саны жұп болатын дұрыс көпбұрышты қарастырайық. Осы көпбұрышты оның ең үлкен диагоналі жататын дөңгелектің симметрия осінен айналдырғанда, шардың ішінде жататын дене шығады (150-сурет). Осы дененің беті конустардың, қиық конустардың және цилиндрдің бүйір бетінен тұрады. Көпбұрыштың қабырғаларының санын шексіз еселеп арттырғанда осы айналу денесі бетінің ауданы қандай да бір шамаға ұмтылады. Осы шаманы шар бетінің ауданы деп қабылдайды. Шар бетінің ауданын оның шекарасы болатын **сфераның ауданы** деп атайды.

Радиусы *R*-ге тең шар бетінің ауданы (сфераның ауданы):

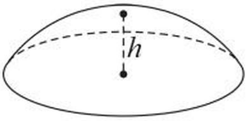
$$\boldsymbol{S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2}.$$

Осы формуланы қорытып шығарайық. Шар радиусы R-ге тең дөңгелекті өзінің AB диаметрінен айналдырғанда пайда болсын. Шардың үлкен дөңгелегіне іштей жұп сан болатын n қабырғалы дұрыс көпбұрыш сызайық (150-сурет). Оның AB түзуінің бір жағында жататын $M_1, M_2, M_3, \dots M_n$ төбелерінен AB диаметріне ($M_1H_1 \perp AB, \dots M_nH_n \perp AB$) перпендикулярларын жүргіземіз. AB түзуінен айналдырғанда көпбұрыштың қабырғалары конустың немесе қиық конустың, немесе цилиндрдің бүйір беттерін сызады. Шеңбердің центрінен көпбұрыштың қабырғаларына $OK_1, OK_2, \dots OK_n$ перпендикулярларын жүргіземіз. Осы перпендикулярлардың барлықтарының ұзындықтары тең, $OK_1 = OK_2 = \dots = OK_n = d$ болсын. Конустың және қиық конустың бүйір бетінің $S_{\text{б.б.}} = 2\pi hd$ формуласын пайдаланып, айналу денесі бетінің S ауданын аламыз:

$$S = 2\pi d(AH_1 + H_1H_2 + \dots + H_nB) = 2\pi d \cdot AB.$$

Қарастырылып отырған көпбұрыштың қабырғаларының n санын шексіз өсіргенде d-ның мәні R-ге, ал $2\pi d \cdot AB$ өрнегінің мәні $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ мәніне ұмтылады. Демек, $S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2$.

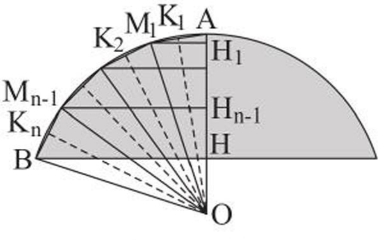
Шардың сегменті деп шардан жазықтықпен қиылған бет аталады, ал шардың осы жазықтықпен қимасы шардың сегментінің табаны деп аталады. Шардың сегментінің биіктігі деп диаметрдің ұшынан оның табанына жүргізілген перпендикуляр аталады. Шардың сегментінің барлық бетінің оның табанынсыз бөлігін *сфералық сегмент* деп атайды (151-сурет).



151-сурет

1 - е с е п. Сфералық сегменттің ауданы $\boldsymbol{S_{\text{сегм.}} = 2\pi Rh}$ болатынын дәлелдеу керек, мұндағы h – сегменттің биіктігі, R – осы сегментті қамтитын сфераның радиусы.

Ш е ш у і. Мұндай сегмент AB доғасын оның $AH = h$ биіктігінен айналдырғанда шыққан болсын, O – осы доғаны қамтитын шеңбердің центрі. AB доғасын тең n бөлікке бөліп, $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ сынық сызығын салайық. Шеңбердің центрінен сынық сызықтың буындарына OK_1, OK_2, … OK_n перпендикулярларын жүргіземіз (152-сурет).



152-сурет

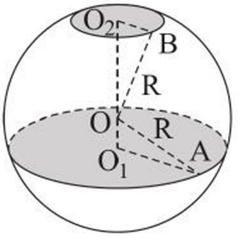
Осы перпендикулярлардың барлықтарының ұзындықтары тең, $OK_1 = OK_2 = \dots = OK_n = d$ болсын. Конустың және қиық конустың бүйір беті аудандарының формулаларын пайдаланып, сынық сызықты айналдырғанда шыққан беттің S ауданын аламыз:

$$S = 2\pi d \cdot (AH_1 + H_1H_2 + \dots + H_{n-1}H) = 2\pi d \cdot h.$$

Сынық сызықтың буындарының n санын шексіз көбейткенде, d-ның мәні R-ге, ал $2\pi dh$ өрнегінің мәні $2\pi Rh$ мәніне ұмтылады. Демек, $S_{\text{сегм.}} = 2\pi Rh$ болады. Дәлелденді.

2 - е с е п. Шарда радиустары 7 см және 2 см болатын екі параллель қима жүргізілген. Осы қималардың арақашықтығы 9 см-ге тең болса, шар бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. O – шардың центрі, O_1, O_2 шардың қимасы болатын дөңгелектердің центрлері болсын. O нүктесі O_1O_2 кесіндісіне тиісті және $O_1A = 7$ см, $O_2B = 2$ см, $OB = OA = R$, $OO_2 = x$ см болсын, сонда $OO_1 = (9 - x)$ см болады (153-сурет).

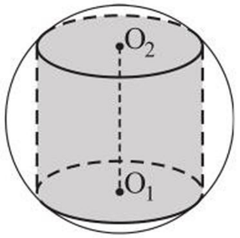


153-сурет

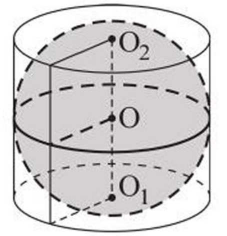
Тікбұрышты BO_2O мен AO_1O үшбұрыштарынан мынаны аламыз: $R^2 = x^2 + 4$ және $R^2 = (9 - x)^2 + 49$. $x^2 + 4 = (9 - x)^2 + 49$ теңдеуін шешіп, $x = 7$ аламыз. Сонда $R^2 = 53$, $4\pi R^2 = 212\pi$ (см^2) болады.

Ж а у а б ы. 212π см^2.

Цилиндрдің табан шеңберлері шардың бетінде жатса, онда *цилиндр шарға іштей сызылған* (ал шар цилиндрге сырттай сызылған) деп аталады. Кез келген цилиндрге сырттай шар сызуға болады, бұл ретте цилиндрдің осі – шардың осі, ал оның ортасы шардың центрі болады (154-сурет).



154-сурет

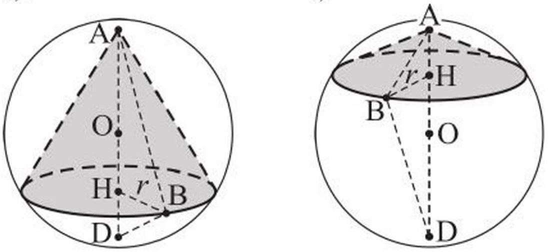


155-сурет

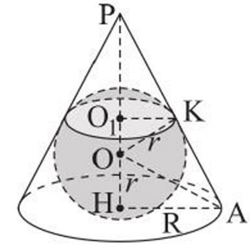
Цилиндрдің табандары мен әрбір жасаушысы шармен жанасса, онда *цилиндр шарға сырттай сызылған* (немесе шар цилиндрге іштей сызылған) деп аталады. Шарға сырттай тек теңқабырғалы цилиндр сызуға болады, бұл ретте цилиндрдің осі шардың осі, ал оның ортасы шардың центрі болады (155-сурет).

Конустың төбесі мен табан шеңбері шардың бетінде жатса, онда *конус шарға іштей сызылған* (ал шар конусқа сырттай сызылған) деп аталады. Мұндай конустың осьтік қимасы – шардың үлкен дөңгелегіне іштей сызылған теңбүйірлі үшбұрыш, ал шардың центрі конустың биіктігін қамтитын түзуге тиісті болады (156-сурет).

а) *ә)*



156-сурет

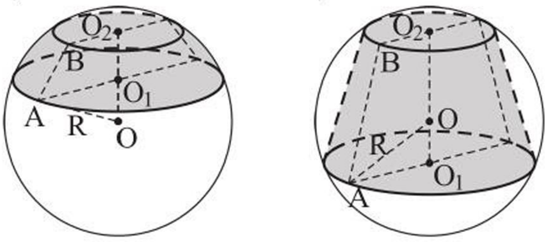


157-сурет

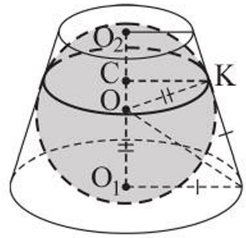
Конустың табаны мен әрбір жасаушысы шардың бетімен жанасса, онда *конус шарға сырттай сызылған* (немесе шар конусқа іштей сызылған) деп аталады. Шар конустың бүйір бетін шеңбер бойымен жанайтынын атап өтейік, мұнда шеңбердің центрі шардың центрі болмайды. Мысалы, 157-суретте O нүктесі – шардың центрі, OK – жанасу нүктесіне жүргізілген шардың радиусы, O_1 – шар мен конустың бүйір бетінің жанасатын шеңберінің центрі. Конусқа іштей сызылған шардың центрі – конус биіктігінің конустың жасаушысы мен табан радиусының арасындағы бұрышының биссектрисасымен қиылысу нүктесі.

Қиық конустың табандарының шеңберлері шардың бетінде жатса, онда ол *қиық конус шарға іштей сызылған* (немесе шар қиық конусқа сырттай сызылған) деп аталады (158-сурет). Бұл ретте конустың остік қимасы шардың үлкен дөңгелегіне іштей сызылған теңбүйірлі трапеция болады. Кез келген теңбүйірлі трапецияны дөңгелекке іштей сызуға болатындықтан, кез келген қиық конусты шарға іштей сызуға болады. Бұл шардың центрі қиық конустың табандарының центрлерін қамтитын түзуде жатады.

а) *ә)*



158-сурет

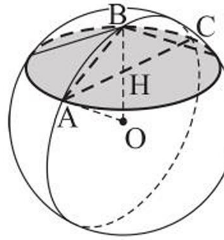


159-сурет

Қиық конустың табандары мен әрбір жасаушысы шардың бетімен жанасса, онда *қиық конус шарға сырттай сызылған* (ал шар қиық конусқа іштей сызылған) деп аталады. Бұл ретте мұндай конустың остік қимасы шардың үлкен дөңгелегіне сырттай сызылған теңбүйірлі трапеция болады (159-сурет).

3 - е с е п. Радиусы 2 дм шарға іштей конус сызылған, оның жасаушысы мен биіктігінің арасындағы бұрышы 60°-қа тең. Конустың бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. ΔABC – конустың остік қимасы, AB – оның жасаушысы, BH биіктігі болсын (160-сурет). Шардың O центрі BH биіктігінің созындысында жатады, себебі ABC – доғал бұрыш. Осы остік қимаға сырттай сызылған шеңбер – шардың үлкен дөңгелегінің шеңбері болады. Шардың радиустары $OA = OB = 2$ дм, ал $\angle ABH = 60°$ болғандықтан, ΔABO теңқабырғалы, демек, $AB = 2$ дм, $AH = AB \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$ дм.



160-сурет

Ізделінді аудан: $S = \pi \cdot AH \cdot AB = 2\pi\sqrt{3}$ (дм^2).

Ж а у а б ы. $2\pi\sqrt{3}$ дм^2.

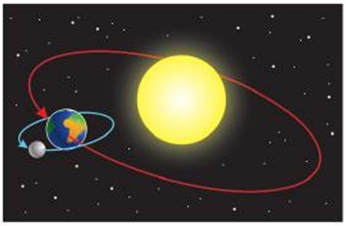
СҰРАҚТАР

1. Шар бетінің ауданын не деп атайды?
2. Шар бетінің ауданын қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

410. а) Шар бетінің ауданы оның үлкен дөңгелегі шеңберінің ұзындығын диаметрге көбейткенге тең деген ақиқат па? ә) Шардың диаметрін 3 есе үлкейтсе, шар бетінің ауданы қалай өзгереді?



Жер мен Айдың Күнді айналуы

411. Диаметрі 8 см-ге тең жарты шар пішіндес кесе бетінің ауданы неге тең?

412. Айдың диаметрі Жер диаметрінің $\frac{3}{11}$-ін құрайды. Жер беті ауданының Ай бетінің ауданына қатынасын табыңдар, оларды шар деп есептеңдер.

413. Сфера мен жазықтықтың қиылысу сызығының ұзындығы 8π см-ге, ал сфераның центрінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтық 5 см-ге тең. Сфераның ауданын табыңдар.

414. а) Әрқайсысының диаметрі 5 см-ге тең екі шарды никельдеуге көп материал жұмсала ма, әлде әрқайсысының диаметрі 2 см-ге тең он шарды никельдеуге ме?
ә) Әрқайсысының диаметрі 1 дм-ге тең екі сфера бетінің ауданы үлкен бе, әлде қыры 2 дм-ге тең дұрыс тетраэдрдің толық бетінің ауданы үлкен бе?

Нұр Әлем, Нұр-Сұлтан қ.

415. Әлемдегі ең үлкен «Нұр Әлем» сфералық ғимаратының диаметрі 80 м-ге тең. Осы сфераның ауданын 1 $м^2$-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар, $\pi \approx 3{,}1416$ деп есептеңдер.

416. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 10$ теңдеуімен берілген. Сфераның ауданын табыңдар.

417. Шар периметрі 18 см-ге тең дұрыс үшбұрыштың барлық қабырғаларын жанайды. Шардың центрінен үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтық 3 см-ге тең болса, шар бетінің ауданын табыңдар.

418. а) Сфера ABC үшбұрышының қабырғаларымен жанасады және сфераның центрі ABC жазықтығына тиісті. $AB = BC = 15$ см, $AC = 24$ см болса, сфераның ауданын табыңдар.
ә) Ромбының $6\sqrt{2}$ см-ге тең әр қабырғасы шармен жанасады, ал ромбының жазықтығы шардың центрінен 4 см қашықтықта орналасқан. Ромбының ауданы $36\sqrt{2}$ см^2-ге тең болса, шар бетінің ауданын табыңдар.

419. а) Теңқабырғалы конустың толық бетінің ауданы диаметрі конустың биіктігіне тең сфераның ауданына тең екенін дәлелдеңдер.
ә) Диаметрлері тікбұрышты үшбұрыштың катеттеріне тең сфералардың аудандарының қосындысы диаметрі осы үшбұрыштың гипотенузасына тең сфераның ауданына тең екенін дәлелдеңдер.

420. Радиусы r-ге тең шар цилиндрге іштей сызылған. Осы цилиндрге сырттай сызылған шардың радиусын табыңдар.

421. Биіктігі 8 см-ге тең цилиндрге сырттай шар сызылған. Шардың радиусы мен цилиндрдің табан радиусының айырымы 2 см-ге тең болса, шардың үлкен дөңгелегінің ауданын табыңдар.

422. Іштей шар сызуға болатын қиық конус берілген. Оның биіктігі 6 см-ге, бір табанының диаметрі 9 см-ге тең. Екінші табанының диаметрін табыңдар.

423. а) Радиусы r-ге тең шар конусқа іштей сызылған. Конустың жасаушысы табан жазықтығына φ бұрышпен көлбеген. Конустың табанының ауданын табыңдар. ә) Конусқа шар іштей сызылған және оның жасаушыларымен жанасу нүктелері арқылы шардың жазықтықпен қимасы жүргізілген. Конустың табанының радиусы R-ге тең, ал жасаушысы табанымен $45°$ бұрыш жасаса, конустың төбесінен қима жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

424. Табан радиустары 9 дм және 6 дм болатын қиық конусқа іштей шар сызылған. Қиық конустың жасаушысының оның төменгі табан жазықтығымен жасайтын бұрышын табыңдар.

В деңгейі

425. Толық бетінің ауданы 3 дм^2-ге тең теңқабырғалы цилиндрге сырттай сызылған сфераның ауданын табыңдар.

426. Радиусын 1 дм-ге үлкейткенде толық бетінің ауданы 20π дм^2-ге артатын шардың радиусын табыңдар.

427. Теңқабырғалы конустың толық бетінің ауданы диаметрі конустың биіктігіне тең сфераның ауданына тең болатынын дәлелдеңдер.

428. Конусқа сырттай үлкен дөңгелегінің ауданы 4π см^2-ге тең шар сызылған. Конустың жасаушысы табан жазықтығына $30°$ бұрышпен көлбеген болса, конусқа іштей сызылған шардың радиусын табыңдар.

429. Цилиндрге сырттай радиусы R-ге тең шар сызылған. Цилиндрдің осьтік қимасының диагоналі оның табан жазықтығына φ бұрышпен көлбеген. Цилиндрдің биіктігін табыңдар.

C деңгейі

430. а) Толық бетінің ауданы S-ке тең кубқа; ә) толық бетінің ауданы Q-ға тең болатын теңқабырғалы конусқа іштей сызылған шар бетінің ауданын табыңдар.

431. Конусқа радиусы R-ге тең сфера іштей сызылған. Осы сфераның конустың бүйір бетімен жанасу шеңбері сфераға іштей сызылған цилиндрдің табанының шеңбері болады. Конустың жасаушысы оның табан жазықтығына β бұрышпен көлбеген болса, цилиндрдің осьтік қимасының ауданын табыңдар.

432. Биіктігі 14 см-ге тең цилиндрге іштей шар сызылған. Шардың арақашықтығы 10 см болатын цилиндрдің екі жасаушысы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының радиусын табыңдар.

20. «Айналу денелері және олардың элементтері» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

433. а) Дұрыс үшбұрышты призмаға сырттай цилиндр сызылған. Призманың биіктігі 24 см-ге, ал бүйір жағының диагоналі 26 см-ге тең. Цилиндрдің табанының радиусын табыңдар.

ә) Барлық қырлары a-ға тең дұрыс үшбұрышты призма цилиндрге іштей сызылған. Цилиндрдің осьтік қимасының ауданын табыңдар.

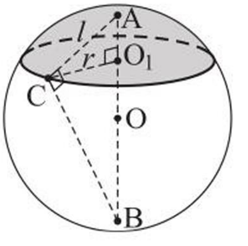
434. Осьтік қимасына іштей шеңбер сызылған конус берілген. Конустың биіктігі осы шеңбердің радиусынан 4 есе үлкен. Конустың жасаушысы 9 см-ге тең болса, конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

435. Радиусы R-ге тең шарға іштей конус сызылған, оның биіктігі мен жасаушысының арасындағы бұрышы α-ға тең. Конустың биіктігін табыңдар.

436. Тетраэдр берілген және оған іштей конус сызуға болады. Тетраэдрдің табан қабырғалары 6,5 см, 7 см, 7,5 см, ал конустың жасаушысы табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Осы тетраэдрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

В деңгейі

437. 161-суретті пайдаланып, шар сегментінің ауданы дөңгелектің $S = \pi l^2$ ауданына тең болатынын дәлелдеңдер, мұндағы l радиусы – сегменттің төбесінен оның табаны болатын шеңберге жүргізілген кесінді (Архимедтің есебі).



161-сурет

438. Радиусы 10 см шарға іштей конус сызылған, ал оған іштей сызылған пирамиданың табаны – гипотенузасы 19,2 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш. Осы пирамиданың биіктігін табыңдар.

439. Конусқа сырттай шар, ал іштей дұрыс үшбұрышты пирамида сызылған, пирамиданың табан қабырғасы $12\sqrt{3}$ см-ге, ал бүйір қыры 20 см-ге тең. Шардың радиусын табыңдар.

440. а) Цилиндрге іштей тікбұрышты параллелепипед сызылған, оның табан қабырғалары 9 см және 12 см, ал бүйір қыры 20 см. Цилиндрдің жасаушысын, табанының радиусын, осьтік қимасының диагоналін табыңдар.

ә) Цилиндрге бүйір жағы шаршы болатын дұрыс алтыбұрышты призма іштей сызылған. Призманың бүйір жағының диагоналі мен цилиндр осінің арасындағы бұрышты табыңдар.

441. Биіктігі 8 дм-ге, табан радиусы 6 дм-ге тең конусқа іштей сызылған цилиндрдің бүйір бетінің ең үлкен ауданын табыңдар.

С деңгейі

442. Цилиндр осімен 45° бұрыш жасайтын жазықтық осьті 1 : 3 қатынасына бөледі. Цилиндрдің биіктігі $4\sqrt{2}$ см-ге тең болса, цилиндрге іштей сызылған шардың осы жазықтықпен қимасының радиусын табыңдар.

443. Конусқа іштей дұрыс үшбұрышты пирамида сызылған, оның биіктігі 20 см-ге, ал осы биіктіктің табанынан пирамиданың бүйір жағының жазықтығына дейінгі қашықтық 12 см-ге тең. Осы конусқа сырттай сызылған сфераның радиусын табыңдар.

444. b-ға тең бүйір қыры табан жазықтығына α бұрышпен көлбеген дұрыс үшбұрышты пирамидаға іштей сызылған теңқабырғалы цилиндрдің биіктігін табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

445. Цилиндрдің осьтік қимасы – ауданы 1 дм^2-ге тең шаршы. Сонда цилиндрдің табанының ауданы неге тең?

1) $0{,}25\pi$ дм^2;
2) 0,8 дм^2;
3) 1 дм^2;
4) $0{,}5\pi$ дм^2;
5) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ дм^2.

446. Цилиндрдің биіктігі 6 см, ал табанының радиусы 5 см. Сонда цилиндрдің осіне параллель және одан 4 см қашықтықта өтетін цилиндрдің қимасының ауданы неге тең?

1) $30\sqrt{2}$ см^2;
2) $24\sqrt{3}$ см^2;
3) 24 см^2;
4) 36 см^2;
5) 30 см^2.

447. Теңқабырғалы цилиндрдің жоғарғы табан шеңберінің нүктесі төменгі табан шеңберінің нүктесімен кесінді арқылы қосылған, ал осы нүктелерге жүргізілген шеңберлердің радиустарының арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Сонда цилиндрдің осімен осы кесіндіні қамтитын түзудің арасындағы бұрыштың тангенсі неге тең?

1) 1;

2) $\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{3}$;

4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) 2.

448. Теңқабырғалы цилиндрдің бүйір бетінің ауданы радиусы 1,5 дм-ге тең шар бетінің ауданына тең болуы үшін цилиндрдің табанының радиусы қандай болу керек?

1) 1 дм;

2) 2 дм;

3) 1,5 дм;

4) $\sqrt{\pi}$ дм;

5) 0,5 дм.

449. Цилиндрдің табанының ауданы 8 дм^2-ге, ал остік қимасының ауданы 16 дм^2-ге тең. Цилиндрдің толық бетінің ауданы неге тең?

1) 16π дм^2;

2) $8(\pi + 2)$ дм^2;

3) $16(\pi + 1)$ дм^2;

4) 48 дм^2;

5) 65 дм^2.

450. Биіктігі b-ға тең цилиндрдің осіне параллель екі қима жүргізілген, оның біреуі – $ABCD$ шаршысы, екіншісі – қабырғалары b мен $2b$-ға тең $ABKH$ тіктөртбұрышы, қима жазықтықтарының арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Сонда C нүктесінен ABK жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) b;

2) $0{,}5b$;

3) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$;

4) $b\sqrt{3}$;

5) $1{,}5b$.

451. Биіктігі табанының диаметріне тең ағаш цилиндрден радиусы ең үлкен болатын шар жонылып алынған. Цилиндрдің бетінің ауданы шар бетінің ауданынан қанша пайызға үлкен?

1) $33\frac{1}{3}$ %;

2) 20 %;

3) 10 %;

4) ≈ 66 %;

5) ≈ 11 %.

452. Конустың табанының ауданы 1 м^2-ге тең, ал жасаушысы табанына 60° бұрышпен көлбеген. Конустың бүйір бетінің ауданы неге тең?

1) 2 м^2;

2) 1 м^2;

3) 1,5 м^2;

4) $\sqrt{3}$ м^2;

5) $0{,}75\sqrt{3}$ м^2.

453. Теңқабырғалы конустың табанының радиусы $\sqrt{3}$ дм-ге тең. Сонда конустың оның арасындағы бұрышы 60°-қа тең екі жасаушысын қамтитын қимасының ауданы неге тең?

1) 3 дм^2;
2) $3\sqrt{3}$ дм^2;
3) $2\sqrt{3}$ дм^2;
4) 5 дм^2;
5) $1{,}5\sqrt{3}$ дм^2.

454. Конустың биіктігінің ортасынан оның жасаушысына параллель және конустың бетін *A* мен *B* нүктелерінде қиятын түзу жүргізілген. Жасаушының ұзындығы 10 см-ге тең болса, *AB* кесіндісінің ұзындығы неге тең?

1) 6,5 см;
2) 8 см;
3) 5,5 см;
4) 5 см;
5) 7,5 см.

455. Конустың биіктігі 20 см-ге, ал табанының радиусы 25 см-ге тең. Конустың төбесін қамтитын қима оның табанының центрінен 12 см қашықтықта орналасқан. Осы қиманың ауданы неге тең?

1) 6 дм^2;
2) 10 дм^2;
3) 5 дм^2;
4) $5\sqrt{2}$ дм^2;
5) $3\sqrt{2}$ дм^2.

456. Қиық конустың табандарының аудандары 4 дм^2 және 16 дм^2. Оның биіктігінің ортасынан табанына параллель қима жүргізілген. Сонда қиманың ауданы неге тең?

1) 8 дм^2;
2) 10 дм^2;
3) 6 дм^2;
4) 9 дм^2;
5) 7 дм^2.

457. Радиусы 13 см-ге тең шардың бетінде арақашықтықтары 6 см, 8 см, 10 см болатын үш нүкте берілген. Сонда шардың центрінен осы үш нүктеден өтетін жазықтыққа дейінгі қашықтық неге тең?

1) 10 см;
2) 12 см;
3) 6 см;
4) 8 см;
5) 7 см.

458. Радиусы 3 дм-ге тең шар қабырғасы 6 дм-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың барлық қабырғаларымен жанасады. Сонда шардың центрінен үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтық неге тең?

1) 2,5 дм;
2) 3 дм;
3) $\sqrt{6}$ дм;
4) $2\sqrt{2}$ дм;
5) $\sqrt{5}$ дм.

459. Ромбының диагональдары 15 см және 20 см. Сфера ромбының барлық қабырғаларымен жанасады. Сфераның центрінен ромбының жазықтығына дейінгі қашықтық 8 см-ге тең болса, онда сфераның радиусы неге тең?

1) 10 см;
2) $8\sqrt{2}$ см;
3) 8,75 см;
4) 9 см;
5) 12 см.

460. Сфераның радиусы 7 см. Сфераның екі перпендикуляр жазықтықпен қимасы – екі тең шеңбер, олардың ортақ хордасының ұзындығы 2 см-ге тең. Осы шеңберлердің радиустары неге тең?

1) 6 см;
2) 4,5 см;
3) $3\sqrt{2}$ см;
4) 5 см;
5) $4\sqrt{2}$ см.

461. Конустың осьтік қимасының төбесіндегі бұрышы 2α, ал оның биіктігі $\sqrt{2}$-ге тең. Конустың арасындағы бұрышы 30°-қа тең екі жасаушысын қамтитын жазықтықпен қимасының ауданы неге тең?

1) $0{,}5\cos^{-2}\alpha$;
2) $0{,}5\cos^{-1}\alpha$;
3) $0{,}5\cos\alpha$;
4) $\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\alpha}$;
5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos^2\alpha}$.

462. Теңқабырғалы конусқа іштей дұрыс алтыбұрышты пирамида сызылған. Оның табан қырындағы екіжақты бұрышы неге тең?

1) arcctg 2;
2) arcsin 0,5;
3) arccos 0,5;
4) arctg 2;
5) arctg 3.

463. Табандарының радиустары 2 дм-ге және 1 дм-ге тең, ал жасаушысы табанына 45° бұрышпен көлбеген қиық конусқа сырттай сфера сызылған. Сонда осы сфераның радиусы неге тең?

1) $\sqrt{5}$ дм;
2) $2\sqrt{5}$ дм;
3) $\sqrt{10}$ дм;
4) $2\sqrt{2}$ дм;
5) 5 дм.

Жаттығуларды орындаңдар

464. Теңқабырғалы цилиндр берілген. Оның толық бетінің ауданын цилиндрдің табанының R радиусы арқылы өрнектеңдер.

465. Цилиндрдің төменгі табанының 6 дм-ге тең хордасы оның центрінен 4 дм, ал жоғарғы табанының центрінен 5 дм қашықтықта орналасқан. Цилиндрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

466. Конустың $6\sqrt{3}$ см-ге тең жасаушысы табан жазықтығымен $60°$ бұрыш жасайды. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

467. Биіктігі $2\sqrt{3}$ см-ге тең болатын теңқабырғалы конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

468. Конустың остік қимасының төбесіндегі бұрышы $60°$-қа тең. Конустың бүйір беті жазбасының центрлік бұрышын табыңдар.

469. Қиық конустың табандарының радиустары 2 см-ге және 4 см-ге тең. Қиық конустың табандарына параллель және биіктігінің ортасы арқылы өтетін жазықтықпен қимасының ауданын табыңдар.

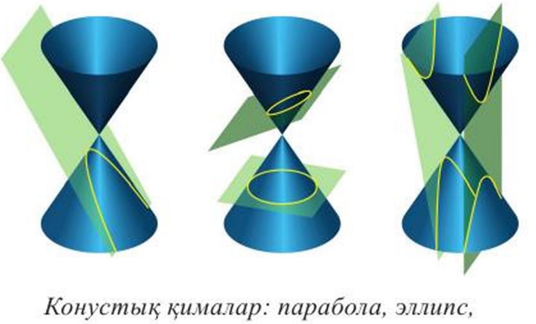
470. Қиық конустың табандарындағы радиустарының қатынасы $1 : 3$, биіктігі 8 см-ге тең, ал жасаушысы төменгі табанымен $45°$ бұрыш жасайды. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

471. Радиусы 6 см-ге тең шар қабырғасы $4\sqrt{3}$ см-ге тең теңқабырғалы үшбұрыштың барлық қабырғаларымен жанасады. Шардың центрінен осы үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты табыңдар.

472. Шаршыны оның a-ға тең қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің толық бетінің ауданы мен радиусы a-ға тең сфераның ауданын салыстырыңдар.

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Аполлоний Пергский



Конустық қималар: парабола, эллипс, гипербола

Айналу денелері мен олардың қасиеттерін ежелгі грек оқымыстылары Евклид, Архимед, Аполлоний тағы басқалары зерттеген. Бұл ретте денелердің қималары да қарастырылған болатын. Мысалы, Аполлоний Пергский (б. д. д. 262–190 жж.) «Конустық қималар» деп аталатын үлкен еңбегін арнаған. Тарихи деректер бойынша цилиндрдің, конустың, қиық конустың және шардың беттері аудандарының формулаларын алғаш рет Архимед қорытып шығарған және оның нәтижесін «Шар мен цилиндр туралы» еңбегінде баяндаған.

Ғаламторды пайдаланып:

1) цилиндр ұғымын Евклид қалай анықтағаны;

2) конустың бүйір беті ауданының формуласын Архимед қалай жазғаны;

3) Ежелгі Мысырда себет бетінің ауданын қалай тапқаны («Мәскеу математикалық папирусының» есебі) туралы деректерді табыңдар.

IV. ДЕНЕЛЕРДІҢ КӨЛЕМДЕРІ

Бөлімді оқу нәтижесінде

- дененің көлемі ұғымын;
- денелердің көлемдерінің қасиеттерін;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың, цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың және оның бөліктерінің көлемдерінің формулаларын **білу керек.**

- кеңістіктегі денелердің көлемдерінің қасиеттерін қолдана алу;
- призманың, пирамиданың, қиық пирамиданың, цилиндрдің, конустың, қиық конустың, шардың және оның бөліктерінің көлемдерінің формулаларын есептер шығаруда, оның ішінде геометриялық денелердің комбинацияларына есептер шығаруда қолдана **алу керек.**

21. Денелер көлемдерінің жалпы қасиеттері. Призманың көлемі

Тақырыпты оқу барысында:

• дененің көлемі ұғымын және оның қасиеттерін білесіңдер;

• тік және көлбеу призмалардың көлемдерінің формулаларын білесіңдер;

• призмалардың көлемдерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.

Кейбір денелердің көлемдері ұғымымен сендер таныссыңдар, мысалы, тікбұрышты параллелепипедтің көлемінің формуласын, көлем бірліктерін білесіңдер. **Дененің көлемі** деп келесі **қасиеттер** (аксиомалар) орындалатын оң шама аталады:

1) *тең денелердің көлемдері тең;*

2) *егер дене саны ақырлы денелерге бөлінсе, онда оның көлемі сол денелердің көлемдерінің қосындысына тең;*

3) *қыры ұзындық бірлігіне тең кубтың көлемі 1-ге тең.*

Көлемнің негізгі өлшем бірліктері: 1 мм^3, 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3, 1 км^3. 1 дм^3 1 литрге тең болатынын еске сала кетелік.

Көлемнің аксиомаларынан шығатыны:

- егер дене басқа дененің ішінде болса, онда оның көлемі сол дененің көлемінен кіші болады;
- қыры ұзындық бірлігінің $\left(\frac{1}{n}\right)$-іне тең ($n \in N$) кубтың көлемі куб бірлігінің $\left(\frac{1}{n^3}\right)$-іне тең;
- кубтың қырының ұзындығын k есе үлкейткенде оның көлемі k^3 есе үлкейеді.

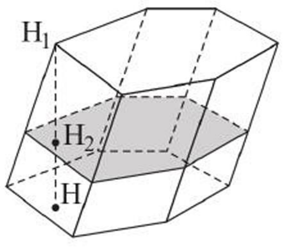
Көлемдері бірдей екі дене **тең шамалы** деп аталады.

Т е о р е м а. **Призманың V көлемі оның табанының S ауданы мен призманың h биіктігінің көбейтіндісіне тең:**

$$\boldsymbol{V = S \cdot h.}$$

Д ә л е л д е у і. Осы формуланы дәлелдеу үшін алгебра және анализ бастамалары курсынан белгілі дененің көлемінің формуласын пайдаланамыз:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

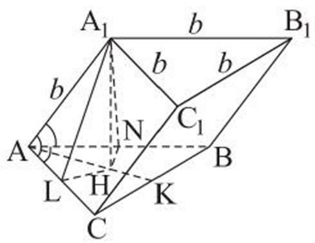


162-сурет

$S(x)$ – призманың табанына параллель және биіктігіне перпендикуляр қайсыбір қимасының ауданы, призманың биіктігі $H_1H = h$, $x = H_1H_2$ болсын (162-сурет). $S(x) = S$ болғандықтан, призманың V көлемі:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh.$$

1 - е с е п. Үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының әрбір қыры b-ға тең, ал A төбесіндегі жазық бұрыштары өзара тең. Призманың көлемін табу керек.



163-сурет

Ш е ш у і. Ізделінді көлем $V = S_{\Delta ABC} \cdot A_1H$, мұндағы A_1H – призманың биіктігі (163-сурет), H нүктесі ΔABC-ның AK биссектрисасында жатыр. Бұл тікбұрышты ALH және ANH үшбұрыштарының теңдігінен шығады, мұндағы HL мен HN, сәйкесінше, AA_1C_1C және ABB_1A_1 жақтарының табан жазықтығына жүргізілген A_1L және A_1N биіктіктерінің проекциялары.

Есептің шарты бойынша A төбесіндегі әрбір жазық бұрыш 60°-қа тең, өйткені ол теңқабырғалы ABC үшбұрышының бұрышына тең. $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. A_1H биіктігін табамыз. ΔA_1AL-ден $AL = \frac{b}{2}$, $A_1L = b \cdot \sin 60° = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ аламыз. ΔALH-тан $LH = AL \cdot \mathrm{tg}\,30° = \frac{b\sqrt{3}}{6}$ аламыз. Сонда ΔA_1HL-ден $A_1H = \sqrt{\frac{3b^2}{4} - \frac{b^2}{12}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ болады. Ізделінді көлем $V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

Ж а у а б ы. $\frac{b^3\sqrt{2}}{4}$.

2 - е с е п. Тікбұрышты параллелепипед пішінді жабық жәшіктің табаны – шаршы, оның толық бетінің ауданы 50 дм^2-ге тең. Жәшіктің өлшемдері қандай болғанда оның көлемі ең үлкен болады?

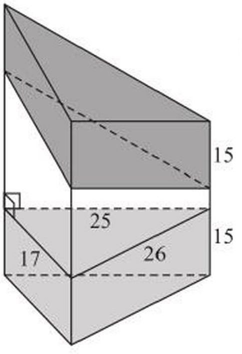
Ш е ш у і. Жәшіктің табан қабырғасы x дм, биіктігі y дм болсын, сонда $2 \cdot x^2 + 4 \cdot xy = 50$ болады. Бұдан $y = \frac{50 - 2x^2}{4x}$, мұндағы $0 < x < 5$. Сонда жәшіктің көлемі: $V = x^2y$, $V = 0{,}5(25x - x^3)$. $V(x) = 0{,}5(25x - x^3)$ функциясының $(0; 5)$ аралығындағы ең үлкен мәнін туынды арқылы зерттейік. $V' = 0{,}5(25 - 3x^2)$. $x_0 = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ болғанда, $V' = 0$; $0 < x < x_0$ болғанда,

$V' > 0$ және $x_0 < x < 5$ болғанда, $V' < 0$ болады. Демек, $V(x)$ функциясы $(0; 5)$ аралығындағы ең үлкен мәнді $x_0 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ болғанда қабылдайды. Сонда $y_0 = \frac{50 - 2x_0^2}{4x_0} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Ж а у а б ы. Жәшік қыры $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ дм-ге тең куб пішінді болғанда, оның көлемі ең үлкен болады.

3 - е с е п. Бүйір қырлары 15 см-ден, ал олардың арақашықтықтары 26 см, 25 см және 17 см болатын үшбұрышты көлбеу призманың көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Берілген көлбеу призма тік призмамен тең шамалас. Тік призманың табаны – көлбеу призманың бүйір қырына перпендикуляр болатын, төбелері оның бүйір қырларын қамтитын түзулерде жататын үшбұрыш, ал биіктігі оның бүйір қыры болады (164-сурет). Осы үшбұрыштың қабырғалары 26 см, 25 см және 17 см, оның ауданын Герон формуласымен есептейік: $S = \sqrt{34 \cdot (34 - 26) \cdot (34 - 25) \cdot (34 - 17)} =$ $= \sqrt{17^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2} = 204$ (см^2). Сонда ізделінді көлем: $V = 204 \cdot 15 = 3060$ (см^3).



164-сурет

Ж а у а б ы. 3060 см^3.

СҰРАҚТАР

1. Денелердің көлемдерінің негізгі қасиеттерін тұжырымдаңдар.

2. Көлемнің негізгі өлшем бірліктерін атаңдар және олардың арасындағы қатынастарды көрсетіңдер.

3. а) Кубтың; ә) тікбұрышты параллелепипедтің; б) призманың көлемінің формуласын жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

473. Екі дене тең шамалы болса, онда олар тең болады деген ақиқат па?

474. Бетінің ауданы 24 см^2-ге тең ағаш кубты өзара тең 8 кубқа бөлді. Бір кішірек кубтың көлемі неге тең?

475. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының көлемі 8 дм^3-ге тең. M және M_1 нүктелері, сәйкесінше, DC және D_1C_1 қырларының орталары. $ADMA_1D_1M_1$ призмасының көлемін табыңдар.

476. Дұрыс төртбұрышты призманың биіктігі 5 дм және толық бетінің ауданы 78 $дм^2$. Призманың көлемін табыңдар.

477. Кірпіштің өлшемдері 25 × 12 × 6 см. Кірпішті қалауға қажет ерітіндінің оның көлемін 15 %-ға арттыратынын ескере отырып, 10000 кірпіштен қаланған қабырғаның көлемін табыңдар.

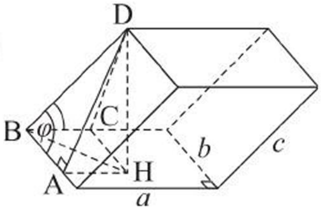
478. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 4 см және 5 см-ге, ал олардың арасындағы бұрышы 45°-қа тең. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы $54\sqrt{2}$ $см^2$-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.

479. Дұрыс алтыбұрышты призманың ең үлкен диагоналі 8 см-ге тең және бүйір қырымен 30° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңдар.

480. Үшбұрышты көлбеу призманың табан қабырғалары 5 м, 6 м және 9 м, ал 10 м-ге тең бүйір қыры табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңдар.

481. Табанының қабырғасы 3 м-ге тең дұрыс төртбұрышты призма пішінді шұңқырды қазғанда, тығыздығы $1{,}8 \cdot 10^3$ кг/$м^3$-ге тең 25 тонна жер шығарылды. Шұңқырдың тереңдігін 0,1 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

482. Тік параллелепипедтің табаны – ромб, оның кіші диагоналі 4 см-ге, ал сүйір бұрышы 60°-қа тең. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы $80\sqrt{3}$ $см^2$-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.



165-сурет

483. Параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қырының ұзындықтары a = 12 см, b = 7 см, c = 10 см. Ұзындықтары a мен b-ға тең қырлары өзара перпендикуляр, ал үшінші қыры олардың әрқайсысымен φ = 60° бұрыш жасайды (165-сурет). Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

В деңгейі

484. Тікбұрышты қаңылтыр табағынан қорап жасау үшін, оның барлық бұрыштарынан тең шаршылар кесіп алып, жиектерін бүкті. Қаңылтыр табағының өлшемдері 60 × 70 см, ал қораптың көлемі 20 $дм^3$ болса, кесілген шаршының қабырғасын табыңдар.

485. Кірпішті кептіріп, күйдіргеннен кейін оның көлемі бастапқы көлемінің 75 %-ын құрайды. Кірпішті күйдірген кезде ол барлық жағынан бірдей кішірейетін болса, ал дайын кірпіштің өлшемдері 25 × 12 × 6 см болса, кірпіштің бастапқы өлшемдері қандай болуы керек?

486. а) Тікбұрышты параллелепипедтің бүйір жақтарының бір төбеден шығатын диагональдары 6 см және 8 см, ал олардың арасындағы бұрышы 60°. Параллелепипедтің көлемін табыңдар.

ә) Табанының периметрі 16 см-ге, толық бетінің ауданы 168 $см^2$-ге, ал көлемі 108 $см^3$-ге тең тікбұрышты параллелепипедтің диагоналін табыңдар.

487. Үшбұрышты призманың бүйір қырларының арақашықтығы 37 см, 13 см және 30 см, ал бүйір бетінің ауданы 480 $см^2$-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.

488. Үшбұрышты призманың бүйір жақтарының бірінің ауданы Q-ға тең, ал осы жағының жазықтығынан оған қарсы жатқан бүйір қырына дейінгі қашықтық d-ға тең. Призманың көлемін табыңдар.

C деңгейі

489. а) Сыбайлас бүйір жақтарының периметрлері 16 см-ге және 24 см-ге тең, бүйір бетінің ауданы ең үлкен болатын тікбұрышты параллелепипедтің көлемін табыңдар.

ә) Табан қабырғаларының қатынасы 3 : 5, кіші бүйір жағының периметрі 36 см-ге тең, көлемі ең үлкен болатын тікбұрышты параллелепипедтің бүйір бетінің ауданын табыңдар.

490. а) Тік параллелепипедтің биіктігі h-қа тең, ал табан қабырғалары – a және b. Параллелепипедтің көлемі ең үлкен болуы үшін оның бүйір қырындағы екіжақты бұрышы неге тең болуы керек? Сол көлемді табыңдар.

ә) Үш өлшемінің қосындысы d-ға тең барлық тікбұрышты параллелепипедтердің ішіндегі көлемі ең үлкен қыры $\frac{d}{3}$-ке тең куб болатынын дәлелдеңдер.

491. а) Табан қабырғаларының қатынасы 1 : 2, көлемі 9 $м^3$-ге тең болатын тікбұрышты параллелепипед пішінді жәшікті қақпағымен жасау керек. Оның толық бетінің ауданы ең кіші болуы үшін жәшіктің өлшемдері қандай болуы керек?

ә) Дұрыс үшбұрышты призманың көлемі 16 $дм^3$-ге тең. Призманың толық бетінің ауданы ең кіші болуы үшін, оның табан қабырғалары мен биіктігі қандай болуы керек?

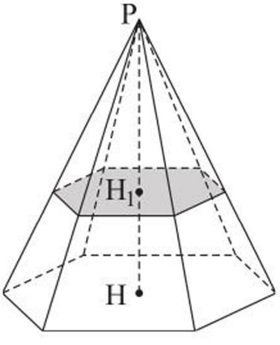
22. Пирамиданың және қиық пирамиданың көлемдері

Тақырыпты оқу барысында:

- пирамида мен қиық пирамиданың көлемдерінің формулаларын білесіңдер;
- әртүрлі пирамидалардың көлемдерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.

Т е о р е м а. **Пирамиданың V көлемі оның табанының S ауданы мен h биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең:**

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h.$$



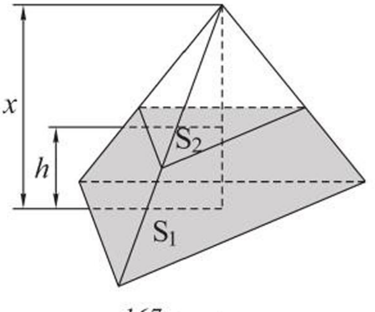
166-сурет

Д ә л е л д е у і. Бұл формуланы денелердің көлемдерінің формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық: $V = \int_a^b S(x)dx$. $S(x)$ – пирамиданың табан жазықтығына параллель және $PH = h$ биіктігіне перпендикуляр қайсыбір жазықтықпен қимасының ауданы, $x = PH_1$ болсын (166-сурет). Мұндай қиманың қасиеті бойынша: $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$, $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$. Сонда пирамиданың V көлемі:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3} Sh.$$

Т е о р е м а. **Қиық пирамиданың V көлемі оның h биіктігінің табандарының S_1, S_2 аудандары мен олардың геометриялық ортасының қосындысына көбейтіндісінің үштен біріне тең:**

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$



167-сурет

Д ә л е л д е у і. Қиық пирамиданы толық пирамидаға дейін толықтырып салайық (167-сурет). Толық пирамиданың биіктігі x-ке тең болсын. Сонда $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$, бұдан $x = \frac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$.

Қиық пирамиданың көлемі біреуінің табанының ауданы S_1, биіктігі x, екіншісінің табанының ауданы S_2, биіктігі $x - h$ болатын екі пирамиданың көлемдерінің айырымына тең. $x - h$ өрнегін түрлендіріп, мынаны аламыз:

$x - h = \frac{h \cdot \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h = \frac{h \cdot \sqrt{S_1} - h\sqrt{S_1} + h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{h \cdot \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$. Қиық пирамиданың көлемін өрнектейік:

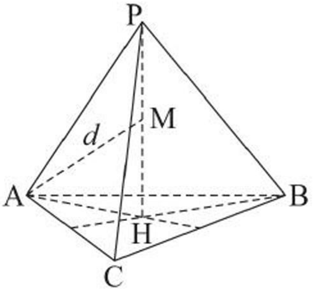
$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) = \frac{1}{3}h \cdot \frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1})^3 - (\sqrt{S_2})^3}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} =$$

$$= \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

1 - е с е п. Дұрыс $PABC$ тетраэдрінің PH биіктігінің ортасындағы M нүктесінен оның A төбесіне дейінгі қашықтық d-ға тең болсын. Тетраэдрдің көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Дұрыс $PABC$ тетраэдрінің қыры a-ға тең болсын (168-сурет), сонда $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$, $MH = \frac{1}{2}PH = \frac{a}{\sqrt{6}}$.



168-сурет

AMH үшбұрышынан мынаны аламыз: $AM^2 = AH^2 + HM^2$, яғни $d^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}$, $d^2 = \frac{a^2}{2}$, $a^2 = 2d^2$, $a = d\sqrt{2}$.

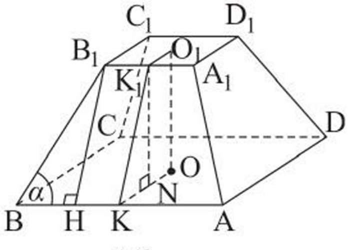
Сонда $S_{\text{таб.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{d^2\sqrt{3}}{2}$, $PH = \frac{2d\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2d}{\sqrt{3}}$.

Демек, $V_{PABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{таб.}} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}d^3$.

Ж а у а б ы. $\frac{1}{3}d^3$.

2 - е с е п. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табан қабырғалары 5 м және 2 м, ал бүйір жағының α сүйір бұрышы 60°-қа тең. Осы қиық пирамиданың көлемін 0,1 $м^3$-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. Берілген $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қиық пирамидасында $AB = 5$ м, $A_1B_1 = 2$ м, $\angle B_1BA = 60°$ болсын (169-сурет).



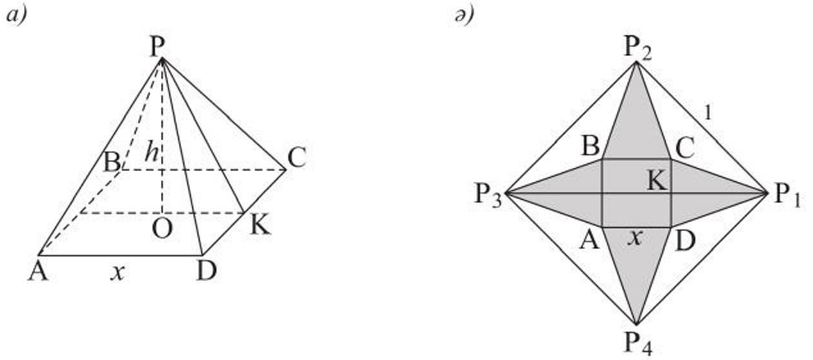
169-сурет

Оның көлемі: $V = \frac{1}{3} \cdot OO_1 \cdot (5^2 + 2^2 + \sqrt{5^2 \cdot 2^2})$, мұндағы O мен O_1 нүктелері – берілген қиық пирамиданың табандарының центрлері.

Тікбұрышты KK_1N және BB_1H үшбұрыштарын қарастырып, OO_1 биіктігін табамыз, мұндағы K мен K_1 – AB мен A_1B_1 қабырғаларының орталары, $K_1N \perp OK$, $B_1H \perp AB$. Дұрыс төртбұрышты қиық пирамиданың табандары шаршылар болғандықтан, $BH = KN = \frac{AB - A_1B_1}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ (см). Сонда $B_1H = K_1K = BH \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $O_1O = K_1N = \sqrt{K_1K^2 - KN^2} = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ізделінді көлем: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 39 = \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 27,6$ ($м^3$).

Ж а у а б ы. $\approx 27,6$ $м^3$.

3 - е с е п. Қабырғасы 1 дм-ге тең шаршы пішінді қалың қағаздан дұрыс төртбұрышты пирамида бетінің жазбасын қиып алу керек. Қағаздың барлық төбелері пирамиданың төбесіне желімделуі керек. Пирамиданың көлемі ең үлкен болуы үшін, оның табан қабырғаларының ұзындықтары қандай болуы керек?



170-сурет

Ш е ш у і. *PABCD* дұрыс пирамидасының табан қабырғасы x дм, ал биіктігі h дм болсын (170, *а*-сурет). Қағаздың диагоналі $\sqrt{2}$ дм-ге тең болатындықтан, $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. K нүктесі DC қабырғасының ортасы болсын, сонда $PK = P_1K = \frac{\sqrt{2} - x}{2}$ болады (170, *ә*-сурет). Пирамиданың биіктігі: $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - x - x)(\sqrt{2} - x + x)}{4}} = \sqrt{\frac{2 - 2\sqrt{2}x}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}x}$, ал оның көлемі: $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{x^4 - \sqrt{2}x^5}$. Бұл көлем ең үлкен болуы үшін $f(x) = x^4 - \sqrt{2}x^5$ функциясы ең үлкен мәнді қабылдауы керек, мұндағы $x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Бұл функцияны туындыны пайдаланып зерттейік: $f'(x) = 4x^3 - 5\sqrt{2} \cdot x^4 = x^3 \cdot (4 - 5\sqrt{2} \cdot x)$; егер $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ болса, $f'(x) = 0$ болады.

Осы нүктенің маңында $f(x)$ функциясы таңбаны «+»-тен «–»-ке ауыстырады, демек, $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ болғанда, функция ең үлкен мәнді қабылдайды. Сонымен, егер пирамиданың табан қабырғасы берілген қағаздың диагоналінің $\left(\frac{2}{5}\right)$-не тең болса, оның көлемі ең үлкен болады.

Ж а у а б ы. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ дм.

СҰРАҚТАР

а) Пирамиданың; ә) қиық пирамиданың көлемдерінің формулаларын жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

492. а) Бір металдан табандары тең шамалы, биіктіктері тең пирамида пішіндес екі бөлшек жасалды. Осы бөлшектердің массалары тең бе?

ә) Дұрыс n-бұрышты пирамиданы оның биіктігін қамтитын жазықтық арқылы қиған. Осы жазықтықпен қиылған көпжақтардың көлемдері тең бе?

493. а) $n = 4$; ә) $n = 3$ болса, әрбір қыры a-ға тең дұрыс n-бұрышты пирамиданың көлемін табыңдар.

494. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал табан қырындағы екіжақты бұрыштың тангенсі $\frac{15}{8}$-ке тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.

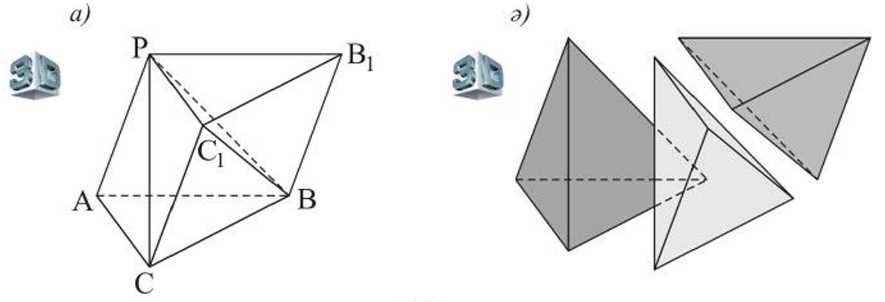
495. Көлемі 9 дм^3-ге, ал табан қырындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең дұрыс үшбұрышты пирамиданың табан қырын табыңдар.

496. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың көлемі $\frac{1}{3}Sa$-ға тең болатынын дәлелдеңдер, мұндағы a – табан қабырғасы, S – пирамиданың бүйір қыры арқылы өтетін және табанына перпендикуляр қимасының ауданы.

497. Дұрыс қиық пирамиданың жоғарғы және төменгі табан қабырғалары, сәйкесінше, $2\sqrt{3}$ дм-ге және $4\sqrt{3}$ дм-ге, ал төменгі табан қырының екіжақты бұрышы 60°-қа тең. Егер қиық пирамида: а) төртбұрышты; ә) үшбұрышты болса, оның көлемін табыңдар.

498. Тоған шұңқыры дұрыс төртбұрышты қиық пирамида пішіндес. Оның жоғарғы табан қабырғасы 12 м-ге, төменгісі 10 м-ге тең, ал бүйір жақтары табан жазықтықтарына 45° бұрышпен көлбеген. Осы шұңқырға неше куб метр су сыяды?

499. Үшбұрышты $ABCPB_1C_1$ призмасы (171, *а*-сурет) 171, *ә*-суретте көрсетілгендей үш пирамидаға бөлінген. Осы пирамидалардың көлемдері неліктен тең болатынын түсіндіріңдер.



171-сурет

500. Кез келген үшбұрышты қиық пирамиданы үш тең шамалы қиық пирамидаға бөлуге бола ма? Егер болса, оны қалай істеуге болатынын түсіндіріңдер.

501. а) Көне дәуірдің орасан зор құрылыстарының бірі – Мысырдағы Хеопс пирамидасы, ол дұрыс төртбұрышты пирамида пішінді, оның биіктігі 150 м, бүйір қыры 200 м. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

ә) Массасы 42 карат алмаз дұрыс октаэдр пішіндес. Осы октаэдрдің қыры $\approx 1{,}72$ см деген ақиқат па? (Алмаздың тығыздығы 3,5 г/см^3, 1 карат 0,2 г-ға тең.)

502. Сүрлем дайындау шұңқыры табаны тіктөртбұрыш болатын қиық пирамида пішіндес. Оның төменгі табанының қабырғалары 13 м және 6 м, жоғарғы табанының үлкен қабырғасы 26 м, ал шұңқырдың тереңдігі 5 м. Егер ондағы сүрлемнің 1 м^3-нің массасы 0,5 т болса, барлығы неше тонна сүрлем салынған?

503. Пирамиданың биіктігі 8 см. Оның төбесінен 3 см қашықтықта табанына параллель жазықтық жүргізілген. Шыққан қиманың ауданы 27 см^2. Сонда пайда болған қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

504. Табаны дұрыс алтыбұрыш болатын пирамиданың биіктігі 3 дм-ге тең. Осы биіктіктің төбесінен 1 дм қашықтықта жатқан нүктесінен оның табанына параллель, ауданы Q-ға тең қима өтеді. Берілген пирамидадан осы қима арқылы бөлінген қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

В деңгейі

505. Пирамиданың табаны – тікбұрышты трапеция, оның бүйір қабырғаларының үлкені 12 см-ге, ал кіші сүйір бұрышы 30°-қа тең. Пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығына бірдей көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданы 90 см^2-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.

506. а) Үшбұрышты пирамиданың бүйір қырлары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы 6 дм-ге тең. Пирамиданың көлемін табыңдар.
ә) $PABC$ тетраэдрінің ABC табанының қабырғалары 5 дм, 6 дм, 7 дм, ал P төбесіндегі жазық бұрыштары тік. Тетраэдрдің көлемін 0,1 дм^3-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

507. Дұрыс үшбұрышты қиық пирамиданың биіктігі $3\sqrt{3}$ см-ге, көлемі 189 см^3-ге тең, ал табандарының аудандарының қатынасы 1 : 4. Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

508. Үшбұрышты пирамиданың екі бүйір жағы табан жазықтығына және өзара перпендикуляр. Осы жақтардың аудандары S-ке және Q-ға, ал олардың ортақ қыры b-ға тең. Пирамиданың биіктігінің ортасы арқылы оның табанына параллель қима жүргізілген. Пайда болған қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

509. Үшбұрышты қиық пирамиданың бір табанының қабырғалары 2,7 дм, 2,9 дм және 5,2 дм-ге тең, басқа табанының периметрі 7,2 дм-ге, ал пирамиданың биіктігі 1 дм-ге тең. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

С деңгейі

510. а) Бүйір қыры 6 см-ге тең дұрыс төртбұрышты пирамиданың ең үлкен көлемін табыңдар.

ә) Барлық қырларының ұзындықтарының қосындысы 9 дм-ге тең дұрыс үшбұрышты пирамиданың ең үлкен көлемін табыңдар.

511. Бір металдан өзара тең емес қиық пирамида пішінді бөлшектер жасалады. Олардың табандарының аудандарының қосындылары және биіктіктері тең. Осы бөлшектердің массалары тең бе? Массасы ең үлкен болатын осындай бөлшек жасауға бола ма?

512. Үшбұрышты қиық пирамиданың көлемі V-ға, ал табандарының аудандарының қатынасы 4-ке тең. Жоғары табанының қабырғасы арқылы қарама-қарсы қырына параллель қиюшы жазықтық жүргізілген. а) Қиық пирамиданың көрсетілген жазықтықпен қимасы бөлетін әрбір көпжақтың көлемін табыңдар. ә) Ұқсас көпжақтардың көлемдерінің қатынасы олардың ұқсастық коэффициентінің кубына тең екенін дәлелдеңдер.

23. Цилиндрдің көлемі

Тақырыпты оқу барысында:

• цилиндрдің көлемінің формуласын білесіңдер;

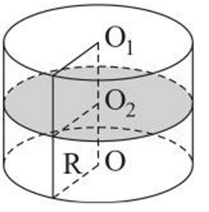
• цилиндрдің және оның көпжақтармен комбинацияларының көлемдерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.

Т е о р е м а. **Цилиндрдің V көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісіне тең:**

$$V = \pi R^2 h,$$

мұндағы R – табанының радиусы, h – цилиндрдің биіктігі.

Д ә л е л д е у і. Осы формуланы денелердің көлемдерінің $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық. $S(x)$ – цилиндрдің табан жазықтығына параллель және $O_1O = h$ биіктігіне перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының ауданы, $x = O_1O_2$ болсын (172-сурет). $S(x) = S = \pi R^2$ болғандықтан, цилиндрдің V көлемі:



172-сурет

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = Sh = \pi R^2 h.$$

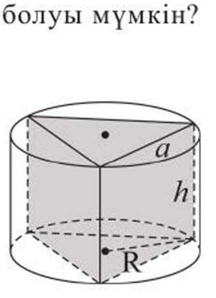
1 - е с е п. 200 л су осьтік қимасының ауданы 36 дм^2-ге тең теңқабырғалы цилиндр пішіндес бөшкеге сыя ма?

Ш е ш у і. Цилиндрдің биіктігі h, табанының радиусы R болсын. Есептің шарты бойынша $h = 2R$, $4R^2 = 36$, бұдан $R = 3$ дм, $h = 6$ дм. Сонда цилиндрдің V көлемі: $V = 9 \cdot 6\pi \approx 170$ дм^3. 170 дм^3 = 170 л.

Ж а у а б ы. Сыймайды.

2 - е с е п. Көлемі 4 м^3-ге тең дұрыс үшбұрышты призмаға сырттай сызылған цилиндрдің ең кіші толық бетінің ауданы қандай болуы мүмкін? Осындай цилиндрдің көлемін табу керек.

Ш е ш у і. h призманың биіктігі, a табан қабырғасы болсын (173-сурет). Сонда есептің шарты бойынша $4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$, бұдан $h = \frac{16}{a^2\sqrt{3}}$. Цилиндрдің табанының радиусы $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ болатынын ескере отырып, оның толық бетінің ауданын табамыз: $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \frac{16}{a^2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right)$.



173-сурет

$S(a) = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right)$ функциясының ең кіші мәнін оның туындысын пайдаланып табамыз.

$S'(a) = \frac{2\pi}{3}\left(2a - \frac{16}{a^2}\right)$, егер $a = 2$ болса, $S'(a) = 0$ болады. Осы нүктенің маңында туындының таңбасы «минустан» «плюске» ауысатындықтан, $S(a)$ функциясы ең кіші мәнді $a = 2$ болғанда қабылдайды. Сонда $S(2) = \frac{2\pi}{3}(4 + 8) = 8\pi$, ал ізделінді аудан 8π м^2-ге тең болады.

Осы цилиндрдің көлемін өздігінен табыңдар.

Ж а у а б ы. 8π м^2; $\frac{16\pi\sqrt{3}}{9}$ м^3.

СҰРАҚТАР

Цилиндр көлемінің формуласын жазыңдар.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

513. Цилиндрдің көлемі 25 есе үлкейді.

а) Цилиндрдің табанының радиусы өзгермесе, оның биіктігі неше есе үлкейді?

ә) Цилиндрдің биіктігі өзгермесе, оның табанының радиусы неше есе үлкейді?

514. Көлемі 72 дм^3-ге тең цилиндрдің биіктігін 3 есе үлкейтіп, табанының радиусын 3 есе кішірейткен. Сонда шыққан цилиндрдің көлемі неге тең?

515. Қабырғалары 4 см-ге және 6 см-ге тең тіктөртбұрышты оның: а) үлкен қабырғасынан; ә) кіші қабырғасынан айналдырғанда шыққан дененің көлемі неге тең?

516. Толық бетінің ауданы 24π см^2-ге тең болатын теңқабырғалы цилиндрдің көлемін табыңдар.

517. а) Бүйір бетінің жазбасы қабырғасы 8 см-ге тең шаршы болатын; ә) бүйір бетінің жазбасында жасаушы диагональмен 60° бұрыш жасайтын, биіктігі h-қа тең цилиндрдің көлемін табыңдар.

518. Түбінің диаметрі 10 см-ге тең цилиндр пішіндес ыдысқа тас салғанда, ондағы судың деңгейі 2 см-ге көтерілді. Тастың көлемін 1 см^3-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

519. Цилиндрдің төменгі табанының хордасы 4 см-ге тең. Осы хорда мен жоғарғы табанының центрінен құралған үшбұрыштың периметрі 12 см-ге тең және ол цилиндрдің табанымен $60°$ бұрыш жасайды. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

520. Өлшемдері $2a$ м-ге және a м-ге тең тіктөртбұрыш – әртүрлі екі цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы. Олардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

В деңгейі

521. а) Табан қабырғалары 6 см, 8 см және 10 см болатын тік үшбұрышты призмаға сырттай цилиндр сызылған. Цилиндрдің осьтік қимасының диагональдары өзара перпендикуляр болса, оның көлемін табыңдар.

ә) Табан қабырғалары 12 см, 16 см және 20 см болатын үшбұрышты тік призмаға іштей сызылған теңқабырғалы цилиндрдің көлемін табыңдар.

522. Жасаушысы 97 см-ге, табанының диаметрі 8,4 см-ге тең цилиндр пішіндес болат білікті жонғанда, оның диаметрі 0,2 см-ге кішірейеді. $\pi \approx 3{,}1416$ деп алып, біліктің массасы жонған кезде неше грамға азаятынын 1 г-ға дейінгі дәлдікпен табыңдар. (Болаттың тығыздығы 7,4 г/см^3.)

523. Цилиндрдің осьтік қимасының диагональдары $60°$ бұрышпен қиылысады, қиманың периметрі $(12 + 4\sqrt{3})$ дм-ге тең. Цилиндрдің ең үлкен мүмкін болатын көлемін табыңдар.

С деңгейі

524. Қақпақсыз цилиндр ыдысты дайындауға 75π см^2 қаңылтыр жұмсалады. Ыдыстың көлемі ең үлкен болуы үшін оның биіктігі мен табанының радиусы қандай болуы керек? (Тігісіне жұмсалатын материал есепке алынбайды.)

525. Қақпағы бар цилиндр бөшкеге 128π л сұйықтық сыяды. Осы бөшкені жасауға ең аз материал жұмсау үшін, оның биіктігі мен табанының радиусы қандай болуы керек? (Тігісіне жұмсалатын материал есепке алынбайды.)

24. Конустың және қиық конустың көлемдері

Тақырыпты оқу барысында:

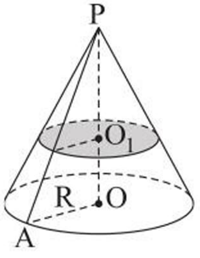
• конус пен қиық конустың көлемдерінің формулаларын білесіңдер;

• конустың, қиық конустың, олардың көпжақтармен және дөңгелек беттермен комбинацияларының көлемдерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.

Теорема. **Конустың V көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен біріне тең:**

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

мұндағы R – конустың табанының радиусы, h – конустың биіктігі.



174-сурет

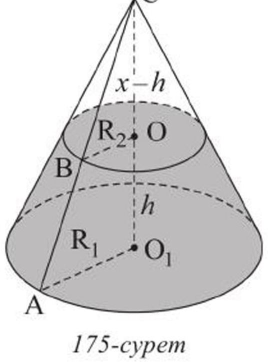
Дәлелдеуі. Осы формуланы денелердің көлемдерінің $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық. $S(x)$ – конустың табан жазықтығына параллель және $PO = h$ биіктігіне перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының ауданы, $S = \pi R^2$ – конустың табанының ауданы, $x = PO_1$ болсын (174-сурет). $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$ болғандықтан, $S(x) = \frac{S}{h^2} \cdot x^2$ болады. Сонда конустың V көлемі:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Теорема. **Қиық конустың V көлемі:**

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2),$$

мұндағы R_1 және R_2 – табандарының радиустары, ал h – оның биіктігі.



175-сурет

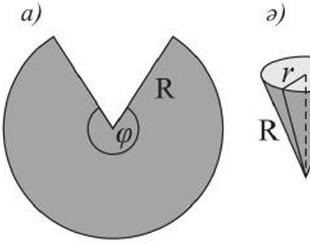
Дәлелдеуі. Берілген қиық конусты конусқа дейін толықтырып салайық (175-сурет). Конустың биіктігі $CO_1 = x$ болсын. Қиық конустың көлемі біреуінің табан радиусы R_1, биіктігі x, екіншісінің табан радиусы R_2, биіктігі $x - h$ болатын екі конустың көлемдерінің айырымына тең. CAO_1 және CBO үшбұрыштарының ұқсастығынан мынаны аламыз: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$, сонда $x - h = \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h = \frac{hR_2}{R_1 - R_2}$. Сонымен, қиық конустың көлемі:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R_1^2 x - \frac{1}{3}\pi \cdot R_2^2(x - h) = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^2 \cdot \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - R_2^2 \cdot \frac{hR_2}{R_1 - R_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \, \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

1 - е с е п. Радиусы 3 дм-ге тең дөңгелектен бұрышы $\varphi = 300°$ болатын секторды қиып алып, конустық құйғыш жасаған. Осы құйғышқа қанша бүтін литр су сыяды?

Ш е ш у і. Дөңгелектің және конустың табандарының радиустарын, сәйкесінше, R және r деп белгілейік (176-сурет). Сектордың доғасының ұзындығы құйғыштың табан шеңберінің ұзындығына тең екенін ескере отырып, мынаны аламыз: $\frac{\pi R \cdot 300°}{180°} = 2\pi r$, бұдан $r = \frac{5}{6}R = \frac{5}{2}$ (дм). Конустың h биіктігі мен V көлемін табайық:



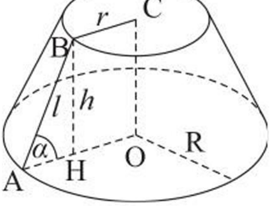
176-сурет

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}; \; V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{25\pi\sqrt{11}}{24} \text{ (дм}^3\text{)} \approx 10{,}85 \text{ (л)}.$$

Ж а у а б ы. 10 литр.

2 - е с е п. Қиық конустың l жасаушысы 8 см-ге тең және төменгі табанына $\alpha = 60°$ бұрышпен көлбеген, ал табандарының аудандарының қатынасы 4-ке тең. Осы қиық конустың көлемін 1 см^3-ге дейінгі дәлдікпен табу керек.

Ш е ш у і. R және r – қиық конустың табандарының радиустары, h биіктігі болсын, ал берілген бұрыш $\alpha = 60°$ (177-сурет). Қиық конустың көлемі: $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + Rr + r^2)$. Оның BH биіктігін жүргізейік. ΔABH-тан $AH = 4$ см, $BH = 4\sqrt{3}$ аламыз. Есептің шарты бойынша $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = 4$, бұдан $R = 2r$. $AH = R - r$ болғандықтан, $r = 4$ см, $R = 8$ см. Сонда ізделінді көлем:



177-сурет

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot (64 + 32 + 16) = \frac{448\pi\sqrt{3}}{3} \approx 813 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ж а у а б ы. ≈ 813 см^3.

СҰРАҚТАР

1. Конустың көлемінің формуласын жазыңдар.

2. Қиық конустың көлемін қандай формуламен табуға болады?

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

526. Конустың көлемі оның осьтік қимасының ауданы мен табан шеңберінің ұзындығы көбейтіндісінің алтыдан біріне тең болатынын дәлелдеңдер.

527. Табаны 12 см-ге, төбесіндегі бұрышы 120°-қа тең теңбүйірлі үшбұрышты өзінің симметрия осінен айналдырғанда пайда болған айналу денесінің көлемін табыңдар.

528. Конус пішінді ыдыс жасау үшін бұрышы 216°-қа тең сектор қиып алынған. Егер: а) сектордың радиусы 10 см; ә) сектор доғасының ұзындығы 18π дм болса, ыдыстың көлемін табыңдар.

529. Қиық конустың табандарының радиустары 3 дм және 6 дм, ал жасаушысы: а) 5 дм-ге тең; ә) табан жазықтығына 30° бұрышпен көлбеген болса, оның көлемін табыңдар.

530. Биіктігі 27 см-ге, табан шеңберлерінің ұзындықтары 99 см-ге және 33 см-ге тең қиық конус пішінді ыдысқа бүтін санды неше литр су сыяды?

531. Табанының диаметрі 4 дм-ге тең конусқа табанына параллель қима жүргізілген. Қиманың ауданы π дм^2-ге тең. Осы конус пен одан қиылып алынған қиық конустың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

532. Толық беттерінің аудандары тең болатын теңқабырғалы конус пен цилиндрдің көлемдерінің қатынасын табыңдар.

533. Қабырғалары 15 см, 41 см және 52 см болатын үшбұрышты үлкен қабырғасынан айналдырғанда шыққан айналу денесінің көлемін табыңдар.

534. Қиық конустың: а) биіктігі 8 см, жасаушысы 10 см, ал бүйір бетінің ауданы 100π см^2; ә) биіктігі 12 см, жасаушысы 13 см, ал осьтік қимасының диагональдары перпендикуляр болса, оның көлемін табыңдар.

В деңгейі

535. Дұрыс тетраэдрге сырттай сызылған конустың көлемінің оған іштей сызылған конустың көлеміне қатынасы неге тең?

536. Табан қабырғасы 6 см-ге, көршілес бүйір қырларының арасындағы бұрышы 45°-қа тең дұрыс төртбұрышты пирамида конусқа іштей сызылған. Конустың көлемін табыңдар.

537. Толық бетінің ауданы 96π дм^2-ге, ал осьтік қимасына іштей сызылған шеңбердің радиусы 3 дм-ге тең конустың көлемін табыңдар.

538. Қиық конустың арасындағы бұрышы 30°-қа тең екі жасаушысы арқылы жүргізілген жазықтық оның табандарынан 2 дм және 1 дм-ге тең хордалар қияды. Осы хордалардың әрқайсысы 150°-қа тең доғаны кереді. Қиық конустың көлемін табыңдар.

С деңгейі

539. Радиусы R-ге тең шарға көлемі ең кіші болатын конус сырттай сызылған. Сол көлемді табыңдар.

540. Ұзындығы 2 м бөрене қиық конус пішінді. Оның табандарының диаметрлері 2 дм және 1 дм-ге тең. Бөренеден көлденең қимасы шаршы болатын ең үлкен көлемді арқалық жасалған. Осы арқалықтың биіктігін табыңдар.

25. Шардың және оның бөліктерінің көлемдері

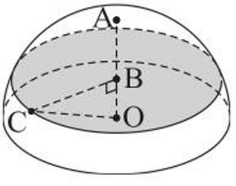
Тақырыпты оқу барысында:

• шардың, шар сегменті мен секторы көлемдерінің формулаларын білесіңдер;

• шардың, шар сегменті мен секторының және олардың көпжақтармен, дөңгелек денелермен комбинацияларының көлемдерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.

Т е о р е м а. **Радиусы R-ге тең шардың V көлемі мына формуламен есептеледі:**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



178-сурет

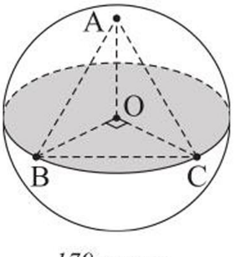
Д ә л е л д е у і. Осы формуланы денелер көлемдерінің $V = \int_a^b S(x)dx$ формуласын пайдаланып, қорытып шығарайық. $S(x)$ – жарты шардың үлкен дөңгелегіне параллель және $OA = R$ радиусына перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының ауданы, $x = OB$ болсын (178-сурет). Сонда $S(x) = \pi BC^2 = \pi(R^2 - x^2)$ болады.

Жарты шардың көлемі:

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(x)dx = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)dx = \int_0^R \pi R^2 dx - \int_0^R \pi x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_0^R - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^R = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Сонда шардың V көлемі $\frac{4}{3}\pi R^3$ болады.



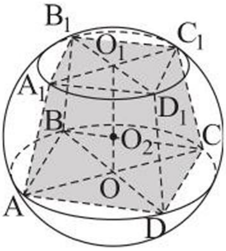
179-сурет

1 - е с е п. O нүктесі центрі болатын шардың бетіне $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90°$ болатындай A, B және C нүктелері белгіленген (179-сурет). ABC үшбұрышының периметрі 18 см-ге тең болса, шардың көлемін табу керек.

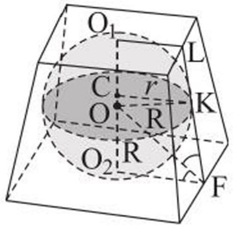
Ш е ш у і. Тікбұрышты AOB, AOC және BOC үшбұрыштарының теңдігінен $AB = AC = BC = 6$ см болады. ΔBOC-дан $OB = 3\sqrt{2}$ см шығады. Сонда шардың көлемі $V = \frac{4}{3}\pi OB^3 = \frac{4 \cdot 54\sqrt{2}}{3}\pi = 72\pi\sqrt{2}$ (см^3) болады.

Ж а у а б ы. $72\pi\sqrt{2}$ см^3.

Дөңес көпжақтың барлық төбелері шардың бетінде жатса, онда ол **шарға іштей сызылған** (немесе шар көпжаққа сырттай сызылған) деп аталады (180-сурет). Дөңес көпжақтың барлық жақтары шарды жанайтын болса, онда ол **шарға сырттай сызылған** (ал шар көпжаққа іштей сызылған) деп аталады (181-сурет). Сфераға іштей сызылған және оған сырттай сызылған көпжақтар ұғымы да осыған ұқсас анықталады.



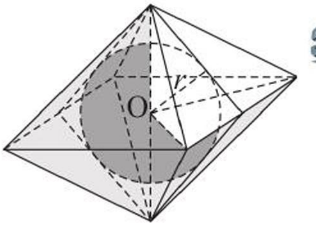
180-сурет



181-сурет

2 - е с е п. Көлемі V-ға, толық бетінің ауданы S-ке тең көпжаққа іштей сызылған шардың көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Радиусы r-ге тең сфераны іштей сызуға болатын көпжақ берілген болсын. Осы көпжақты табандары көпжақтың жақтары, ал олардың ортақ төбесі сфераның центрі болатындай етіп пирамидаларға бөлеміз (182-сурет). Осындай әрбір пирамиданың көлемі көпжақтың жағының ауданын шардың радиусына көбейтіндісінің үштен біріне тең. Сонда сырттай сызылған көпжақтың V көлемі осындай барлық пирамидалардың көлемдерінің қосындысына тең болады, яғни $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$, мұндағы S – көпжақтың толық бетінің ауданы. Осыдан $r = \frac{3V}{S}$ шығады, сонда шардың ізделінді көлемі $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3V}{S}\right)^3 = 36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$ болады.



182-сурет

Ж а у а б ы. $36\pi\left(\frac{V}{S}\right)^3$.

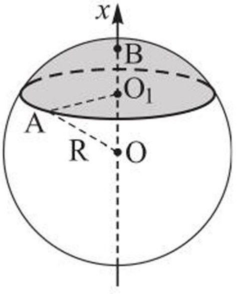
3 - е с е п. Биіктігі h-қа, ал шардың радиусы R-ге тең болатын **шар сегментінің көлемі** $\boldsymbol{V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)}$ формуласымен табылатынын дәлелдеу керек.

Д ә л е л д е у і. Сегменттің табан жазықтығына перпендикуляр Ox осін жүргіземіз (183-сурет), сегменттің биіктігі $h = BO_1$. Сонда осы сегменттің

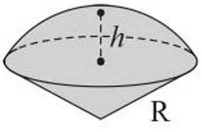
Ox осіне перпендикуляр кез келген жазықтықпен қимасының $S(x)$ ауданы: $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$, мұндағы $R - h \le x \le R$. Денелердің көлемдерін табу формуласын қолданып, мынаны аламыз:

$$V = \int_{R-h}^{R} S(x)dx = \int_{R-h}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \cdot x\Big|_{R-h}^{R} - \pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

Дәлелдеу керегі де осы еді.



183-сурет



184-сурет

Шардың секторы деп шардың сфералық сегментпен және төбесі шардың центрі болатын конустың бүйір бетімен шектелген бөлігі болатын дене аталады. Жарты шарда жататын шардың секторы табандары ортақ конус пен шар сегментінің бірігуінен тұрады (184-сурет). Шар секторының биіктігі деп оған сәйкес келетін шар сегментінің биіктігі аталады, ал оның радиусы шардың радиусы болады.

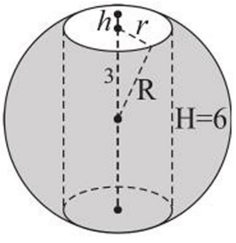
4 - е с е п. Жарты шарда жататын шар секторының көлемі: $\boldsymbol{V_{\text{сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$ болатынын дәлелдеу керек, мұндағы R – шардың радиусы, h – сектордың биіктігі.

Шардың секторы тұратын шар сегменті мен конустың көлемдерінің қосындысын табу арқылы дәлелдеуді өздігінен жүргізіңдер.

Шардың қабаты деп шардың екі параллель қиюшы жазықтықтарының арасындағы дене аталады. Осы жазықтықтардың арақашықтығы шар қабатының биіктігі деп, ал шардың қималары болатын дөңгелектер оның табандары деп аталады.

5 - е с е п. Шардың диаметрі бойымен бұрғыланып ұңғы тесілген (185-сурет). Шардың кесілген жазық бөліктерінің арақашықтығы 6 см-ге тең болса, оның қалған бөлігінің көлемін табу керек.

Ш е ш у і. Ізделінді көлем V-ны табу үшін шардың көлемінен екі өзара тең шар сегменттері мен цилиндрдің көлемдерінің қосындысын азайту керек. Сегменттің биіктігін h, шардың радиусын R және цилиндр табанының радиусын r деп белгілейміз. Сонда $h = R - 3$, $r^2 = R^2 - 9$, сегменттің көлемі: $V_{\text{сегм.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi(R-3)^2 \cdot \left(R - \frac{R-3}{3}\right) = \pi(R^2 - 6R + 9)\left(\frac{2}{3}R + 1\right)$, цилиндрдің көлемі: $V_{\text{цил.}} = 6\pi(R^2 - 9)$. Ізделінді көлем:



185-сурет

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2\pi(R^2 - 6R + 9)\left(\frac{2}{3}R + 1\right) - 6\pi(R^2 - 9) = 36\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ж а у а б ы. 36π см^3.

Есепті жалпы түрде шығарғанда, жауабы $\frac{\pi H^3}{6}$ болады, мұндағы H – цилиндрдің биіктігі, яғни мұндай дененің көлемі шардың радиусына және цилиндрдің табанының радиусына тәуелді болмайды (бұған өздігінен көз жеткізіңдер).

СҰРАҚТАР

1. Шардың көлемін қандай формуламен табуға болады? Неліктен шардың көлемі оның бетінің ауданын шардың радиусына көбейтіндісінің үштен біріне тең болатынын түсіндіріңдер.

2. Шардың сегменті мен секторы көлемдерінің формулаларын жазыңдар және оларды сызбада салып көрсетіңдер.

ЖАТТЫҒУЛАР

А деңгейі

541. Шардың диаметрін 2 есе үлкейтсе, оның көлемі неше есе артады?

542. Радиустары 2 см-ге және 3 см-ге тең екі шарды балқытып, бір шар алды. Осы шардың радиусын табыңдар.

543. Бетінің ауданы 9π дм^2-ге тең шардың көлемін табыңдар.

544. а) Шардың жазықтықпен қимасының ауданы оның бетінің ауданынан 9 есе кем. Қиманың радиусы 2 см-ге тең болса, шардың көлемін табыңдар.

ә) Үлкен дөңгелегінің ауданы $\frac{9\pi}{16}$ см^2-ге тең шардың көлемін табыңдар.

545. Бұрышы 90°-қа тең AOB секторын OA радиусынан айналдырған. Сектордың радиусы $\frac{3}{4}$ дм-ге тең болса, айналу денесінің көлемін табыңдар.

546. Төрт шардың радиустары арифметикалық прогрессияны құрайды, оның бірінші мүшесі 12-ге, ал айырымы 4-ке тең. Ең үлкен шардың көлемі мен қалған шарлардың көлемдерінің қосындысын салыстырыңдар.

547. Радиусын 1 дм-ге үлкейткенде бетінің ауданы 20π дм^2-ге артатын шардың көлемін табыңдар.

548. а) Дұрыс үшбұрышты призма шарға іштей сызылған. Призманың табанының қабырғасы 3 см-ге, ал биіктігі $2\sqrt{6}$ см-ге тең. Шардың көлемін табыңдар.

ә) Өлшемдері 2 дм, 3 дм және 6 дм болатын тікбұрышты параллелепипедке сырттай сызылған шардың көлемін табыңдар.

549. а) Алюминийден жасалған шардың массасы $93{,}6\pi$ грамм. Алюминийдің тығыздығы 2,6 г/см^3 екені белгілі болса, шардың радиусын табыңдар.

ә) Қорғасыннан құйылған шардың массасы 0,5 кг. Осы шардың диаметрін 0,1 см-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар. (Қорғасынның тығыздығы 11,4 г/см^3.)

550. а) Жасаушысы 1 м-ге тең теңқабырғалы конусқа іштей сызылған шардың көлемін 0,01 м^3-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

ә) Радиусы 3 дм шарға көлемі шардың көлемінің 25 %-на тең конус іштей сызылған. Конустың биіктігін табыңдар.

551. Егер: а) шар секторының осьтік қимасының доғасы 120°-қа, ал оны керетін хорда $4\sqrt{3}$ см-ге тең болса;

ә) табан шеңберінің ұзындығы 18π см-ге, ал шардың радиусы 15 см-ге тең болса, шар секторының көлемін табыңдар.

552. а) Егер сегменттің табаны шардың центрінен 2 см қашықтықта жатса, ал шардың радиусы 5 см болса, шар сегментінің көлемін табыңдар.

ә) Шар радиусының ұшы арқылы жүргізілген және онымен 60° бұрыш жасайтын жазықтық жарты шардан сегмент қияды. Шардың радиусы 2 дм-ге тең болса, сегменттің көлемін табыңдар.

553. Шардың 20 см-ге тең диаметрі үш бөлікке бөлінген, олардың қатынасы 1 : 4 : 5. Бөлу нүктелерінен диаметрге перпендикуляр жазықтықтар жүргізілген. Пайда болған шар қабатының көлемін табыңдар.

В деңгейі

554. Белгілі бір деңгейге дейін толтырылған цилиндр ыдысқа әрқайсысының радиусы 5 мм-ге тең 4 металл шар салынған. Ыдыстың табанының диаметрі 2,5 см-ге тең болса, ыдыстағы судың деңгейі неше миллиметрге көтерілді? Жауабын 0,1 мм-ге дейінгі дәлдікпен беріңдер.

555. Табан қабырғалары 29 см, 35 см және 48 см болатын үшбұрышты тік призма шарға сырттай сызылған. Шардың көлемін табыңдар.

556. а) Шар секторының радиусы 3 дм-ге, ал осьтік қимасындағы екі радиустың арасындағы бұрышы 120°-қа тең болса, оның көлемін табыңдар.

ә) Егер сектордың осьтік қимасының ауданы шардың үлкен дөңгелегінің ауданынан 3 есе кем болса, шар секторы көлемінің шардың көлеміне қатынасын табыңдар.

557. Шардың диаметрі үш тең бөлікке бөлінген және бөлу нүктелерінен диаметрге перпендикуляр жазықтықтар жүргізілген. Пайда болған шар қабатының көлемін екі шар сегменті көлемдерінің қосындысымен салыстырыңдар.

С деңгейі

558. Шарға іштей сызылған тік призманың табаны – үшбұрыш, оның екі қабырғасы 4 дм және 14 дм-ге, ал олардың арасындағы бұрышы 60°-қа тең. Призманың көлемі 168 дм^3-ге тең. Шардың бетінің ауданын табыңдар.

559. Шарға іштей дұрыс төртбұрышты пирамида сызылған, оның диагональдық қимасының ауданы $3\sqrt{3}$ дм^2-ге тең. Пирамиданың бүйір қыры табанының диагоналіне тең болса, шардың көлемін табыңдар.

560. Жасаушысы табанының радиусынан 3 есе үлкен конустың ішіне екі шар орналастырылған, олардың біреуі конусқа іштей сызылған, ал екіншісі біріншімен және конустың бүйір бетімен жанасады. Бірінші және екінші шардың көлемдерінің қатынасын табыңдар.

26. «Денелердің көлемдері» бөлімін қайталауға арналған жаттығулар

А деңгейі

561. Тікбұрышты параллелепипедтің: а) табан қабырғалары 9 м және 16 м-ге, ал бүйір жақтарының диагональдары ұзындықтарының қатынасы 0,75-ке тең болса; ә) табанының периметрі 72 дм-ге, ал бүйір жақтарының диагональдары 25 дм-ге және 29 дм-ге тең болса, параллелепипедтің көлемін табыңдар.

562. $ABCA_1B_1C_1$ тік призмасының табан қабырғалары $AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{7}$ см, AA_1 қырындағы екіжақты бұрышы 150°, $AM = \sqrt{7}$ см, мұндағы M – B_1C_1 қырының ортасы. Призманың көлемін табыңдар.

563. Призманың табаны – дұрыс алтыбұрыш, оның қабырғасы a-ға тең. Призманың бүйір қыры табан жазықтығына α бұрышпен көлбеген, ал оның табан жазықтығындағы ортогональ проекциясы призманың табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусына тең. Призманың көлемін табыңдар.

564. Төртбұрышты көлбеу призманың бүйір қыры 6 дм-ге тең, ал оның перпендикуляр қимасы – диагональдары 4 дм және 3 дм болатын ромб. Призманың көлемін табыңдар.

565. Қыры 9 см-ге тең $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубынан үшбұрышты C_1A_1BD пирамидасын қиып алған. Осы пирамиданың көлемін табыңдар.

566. Төртбұрышты $PABCD$ пирамидасының табаны – $ABCD$ параллелограмы, әрі $AB = BP = 1$ дм, $PD = 2$ дм, $\angle ABD = \angle BPD = 90°$. Пирамиданың биіктігінің табаны BD кесіндісіне тиісті болса, оның көлемін табыңдар.

567. Табандарының аудандары 289 см^2 және 100 см^2 болатын n-бұрышты қиық пирамиданы толықтырғанда шыққан пирамиданың биіктігі 9 см-ге тең. Қиық пирамиданың көлемін табыңдар.

568. Цилиндрдің төменгі табанының центрі арқылы өтетін жазықтық оған 60° бұрышпен көлбеген. Осы жазықтық цилиндрдің жоғарғы табанын 90°-қа тең доғаны керетін, 10 см-ге тең хорда бойымен қияды. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

569. Қаңылтырдан радиусы 18 см, доғасы 240° болатын дөңгелек сектор қиып алынып, оны конустық бетке орады. Оның көлемін табыңдар.

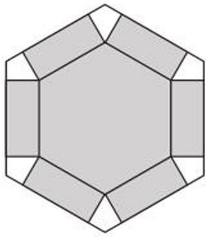
570. Дұрыс үшбұрышты пирамидаға сырттай шар сызылған. Пирамиданың биіктігі 5,76 см-ге, ал бүйір қыры 7,2 см-ге тең болса, шардың көлемін табыңдар.

В деңгейі

571. $ABCA_1B_1C_1$ тік призмасының табаны – теңбүйірлі ABC үшбұрышы, онда $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$. Призманың BB_1C_1C бүйір жағы – шаршы. Призманың көлемін табыңдар.

572. Призманың бүйір қырына перпендикуляр қимасына іштей шеңбер сызуға болса, онда мұндай призманың көлемі осы шеңбердің радиусын призманың бүйір бетінің ауданына көбейтіндісінің жартысына тең болатынын дәлелдеңдер.

573. Қабырғасы 3 дм-ге тең дұрыс алтыбұрыштың бұрыштарынан 186-суретте көрсетілгендей тең төртбұрыштар қиып алып, көлемі 9 дм^3 болатын дұрыс алтыбұрышты призма пішінді ашық қорап жасау керек. Осындай қораптың биіктігі қандай болады?



186-сурет

574. Сыйымдылығы 50 м^3 цистерна цилиндр мен екі тең шар сегментінен тұратын дене пішінді. Цилиндрдің табанының диаметрі 3 м-ге, ал сегменттің биіктігі 0,57 м-ге тең болса, цилиндрдің жасаушысының ұзындығын 0,01 м-ге дейінгі дәлдікпен табыңдар.

С деңгейі

575. $ABCA_1B_1C_1$ тік призмасында $AB = 10$ см, $BC = 24$ см, $AC = 26$ см, ал ΔAB_1C_1-дің ауданы 180 см^2-ге тең. $B_1A_1ACC_1$ пирамидасының көлемін табыңдар.

576. Дұрыс төртбұрышты пирамида берілген. а) Пирамиданың көлемі 4 дм^3-ге тең болса, оның бүйір бетінің ең кіші ауданын; ә) пирамиданың бүйір бетінің ауданы 36 см^2-ге тең болса, оның ең үлкен көлемін табыңдар.

577. Шарға сырттай сызылған цилиндрдің, конустың, қиық конустың көлемдері олардың толық беттерінің аудандарын шардың радиусына көбейтіндісінің үштен біріне тең болатынын дәлелдеңдер.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

578. Кубтың әрбір қырын 2 см-ге ұзартса, онда жаңа кубтың көлемі бастапқы кубтың көлемінен 98 см^3-ге артады. Бастапқы кубтың көлемі неге тең?

1) 30 см^3; 2) 27 см^3; 3) 24 см^3; 4) 49 см^3; 5) 36 см^3.

579. Табаны шаршы болатын тікбұрышты параллелепипедтің диагоналі 3,5 м-ге, ал оның бүйір жағының диагоналі 2,5 м-ге тең. Параллелепипедтің көлемі неге тең?

1) 4 м^3;
2) 6 м^3;
3) 3,5 м^3;
4) 2,5 м^3;
5) 3 м^3.

580. Тік параллелепипедтің табан қабырғалары 8 дм-ге және 17 дм-ге, ал олардың арасындағы бұрышы 30°-қа тең. Параллелепипедтің бүйір бетінің ауданы 1 м^2-ге тең. Параллелепипедтің көлемі неге тең?

1) 136 дм^3;
2) 148 дм^3;
3) 1,5 м^3;
4) 1,6 м^3;
5) 2 м^3.

581. Көлбеу призманың барлық бүйір қырларын қиятын және оларға перпендикуляр болатын қимасы жүргізілген. Қиманың ауданы 1 дм^2-ге, ал бүйір қыры 1 м-ге тең. Призманың көлемі неге тең?

1) 100 дм^3;
2) 10 дм^3;
3) 1000 дм^3;
4) 0,1 м^3;
5) 0,001 м^3.

582. Параллелепипедтің жақтары – тең ромбылар, ромбының қабырғасы 10 см-ге, сүйір бұрышы 60°-қа тең. Параллелепипедтің көлемі неге тең?

1) 700 см^3;
2) 1000 см^3;
3) $250\sqrt{2}$ см^3;
4) $0{,}5\sqrt{3}$ дм^3;
5) $0{,}5\sqrt{2}$ дм^3.

583. Төртбұрышты тік призманың биіктігі 4 см-ге тең, ал оның диагональдары табан жазықтығына 30° және 45° бұрышпен көлбеген. Табан диагональдарының арасындағы сүйір бұрышы 60°-қа тең. Призманың көлемі неге тең?

1) 48 см^3;
2) 36 см^3;
3) 24 см^3;
4) 64 см^3;
5) $24\sqrt{3}$ см^3.

584. Дұрыс тетраэдрдің қыры 6 м-ге тең. Оның көлемі неге тең?

1) 24 м^3;
2) $18\sqrt{2}$ м^3;
3) $24\sqrt{2}$ м^3;
4) $24\sqrt{3}$ м^3;
5) 25 м^3.

585. Пирамиданың табаны – қабырғалары 6 см, 6 см және 8 см болатын теңбүйірлі үшбұрыш. Пирамиданың әр бүйір қыры 9 см-ге тең. Пирамиданың көлемі неге тең?

1) $\frac{8}{9}\sqrt{3245}$ см^3;
2) $\frac{8}{3}\sqrt{3245}$ см^3;
3) $\frac{16}{3}\sqrt{95}$ см^3;
4) 114 см^3;
5) 48 см^3.

586. Дұрыс алтыбұрышты пирамиданың табан қабырғасы 2 дм-ге, ал табаны мен бүйір жағының арасындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең. Пирамиданың көлемі неге тең?

1) 8 дм^3;
2) 10 дм^3;
3) 6 дм^3;
4) $4\sqrt{2}$ дм^3;
5) $6\sqrt{2}$ дм^3.

587. Пирамиданың табаны – үшбұрыш, оның екі бұрышы 15° және 75°, ал оған сырттай сызылған шеңбердің радиусы 3 м-ге тең. Пирамиданың бүйір қырлары табан жазықтығына 45° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың көлемі неге тең?

1) 9 м^3;
2) 10 м^3;
3) 5 м^3;
4) 4,5 м^3;
5) $3\sqrt{3}$ м^3.

588. Үшбұрышты дұрыс қиық пирамиданың табандарының қабырғалары 12 см-ге және 10 см-ге, ал төменгі табан қырындағы екіжақты бұрышы 45°-қа тең. Пирамиданың көлемі неге тең?

1) $121\frac{1}{3}$ см^3;
2) 91 см^3;
3) $60\frac{2}{3}$ см^3;
4) 45,5 см^3;
5) $30\frac{1}{3}$ см^3.

589. Төртбұрышты дұрыс қиық пирамиданың табандарының қабырғалары $5\sqrt{2}$-ге және $2\sqrt{2}$-ге тең, ал оның бүйір қыры табанына 60° бұрышпен көлбеген. Осы пирамиданың көлемі неге тең?

1) $78\sqrt{3}$;
2) $58\sqrt{3}+50\sqrt{6}$;
3) $234\sqrt{3}$;
4) $\frac{78\sqrt{3}}{3}$;
5) $80\sqrt{3}$.

590. Көлемі 36 см^3-ге тең цилиндрдің биіктігін 3 есе үлкейтіп, ал табан радиусын 3 есе кішірейткен. Сонда шыққан цилиндрдің көлемі неге тең?

1) 36 см^3;
2) 24 см^3;
3) 12 см^3;
4) 18 см^3;
5) 6 см^3.

591. Конустың 2 м-ге тең жасаушысы оның табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайды. Конустың көлемі неге тең?

1) 2π м^3;
2) π м^3;
3) 3π м^3;
4) $1{,}5\pi$ м^3;
5) $\sqrt{3}\,\pi$ м^3.

592. Екі шардың беттерінің аудандарының қатынасы 4 : 9 қатынасындай. Олардың көлемдерінің қатынасы қандай?

1) 8 : 27;
2) 4 : 9;
3) 16 : 81;
4) 64 : 729;
5) 8 : 18.

593. Табанының радиусы 2 дм-ге тең конусқа оның табанына параллель қимасы салынған. Қиманың ауданы π дм^2-ге тең. Берілген конустың және пайда болған қиық конустың көлемдерінің қатынасы неге тең?

1) 1,5;
2) 2,5;
3) 1,25;
4) $\frac{8}{3}$;
5) $\frac{8}{7}$.

594. Көлемі 27π дм^3 болатын ыдыс цилиндрмен толықтырылған жарты шар пішінді. Жарты шардың радиусы 3 дм-ге тең. Цилиндрдің биіктігі неге тең?

1) 2 дм;
2) 1,5 дм;
3) 0,5 дм;
4) 1 дм;
5) $\sqrt{\pi}$ дм.

595. Радиусы 3 дм-ге тең шарға іштей конус сызылған, оның жасаушысы мен биіктігінің арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Осы конустың көлемі неге тең?

1) 3π дм^3;
2) 4π дм^3;
3) $\frac{27\pi}{8}$ дм^3;
4) $\frac{29\pi}{9}$ дм^3;
5) $3{,}5\pi$ дм^3.

Жаттығуларды орындаңдар

596. Қырлары 3,4 дм-ге және 1,4 дм-ге тең екі металл кубты балқытып, бір куб жасаған. Осы кубтың қырының ұзындығын 3,5 дм-мен салыстырыңдар.

597. Үшбұрышты дұрыс призманың көлемі $20\sqrt{3}$ $см^3$-ге тең. Призманың табанына сырттай сызылған шеңбердің радиусы $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. Призманың биіктігін табыңдар.

598. Көлбеу параллелепипедтің табаны мен бүйір жағы – тіктөртбұрыштар, олардың аудандары, сәйкесінше, $20\,дм^2$-ге және $24\,дм^2$-ге, ал олардың жазықтықтарының арасындағы бұрыш $30°$-қа тең. Параллелепипедтің басқа бүйір жағының ауданы $15\,дм^2$-ге тең болса, оның көлемін табыңдар.

599. Қаңылтырдан радиусы 18 см-ге, доғасы $240°$-қа тең сектор қиып алынып, конустық құйғыш жасаған. Осы құйғышқа бүтін санды неше литр су сыяды?

600. Табандары $\sqrt{3}$ дм-ге және $4\sqrt{3}$ дм-ге тең тікбұрышты трапецияны оның кіші бүйір қабырғасынан айналдырған. Трапецияның үлкен бүйір қабырғасы оның кіші табанымен $150°$ бұрыш жасайтын болса, айналу денесінің көлемін табыңдар.

601. Үшбұрышты дұрыс призмаға сырттай цилиндр сызылған. Призманың биіктігі 8 см-ге, ал бүйір жағының диагоналі 10 см-ге тең. Цилиндрдің көлемін табыңдар.

602. Биіктігі табанының диаметріне тең ағаш цилиндрден радиусы ең үлкен болатын шар жонып алынды. Ағаштың неше пайызы жонылып қалды?

БҰЛ ҚЫЗЫҚТЫ!

Тарихи деректер бойынша пирамида мен конустың көлемдерінің формулаларын алғаш рет ежелгі грек ғалымы Демокрит Абдерский (б. д. д. 460–380 жж.) тапқан.

Евклидтің «Негіздерінің» XII кітабында биіктіктері тең, табандары тең шамалы үшбұрышты пирамидалардың тең шамалы болатыны туралы тұжырымның дәлелдеуі келтірілген. Ежелгі Грекияда денелердің көлемдерінің толық теориясын Архимед ұсынған болатын.

Демокрит Абдерский

Бонавентура Кавальери

Көлемдер теориясының дамуына итальяндық ғалым Б. Кавальери (1598–1647) үлкен үлес қосты. Оны денелердің көлемдерін интегралды қолданып есептеу туралы ой қатты қызықтырды.

1. Ғаламторды пайдаланып, денелердің көлемдерін табуға арналған «Кавальери принципі» неде екенін біліңдер.

2. Архимедтің есептерін шығарыңдар:

а) көлемі табанының радиусы r-ге, ал биіктігі h-қа тең конустың көлеміне тең болатын шардың радиусын табыңдар;

ә) табаны шардың үлкен дөңгелегіне, ал биіктігі оның диаметріне тең цилиндрдің көлемі шардың көлемінің $\frac{3}{2}$-іне тең болатынын дәлелдеңдер.

10–11-СЫНЫПТАРДАҒЫ ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

А деңгейі

603. Дұрыс n-бұрыштың қабырғасы арқылы жазықтық жүргізілген. а) $n = 3$; ә) $n = 6$ болса, n-бұрыштың осы жазықтыққа параллель қабырғасы табыла ма? Жауабын түсіндіріңдер.

604. Кез келген екі жазықтыққа параллель түзу жүргізуге бола ма?

605. Бір жазықтықта жататын екі түзу екінші жазықтықта жататын екі түзуге параллель болса, ондай жазықтықтар параллель болады деген тұжырым ақиқат па?

606. Дұрыс үшбұрыштың бір қабырғасы қайсыбір жазықтықта жатыр. а) Оның екінші қабырғасы; ә) үшбұрыштың медианасы осы жазықтыққа перпендикуляр болуы мүмкін бе?

607. а) Үшбұрыштың; ә) трапецияның; б) дұрыс алтыбұрыштың екі қабырғасы бір жазықтыққа перпендикуляр болуы мүмкін бе?

608. Төмендегі ұғымдардың анықтамалары дұрыс берілген бе? Егер дұрыс берілмесе, қатесін көрсетіңдер:

а) кеңістіктегі екі түзудің ортақ нүктелері болмаса, олар параллель түзулер деп аталады;

ә) екі жазықтықтың ортақ нүктелері болмаса, олар параллель жазықтықтар деп аталады;

б) бір жағы көпбұрыш, қалған жақтары үшбұрыш болатын көпжақ пирамида деп аталады.

609. AB кесіндісі α жазықтығын O нүктесінде қияды. AD мен BC түзулері осы жазықтыққа перпендикуляр және оны, сәйкесінше, D мен C нүктелерінде қияды. $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $OC = 1,5$ см болса, AB кесіндісінің ұзындығын табыңдар.

610. Дұрыс үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призмасының табан қабырғасы $4\sqrt{3}$ см-ге, ал бүйір қыры $3\sqrt{3}$ см-ге тең. AB қыры мен A_1C_1 қабырғасының ортасы арқылы жазықтық жүргізілген. Осы жазықтықтың призма табанымен жасайтын бұрышын және қимасының ауданын табыңдар.

611. Көлбеу призманың табаны – тікбұрышты үшбұрыш, оның катеттері 5 см және 12 см. Гипотенузаны қамтитын бүйір жағы табанына перпендикуляр және оның ауданы 130 $см^2$-ге тең. Призманың көлемін табыңдар.

612. Ұштары: а) $A(3; 5; -7)$ және $B(-3; 9; 7)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы ордината осіне; ә) $C(3; 4; 5)$ және $D(10; 12; -5)$ нүктелерінде болатын кесіндінің ортасы Oxy жазықтығына тиісті деген ақиқат па?

613. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар болса, онда A, B, C нүктелері: а) бір түзуде; ә) параллель түзулерде жатады деген ақиқат па?

614. $\vec{a}\,(m; 4; 2)$ және $\vec{b}\,(m+2; 6; 3)$ векторлары: а) коллинеар; ә) компланар; б) перпендикуляр болатындай m-нің барлық мәндерін табыңдар.

Қиын Керше алқабы, Шығыс Қазақстан облысы

615. Қиын Керше алқабы Марстың көрінісін еске салады. Осы алқаптың алып жатқан ауданының сандық мәні қыры $5\sqrt{2}$ дм-ге тең кубтың толық бетінің ауданына тең болса, оның неше гектарды алып жатқанын анықтаңдар.

616. Тікбұрышты параллелепипед пішінді аквариумның ұзындығы 0,5 м, ені 37 см. Аквариумның сыйымдылығы $0{,}074\,м^3$ болса, оның биіктігін табыңдар.

617. Конустың биіктігі жасаушысының жартысына, ал табанының радиусы $2\sqrt{3}$ см-ге тең. Конустың толық бетінің ауданын табыңдар.

618. Шарға табанының радиусы r-ге, ал биіктігі h-қа тең конус іштей сызылған. Шардың R радиусын табыңдар.

619. Радиусы 1 дм-ге тең шардың көлемі мен әрбір қыры 2 дм-ге тең дұрыс үшбұрышты призманың көлемін салыстырыңдар.

620. Шар сегментінің бетінің ауданы π дм^2-ге, ал шардың радиусы 1 дм-ге тең болса, шар сегментінің көлемін табыңдар.

621. $ABCD$ трапециясы берілген, M және N нүктелері – оның AB мен CD табандарының орталары. $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XN} = 0{,}5(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы X – кеңістіктің кез келген нүктесі.

622. $\vec{a}\,(3; 4; 5)$ және $\vec{b}\,(1; 0; -1)$ векторлары берілген. Осы векторлардың қосындысының скаляр квадратын табыңдар.

623. Қабырғасы 2 дм-ге тең шаршы пішінді қағаздан барлық қырлары 1 дм-ге тең дұрыс төртбұрышты пирамида бетінің жазбасын қалай қиып алуға болатынын көрсетіңдер. Осы пирамиданың толық бетінің ауданы неге тең?

624. Қабырғасы 10 см-ге тең шаршы конустың табанына іштей сызылған. Конустың төбесі мен шаршының қабырғасы арқылы өтетін қиманың төбесіндегі бұрышы 60°-қа тең. Конустың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

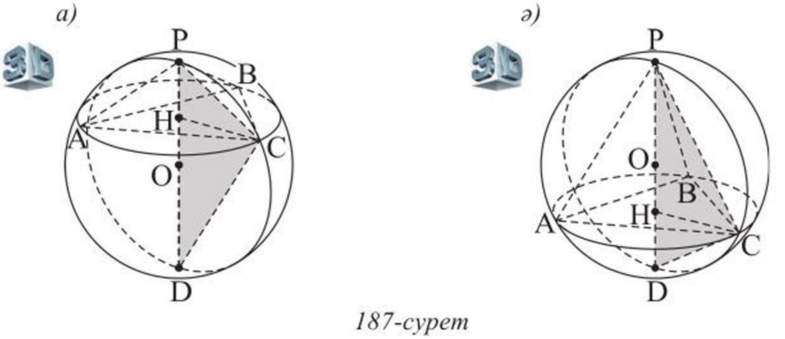
625. Хан Тәңірі – Тянь-Шань тауының Қазақстан аумағындағы ең биік шыңы. Оның метрмен өлшенетін биіктігі бүйір қырлары өзара перпендикуляр және 5 м, 6 м, 1339 м болатын тетраэдрдің $м^3$-мен өлшенетін көлемінің сандық мәнімен өрнектелетін болса, шыңның биіктігі қандай болғаны?

Хан Тәңірі шыңы, Алматы облысы

В деңгейі

626. $DABC$ пирамидасының табаны – ΔABC, онда $AB = AC = 25$ см, $BC = 40$ см. BCD жағы табанына перпендикуляр. Пирамиданың DM биіктігінің табанынан ACD жағына дейінгі қашықтық $6\sqrt{2}$ см-ге тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

627. Дұрыс үшбұрышты пирамидаға сырттай сызылған сфераның центрінен пирамиданың табанына дейінгі қашықтық сфераның радиусынан 2 есе кем (187-сурет). Пирамиданың бүйір қыры мен биіктігінің арасындағы бұрышты табыңдар.



187-сурет

628. 9 см-ге тең жасаушысы табан жазықтығымен 30° бұрыш жасайтын конусқа іштей сызылған сфераның ауданын табыңдар.

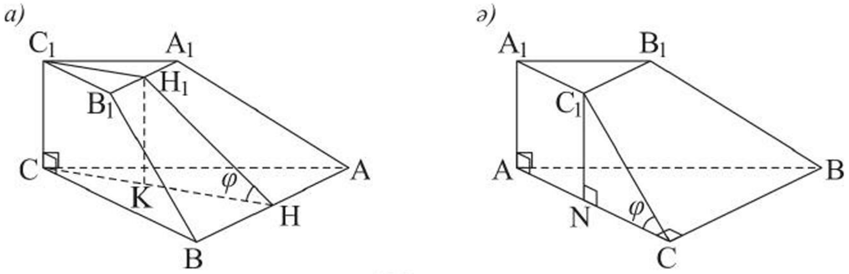
629. Көлемі 96 $см^3$-ге тең дұрыс төртбұрышты пирамидаға іштей шар сызылған. Шардың радиусы 2 см-ге тең болса, пирамиданың биіктігі мен табан қабырғасын табыңдар.

630. Үшбұрышты пирамиданың төбесіндегі барлық жазық бұрыштары тік, ал бүйір қырлары $2\sqrt{2}$ см, 3 см және $\sqrt{10}$ см. Осы пирамидаға сырттай сызылған шардың бетінің ауданын және шардың көлемін табыңдар.

С деңгейі

631. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеді берілген. B_1ACD_1 тетраэдрінің көлемінің осы параллелепипедтің көлеміне қатынасын табыңдар.

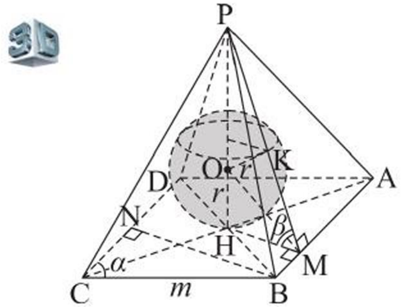
632. Қиық пирамиданың табандары – теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштар, олардың гипотенузалары m және n-ге тең ($m > n$). Оның екі бүйір жағы табан жазықтықтарына перпендикуляр, ал үшіншісі төменгі табан жазықтығына φ бұрышпен көлбеген. Осы пирамиданың көлемін табыңдар. Пирамида биіктігінің орналасуының мүмкін жағдайларын қарастырыңдар (188-сурет).



188-сурет

633. а) Биіктігі 0,5 м-ге және табан радиусы 1 м-ге тең конусқа іштей табан радиусы r м болатын цилиндр сызылған. Цилиндрдің көлемін табыңдар және r-дің қандай мәнінде цилиндрдің көлемі ең үлкен болатынын анықтаңдар.

ә) Радиусы 3 дм шарға іштей биіктігі h дм-ге тең конус сызылған. Конустың көлемін табыңдар және h-тың қандай мәнінде конустың көлемі ең үлкен болатынын анықтаңдар.



189-сурет

634. Пирамиданың табаны – ромб, оның қабырғасы m-ге, ал сүйір бұрышы α-ға тең. Пирамиданың табан қабырғасындағы әрбір екіжақты бұрыш β-ға тең (189-сурет). Осы пирамидаға іштей шар сызуға болатынын дәлелдеңдер және оның радиусын табыңдар.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР!

Дұрыс жауабын таңдаңдар

635. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы берілген. A_1D мен D_1C түзулерінің арасындағы бұрыш неге тең?

1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 60°.

636. Дұрыс тетраэдрдің қыры $\sqrt{2}$ дм-ге тең. Оның айқас түзулерде жататын екі қырының арақашықтығы неге тең?

1) 1 дм; 2) 1,5 дм; 3) $0{,}5\sqrt{2}$ дм; 4) $0{,}3\sqrt{3}$ дм; 5) 2 дм.

637. Қабырғасы $4\sqrt{2}$ дм және бұрышы 45° болатын ромб және теңқабырғалы DCE үшбұрышы берілген. E нүктесінен AB түзуіне дейінгі қашықтық $2\sqrt{10}$ дм-ге тең болса, онда ABC мен DCE жазықтықтарының арасындағы бұрыш неге тең?

1) 90°; 4) 30°;

2) 60°; 5) $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

3) 45°;

638. 60°-қа тең екіжақты бұрыш пен оның жақтарынан 3 см және 9 см қашықтықтағы нүкте берілген. Осы нүктеден оның қырына дейінгі қашықтық неге тең?

1) 12 см; 4) $5\sqrt{6}$ см;

2) 12,5 см; 5) $4\sqrt{10}$ см.

3) $2\sqrt{39}$ см;

639. Әр қыры $\sqrt{3}$ дм-ге тең үшбұрышты тік призманың көлемі неге тең?

1) 4,5 дм^3; 4) 2,25 дм^3;

2) 3 дм^3; 5) 2,75 дм^3.

3) 1,5 дм^3;

640. Көлбеу параллелепипедтің табанының қабырғалары 2 дм және $\sqrt{2}$ дм, ал олардың арасындағы бұрышы 135°. Табанының үлкен диагоналін қамтитын параллелепипедтің диагональдық қимасы – ромб және ол табанына перпендикуляр. Параллелепипедтің бүйір қыры табанына 45° бұрышпен көлбеген болса, онда параллелепипедтің көлемі неге тең?

1) $4\sqrt{5}$ дм^3; 4) 4 дм^3;

2) $2\sqrt{10}$ дм^3; 5) $2\sqrt{5}$ дм^3.

3) 2 дм^3;

641. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі 6 см-ге, ал апофемасы 6,5 см-ге тең болса, оның толық бетінің ауданы неге тең?

1) 78 см^2;
2) 80 см^2;
3) 90 см^2;
4) 100 см^2;
5) 120 см^2.

642. Пирамиданың табаны – бүйір қабырғалары 8 см және 10 см болатын трапеция. Пирамиданың әр бүйір жағы табанымен 60° бұрыш жасайды және оның биіктігі $4\sqrt{3}$ см-ге тең. Пирамиданың толық бетінің ауданы неге тең?

1) $96\sqrt{3}$ см^2;
2) 144 см^2;
3) 200 см^2;
4) 216 см^2;
5) 360 см^2.

643. Шардың бетінде A, B және C нүктелері жатыр, $AB = BC = AC = 1{,}5$ см. Шардың центрінен ABC үшбұрышының жазықтығына дейінгі қашықтық 1,5 см-ге тең. Шардың бетінің ауданы неге тең?

1) 24π см^2;
2) 21π см^2;
3) 12π см^2;
4) 6π см^2;
5) 4π см^2.

644. Су қоймасы төбесі жарты шармен жабылған цилиндрден тұрады. Цилиндр табанының ішкі диаметрі 12 м, ал цилиндрдің биіктігі 4 м. Осы су қоймасының сыйымдылығы неге тең?

1) 800 м^3;
2) 750 м^3;
3) 300π м^3;
4) 298π м^3;
5) 288π м^3.

645. Конустың остік қимасының төбесіндегі бұрышы 60°-қа тең. Осы конустың бүйір беті жазбасының центрлік бұрышы неге тең?

1) 270°;
2) 180°;
3) 150°;
4) 120°;
5) 90°.

646. Теңқабырғалы конусқа іштей сызылған шардың көлемі $10\frac{2}{3}\pi$ см^3 болса, онда осы конустың көлемі неге тең?

1) 24π см^3;
2) 20π см^3;
3) 25π см^3;
4) $24\frac{1}{3}\pi$ см^3;
5) 21π см^3.

647. Конустың жасаушысы оның табанына 45° бұрышпен көлбеген. Конустың екі жасаушысын қамтитын қимасы жүргізілген. Егер қима табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайтын болса және табан центрінен $2\sqrt{3}$ см қашықтықта болса, онда оның ауданы неге тең?

1) $64\sqrt{2}$ см^2;
2) 64 см^2;
3) 48 см^2;
4) $32\sqrt{2}$ см^2;
5) $24\sqrt{2}$ см^2.

648. Тікбұрышты $ABCD$ трапециясы ($AD \parallel BC$, $\angle A = 90°$) AB қабырғасын қамтитын осьтен айналады. $BD = 10$ см, $BC = 2$ см және $\angle DBC = 60°$ болса, онда айналу денесінің көлемі неге тең?

1) $\frac{335\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3;
2) $\frac{215}{3}\pi$ см^3;
3) $\frac{145\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3;
4) $195\sqrt{3}\pi$ см^3;
5) $65\sqrt{3}\pi$ см^3.

649. Радиусы 9 см-ге тең сфераға іштей сызылған дұрыс төртбұрышты пирамиданың ең үлкен көлемі неге тең?

1) 576 см^3;
2) 600 см^3;
3) 640 см^3;
4) 536 см^3;
5) 729 см^3.

Жаттығуларды орындаңдар

650. а) Әрбір қыры 6 см-ге тең үшбұрышты дұрыс призманың; ә) қыры 10 см-ге тең дұрыс тетраэдрдің толық бетінің ауданын табыңдар.

651. Қиық конустың табандарының радиустары 8 см-ге және 12 см-ге тең. Конустың жасаушысы табан жазықтығымен 45° бұрыш жасайтын болса, оның бүйір бетінің ауданын табыңдар.

652. Пирамиданың табаны – катеттері 6 см-ге және 8 см-ге тең тікбұрышты үшбұрыш. Пирамиданың барлық бүйір жақтары табан жазықтығына 60° бұрышпен көлбеген. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын табыңдар.

653. Егер $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ шар бетінің теңдеуі болса, шардың көлемін табыңдар.

654. $ABCA_1B_1C_1$ үшбұрышты призмасының AA_1B_1B және AA_1C_1C бүйір жақтары өзара перпендикуляр және олардың әрқайсысы – қабырғасы a-ға тең шаршы. AC_1 мен BA_1 түзулерінің арақашықтығын табыңдар.

ҚОСЫМША

0°-ТАН 90°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ СИНУСТАРЫ МЕН КОСИНУСТАРЫНЫҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

0°-ТАН 89°-ҚА ДЕЙІНГІ БҰРЫШТАРДЫҢ ТАНГЕНСІНІҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІНІҢ КЕСТЕСІ

A	tg *A*	*A*	tg *A*	*A*	tg *A*
0°	0,000	30°	0,577	60°	1,73
1°	0,017	31°	0,601	61°	1,80
2°	0,035	32°	0,625	62°	1,88
3°	0,052	33°	0,649	63°	1,96
4°	0,070	34°	0,675	64°	2,05
5°	0,087	35°	0,700	65°	2,14
6°	0,105	36°	0,727	66°	2,25
7°	0,123	37°	0,754	67°	2,36
8°	0,141	38°	0,781	68°	2,48
9°	0,158	39°	0,810	69°	2,60
10°	0,176	40°	0,839	70°	2,75
11°	0,194	41°	0,869	71°	2,90
12°	0,213	42°	0,900	72°	3,08
13°	0,231	43°	0,933	73°	3,27
14°	0,249	44°	0,966	74°	3,49
15°	0,268	45°	1,000	75°	3,73
16°	0,287	46°	1,04	76°	4,01
17°	0,306	47°	1,07	77°	4,33
18°	0,325	48°	1,11	78°	4,70
19°	0,344	49°	1,15	79°	5,14
20°	0,364	50°	1,19	80°	5,67
21°	0,384	51°	1,23	81°	6,31
22°	0,404	52°	1,28	82°	7,12
23°	0,424	53°	1,33	83°	8,14
24°	0,445	54°	1,38	84°	9,51
25°	0,466	55°	1,43	85°	11,4
26°	0,488	56°	1,48	86°	14,3
27°	0,510	57°	1,54	87°	19,1
28°	0,532	58°	1,60	88°	28,6
29°	0,554	59°	1,66	89°	57,3

ЖАУАПТАР МЕН НҰСҚАУЛАР

2. а) Иә; ә) жоқ. **3.** а) Параллель болуы немесе қиылысуы мүмкін; ә), б) қиылысады. **4.** а) Жоқ; ә) параллель болуы немесе қиылысуы мүмкін. **5.** Ақиқат емес. **6.** Үш перпендикуляр туралы теореманы пайдаланыңдар. **7.** $2\sqrt{2}$ м. **8.** 15 см немесе 20 см. **9.** $6\sqrt{2}$. **10.** 60°. **11.** б) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$. **12.** $l = \frac{nh}{\sin\alpha}$. **13.** ≈ 84°. **14.** $8\sqrt{2}$ см. **15.** а) 7; ә) 5. **16.** $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$. **17.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **18.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ә) $\frac{b\sqrt{21}}{7}$. **19.** $32\sqrt{3}$. **20.** 6. **21.** а) 4; ә) 6; б) 4. **23.** а) 8; ә) 12; б) 6; в) 3. **24.** а) 270°; ә) 180°. **25.** в). **26.** а) 4 см; ә) $4\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{3}$ см; в) 96 см^2. **28.** Болады. **29.** 22 см. **30.** 26 см. **31.** 10 см. **33.** а) 5; ә) бесбұрыш. **34.** Дұрыс тұжырымдар: а), б), г). **35.** ә) Бар. **37.** б) Ақиқат емес. **39.** Болмайды. **42.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; ә) 45°. **44.** ә) Тікбұрышты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедінде $AD = a$, $CD = b$, $DD_1 = c$ болсын. AB_1D, CB_1D, D_1B_1D – гипотенузасы $B_1D = d$ болатын тікбұрышты үшбұрыштар. a, b, c катеттерінің d гипотенузасындағы проекцияларын сәйкесінше a_1, b_1, c_1 деп белгілеңдер және тікбұрышты үшбұрыштың катетінің қасиетін пайдаланып (катет – гипотенуза мен оның проекциясының орта пропорционалы, мысалы, $a^2 = d \cdot a_1$), $a^2 + b^2 + c^2$ қосындысын d және a_1, b_1, c_1 арқылы өрнектеңдер. **45.** ≈ 20,9 см. **46.** $\sqrt{6}$ дм^2. **47.** Егер $\operatorname{tg}\alpha \le \frac{h}{a}$ болса, $\frac{a^2}{\cos\alpha}$; егер $\operatorname{tg}\alpha > \frac{h}{a}$ болса, $\frac{ah}{\sin\alpha}$; $0° < \alpha < 90°$. **48.** а) 48 м^2; ә) 180 м^2. **49.** $14\sqrt{3}$. **50.** 2 дм және 4 дм. **51.** а) 188 дм^2; ә) $(120\sqrt{3} + 230)$ м^2. **52.** а) 78 дм^2; ә) 1320 см^2. **53.** а) $96\sqrt{3}$ см^2; ә) $(12\sqrt{3} + 24)$ дм^2. **54.** а) $(40\sqrt{2} + 126)$ см^2; ә) 200 см^2. **55.** а) 45 см^2; ә) $(20\sqrt{2} + 40)$ см^2. **56.** а) $(64\sqrt{3} + 24)$ м^2; ә) $(40\sqrt{13} + 60)$ см^2. **57.** а) 48 м^2; ә) 336 дм^2. **58.** $(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)$ дм^2. **59.** а) 96 см^2; ә) $(16\sqrt{3} + 64)$ см^2. **60.** $(60\sqrt{2} + 72)$ м^2. **61.** $(64\sqrt{91} + 512)$ см^2. **62.** 30 табақ. **64.** а) 17 см; ә) $4\sqrt{2}$ дм. **65.** а) 60°; ә) 45°; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ см. **66.** а) 6 см; ә) 60°; б) $2\sqrt{6}$ см. **67.** а) $4\sqrt{2}$ см; ә) $75\sqrt{3}$ см^2. **68.** 4 см. **69.** $(150\sqrt{3} + 240)$ см^2. **70.** а) 36 м^2; ә) $16\sqrt{3}$ м^2. **71.** а) 230 см^2; ә) $50\sqrt{2}$ см^2. **72.** а) ≈ 82 300 м^2; ә) ≈ 8595 м^2. **73.** а) $24\sqrt{3}$ см^2; ә) $12\sqrt{39}$ см^2. **74.** $16\sqrt{2}$ дм^2. **75.** а) 45°; ә) $8\sqrt{3}$ дм^2. **76.** Екінші пирамиданың бүйір бетінің ауданы үлкен. **78.** а) $5\sqrt{3}$ дм, биіктіктің табаны – гипотенузаның ортасы; ә) 8 см, биіктіктің табаны – осы доғал бұрышты үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі. **79.** 3 м. **81.** $\approx 13{,}7$ см. **82.** $(63 + 9\sqrt{21})$ м^2. **83.** $(2 + \sqrt{2})$ дм^2. **84.** а) $64\sqrt{3}$ см^2; ә) $4\sqrt{7}$ дм^2. **85.** а) $(63\sqrt{5} + 56)$ см^2; ә) 245 дм^2. **86.** $\approx 16{,}5$ м^2. **87.** $\sqrt{17 \cdot (17 - 2m)}$ см, $0 < m < 8{,}5$. **88.** $a^2 \cdot \sin\beta \cdot \mathrm{ctg}\left(45^\circ - \dfrac{\varphi}{2}\right)$. **89.** $\dfrac{c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$. **91.** а) Ақиқат; ә) мүмкін; б) жоқ. **92.** ә) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$. **93.** Ақиқат. **94.** а) $2\sqrt{2}$ см; ә) 24 см^2. **95.** 4 см. **96.** 14 см. **97.** а) $(52 + 40\sqrt{3})$ см^2; ә) $43\sqrt{3}$ см^2. **98.** а) $(100 + 140\sqrt{2})$ см^2; ә) $276\sqrt{3}$ см^2. **99.** а) $360\sqrt{3}$ см^2; ә) $180\sqrt{3}$ см^2. **100.** 280 дм^2. **101.** а) $126\sqrt{3}$ см^2; ә) $64\sqrt{2}$ см^2. **102.** 32 см^2 және 200 см^2. **103.** $(20\sqrt{3} + 90)$ см^2. **104.** 360 см^2. **105.** $(18 + 6\sqrt{3})$ дм^2. **106.** а) 211,68 см^2. **107.** 11 см. **108.** $108\sqrt{3}$ см^2, $432\sqrt{3}$ см^2. **109.** 2. **110.** ≈ 35 м. **111.** Ақиқат. **112.** 294 см^2. **113.** $4{,}5\sqrt{7}$ дм^2. **114.** $27\sqrt{15}$ см^2. **115.** 72 см^2. **116.** $\dfrac{3b^2}{2}$. **117.** $\approx 35^\circ$. **118.** а) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})h(p + q)$; ә) $(1{,}5m^2 - 0{,}5n^2)(\sqrt{2} + 1)$. **120.** ә) – бар болады; а), б), в), г) – жоқ. **121.** а), ә) – жоқ; б) $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ шарты орындалса, бар болады; в) бар болады. **122.** ә). **123.** Мысалы, $PABCD$ төртжақты бұрышында APC қимасы оны екі үшжақты бұрышқа бөледі, сонда: $\angle APD < \angle APC + \angle DPC$, $\angle APC < \angle APB + \angle BPC$. Әрі қарай осы теңсіздіктердің сол және оң жақтарын қосыңдар. **124.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$; $\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **126.** а) $\arccos\dfrac{1}{3}$; ә) $\mathrm{arctg}\, 2\sqrt{3}$. **127.** 90°, осы бұрыштың қырларына оның төбесінен бастап $PA_1 = PB_1 = PC_1 = PD_1$ кесінділерін салыңдар, сонда $PA_1B_1C_1D_1$ дұрыс... **128.** $(222 + 6\sqrt{481})$ см^2. **129.** $5\sqrt{3}$ дм^2. **131.** $2\arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{7}$. **132.** Мұндай тетраэдрдің бетінің жазбасы – AB, BC, AC кесінділері орта сызықтары болатын үшбұрыш. **133.** $2\arcsin\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$. Бүйір қырын табан қабырғасы мен көрсетілген бұрыштар арқылы өрнектеп, тригонометриялық теңдеу құрыңдар. **134.** а) $2\arcsin\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$; ә) $2\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\beta}$. Табан қабырғасы a-ға, ізделінді бұрыш x-ке тең болсын, сонда: а) бүйір қырын a мен $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ арқылы өрнектеп, $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$-ні табыңдар; ә) мысалы, SC қырына перпендикуляр DK-ны a мен $\sin\dfrac{\beta}{2}$ арқылы өрнектеп, ΔDKC-дан $\sin C$-ны табыңдар. $\angle C = 90^\circ - \dfrac{x}{2}$ болатынын ескере отырып, x-ті табыңдар. **135.** а), ә) Ақиқат емес, сондай көпжақтарға мысал келтіріңдер. **137.** а) Болмайды; ә) болады. **138.** а) 180°; г) 324°. **139.** а) Болмайды; ә), б) болады. **140.** $\sqrt{3}$. **141.** а) 60° немесе 90°;

ә) $-\frac{1}{3}$. **143.** а) 2 см; ә) $2\sqrt{2}$ см. **144.** $\frac{1}{2}$. **145.** а) Болмайды; ә) 1 дм. **146.** $9\sqrt{3}$ м^2. **147.** а) 3 см; ә) 4 см. **148.** $2\sqrt{3}$ м^2. **149.** $\frac{1}{9}$. **150.** $16\sqrt{3}$ дм^2. **152.** Қимасы – дұрыс алтыбұрыш, $S_{\text{қима}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **153.** $\frac{a^2}{16} \cdot (4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{11})$. **154.** $(32 + 96\sqrt{3})$ см^2. **156.** Болады, мысалы, дұрыс икосаэдрдің барлық жақтарына дұрыс тетраэдрлер тұрғызса, онда көрсетілген көпжақ шығады. **157.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{4}$. Көрсетілген қиманы – $BMPN$ төртбұрышын ($P \in DD_1$) салыңдар. $CE \perp BM$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы E – AB-ның ортасы, сонда $\angle NFC$ ізделінді ($F = CE \cap BM$). Кубтың қырын белгілеп, CE мен CF-ті өрнектеңдер. Тікбұрышты үшбұрыштағы пропорционал кесінділер туралы теореманы пайдаланыңдар: $BC^2 = CE \cdot CF$. **158.** $\frac{4b^2}{3}$. **159.** Төбелері октаэдрдің центрінде, табандары оның көрсетілген жақтарында болатын пирамидаларды қарастырыңдар; $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. **160.** а) 588 см^2; ә) $3\sqrt{2}$ м^2. **161.** а) $(\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$ дм^2; ә) $32\sqrt{2}$ см^2. **162.** $(a + b + c)n$. **163.** $(6\sqrt{3} + 4)$ дм^2. **164.** $3a^2$. **165.** а) 48 см^2; ә) $84\sqrt{2}$ см^2. Фигураның аудандары мен оның жазықтықтағы ортогональ проекциясының арасындағы байланысты пайдаланыңдар: $S_{\text{таб.}} = S_{\text{б.б.}} \cdot \cos\varphi$. **166.** $20\sqrt{3}$ см^2, $10\sqrt{7}$ см^2. **167.** $180\sqrt{39}$ см^2. **168.** $6\sqrt{6}$ дм^2. **169.** $2a^2\sin\frac{\varphi}{2}$; BB_1D_1D тіктөртбұрыш болатынын анықтаңдар. **170.** $96(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ дм^2. **171.** $1002\frac{6}{7}$ см^2. **173.** а) $d^2 - l^2$; ә) $\frac{2Q\sqrt{2}}{\sin\beta}$. **174.** $d^2\sqrt{2}$. Бүйір бетінің ауданының квадратын a айнымалысына (мұндағы a – табан қабырғасы) тәуелді функция ретінде қарастырып, оның ең үлкен мәнін табу үшін зерттеңдер. **175.** $4{,}5\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}$, $30° < \alpha < 90°$. **176.** $(1280 \cdot \sin\varphi)$, $0 < \varphi < 36°$. **177.** $\frac{m^2\sqrt{3}}{8}$. Ізделінді қима екі тең тікбұрышты үшбұрыштан тұратынын анықтаңдар. **178.** 1). **179.** 3). **180.** 3). **181.** 4). **182.** 2). **183.** 1). **184.** 2). **185.** 4). **186.** 1). **187.** 4). **188.** а) 7 жағы, 15 қыры, 10 төбесі; ә) 7 жағы, 12 қыры, 7 төбесі. **189.** 384 см^2. **190.** 57 м^2. **191.** а) $(256 + 64\sqrt{3})$ см^2. **192.** а) 90°; ә) $2\sqrt{3}$ см. **193.** 16 см^2. **194.** $\frac{64\sqrt{6}}{6}$ см^2, $\frac{32\sqrt{15}}{3}$ см^2. **195.** 315 м^2. **196.** 26 м^2. **197.** Ең үлкен аудан икосаэдрдікі, ең кіші октаэдрдікі. **198.** а) 6; ә) 7. **199.** а) 2 және 3; ә) 4 және 5. **200.** 2. **201.** $3\sqrt{3}$. **202.** а) 2030; ә) 5. **203.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ә) $1\frac{2}{3}$. **204.** 3. **205.** $d_A = d_{B_1} = d_{D_1} = d_{A_1} = \sqrt{3}$,

$d_{C_1} = d_B = d_D = 3\sqrt{3}$, $d_C = 5\sqrt{3}$. **206.** $9\sqrt{3}$. **207.** $\frac{6\sqrt{26}}{13}$. **208.** $\frac{8}{3}$. **209.** $\approx 6{,}6$ см. **210.** $\frac{62\sqrt{3}}{3}$ м. **211.** ΔABC тікбұрышты болатынын анықтаңдар. M гипотенузаның ортасы болсын, $OM = \frac{5\sqrt{6}}{2}$; $OH \perp (ABC)$, $OH = 5$. **212.** $x + y + z + 2 = 0$ және $x + y + z - 4 = 0$. **213.** а) 10; ә) $2\sqrt{7}$. **214.** а) $\frac{15\sqrt{53}}{53}$; ә) $\frac{8\sqrt{11}}{11}$. **215.** $d_{A_1} = d_{C_1} = d_D = 3$, $d_A = d_{B_1} = d_C = 9$, $d_B = 15$. **216.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **217.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ΔABC теңқабырғалы болатынын анықтаңдар. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің P центрінің координаталарын табу үшін, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ формуласын пайдаланыңдар, мұндағы O – координаталар басы. **219.** а) $\arccos\frac{8}{9}$; ә) $\arccos\frac{6}{91}$. **220.** а) 45°; ә) 30°. **221.** а) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; ә) $\arccos\sqrt{\frac{5}{149}}$. **222.** а) 45°, 45°, 90°; ә) 1) $\arccos\frac{7}{\sqrt{85}}$; 2) 45°. **223.** $\approx 32°$. **224.** $\arccos\frac{9}{13}$. **225.** 60°. **226.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{13}}$. **227.** а) $\arccos\frac{7}{3\sqrt{10}}$; ә) $\arccos\frac{3}{\sqrt{410}}$. **228.** $\approx 71°$. **229.** а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; ә) $\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$; б) $\arccos\sqrt{\frac{8}{11}}$. **231.** а) 90°; ә) $\arccos\frac{1}{3}$. **232.** а) 90°; ә) $\approx 32°$. **233.** $\approx 61°$. **234.** $\arccos\frac{6\sqrt{2}}{13}$. **235.** $\approx 41°$. **236.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{11}}$. **237.** а) $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$; ә) $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **238.** а) 60°; ә) 60°. **239.** а) $\arcsin\frac{4}{49}$; ә) $\arcsin\frac{26}{35}$. **240.** а) 0°; ә) 90°. **242.** а) $\arcsin\frac{2}{7}$; ә) $\arcsin\frac{6}{7}$. **243.** а) $\arcsin\frac{1}{3}$; ә) $\arcsin\frac{4}{9}$. **244.** а) 45°; ә) $\arccos\frac{4}{9}$; б) 90°; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$. **245.** $\arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **246.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$; ә) $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$. **247.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **248.** а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$; ә) $\arccos\frac{1}{3}$. **249.** $\approx 80°$. **250.** $\approx 40°$. **251.** $\arcsin\frac{2\sqrt{30}}{15}$. **252.** 30°. **253.** а) $-2x - 11y + 5z - 19 = 0$; ә) $4x + y - 5z + 7 = 0$. **254.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}$. **255.** а) $\approx 49°$; ә) $\approx 64°$. **256.** $3x - 5y - 3z + 18 = 0$. **257.** Жатады. **258.** Егер $A(5; 4; 3)$ болса, онда $l = 5$. **259.** а) 0; ә) ± 1. **260.** ± 2. **261.** а) $\arccos\frac{13}{21}$; ә) 90°;

б) $\arccos\frac{16}{17}$. **262.** а) $\frac{12}{\sqrt{33}}$; ә) 45°; б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. **263.** Екі жазықтық: $x + 9 = 0$ және $x - 9 = 0$. **264.** $4\sqrt{2}$. **265.** 14,4. **266.** $55 + 15\sqrt{5}$. **267.** Болады, $l = 4\sqrt{3}$. **268.** 503 < (≈ 585) < 1022. **269.** а) ±1; ә) $\pm\sqrt{6}$. **270.** $2x - 2y - 2z + 31 = 0$ жазықтығы. **271.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **272.** 60°. **273.** а) $\sqrt{2}$; ә) $\frac{\sqrt{122}}{3}$. ΔCPM-нің түрін анықтаңдар. **274.** 3). **275.** 2). **276.** 3). **277.** 4). **278.** 5). **279.** 1). **280.** 1). **281.** $-3x + 3y - 4z + 2 = 0$. **282.** $\arccos\frac{8}{17}$. **283.** 90°. **284.** а) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; ә) $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$; б) $\arccos\frac{1}{9}$. **285.** ә)-суретте. **286.** Болмайды. **288.** а) Ақиқат; ә) ақиқат емес, мысал келтіріңдер. **289.** а) 8 см; ә) 12 см. **290.** а) 1 см; ә) 10 см. **291.** а) 192 см^2; ә) $8\sqrt{10}$ см. **292.** 12 см. **293.** $6\sqrt{3}$ см. **294.** 10 дм^2. **295.** 17 дм^2. **296.** $8\sqrt{2}$ см. **297.** 8 дм. **300.** 7,5 см. **301.** $2d$, $2d$. **302.** 75° немесе 15°. **303.** 7 см. **304.** $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **305.** а) 13 см; ә) $\operatorname{arctg}\frac{l}{2r}$. **306.** $r < 2$ немесе $r > 2\sqrt{2}$ болғанда, біреу де емес; $r = 2$ немесе $r = 2\sqrt{2}$ болғанда, 4; $2 < r < 2\sqrt{2}$ болғанда, 8. **307.** Болмайды. **308.** б)-суретте. **309.** Болады. **310.** а) 224π см^2; ә) 168π см^2. **311.** 150π см^2. **312.** 4π дм^2. **313.** $\frac{3}{2}\pi h^2$. **314.** а) $\sqrt{2}$ м; ә) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ м. **315.** 24π дм^2. **316.** $\frac{9}{\pi^2}$ дм^2. **317.** а) $\left(\frac{1}{2\pi} + 1\right)$ дм^2; ә) $\left(\frac{6}{\pi} + 4\sqrt{3}\right)$ дм^2. **318.** $32\pi(1 + \sqrt{2})$ см^2. **319.** Жетеді. **320.** а) π; ә) $2Q + \pi S$. **321.** 4,5 см. **322.** $\frac{a\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg}\alpha}{2(3\operatorname{tg}\alpha + 1)}$. **323.** $\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3}\pi b^2$. **324.** $h = \frac{P}{4}$, $R = \frac{P}{8}$. **325.** $\frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}}$. Фигураның және оның ортогональ проекциясы аудандарының арасындағы байланысты пайдаланыңдар. **326.** $3\pi a^2$. **328.** 16π см^2 және 64π см^2. **329.** а) 6 см және $6\sqrt{2}$ см; ә) 4 см және 8 см. **330.** Ақиқат. **331.** а) $3\sqrt{7}$ см^2; ә) $4\sqrt{15}$ см^2. **332.** ≈ 53°. **333.** ≈ 7,4 см. **334.** $24\sqrt{2}$ см^2. **335.** 2,4 дм. **336.** 2,5 см. **337.** а) $(\sqrt{2} - 1)$ дм; ә) $\frac{1}{3}$. **338.** $2\pi h^2$. **339.** а) 104 см^2; ә) 15°. **340.** а) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ м; ә) $(\sqrt{3} - 1{,}5)$ м. **341.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **342.** а) Мүмкін емес; ә) мүмкін. **343.** 1 : 2 : 3. **344.** а) 60π дм^2; ә) $16\pi\sqrt{2}$ дм^2. **345.** ≈ 15,7 м^2. **346.** а) 60°; ә) ≈ 71°. **347.** 2 дм. **348.** а) 180°; ә) 216°. **349.** 13 см және $\left(138\frac{6}{13}\right)^\circ$. **350.** $12\sqrt{3}$ дм^2. **351.** а) $64\pi\sqrt{3}$ см^2; ә) $67{,}2\pi$ см^2. **352.** а) 32π см^2; ә) $8\pi(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см^2. **353.** arctg 2. **354.** $\frac{a}{2}\sqrt{6 + 4\sqrt{3}}$. **355.** 30π дм^2. **356.** $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **357.** $\frac{10}{3}(\sqrt{6} +$

$+\sqrt{2}$), $\frac{10}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. **358.** 176 см^2. **359.** а) 3 м; ә) $\sqrt{3}$ м. **360.** а) 2,4 дм; ә) 6 дм. **361.** а) 2 см және 6 см; ә) $4\sqrt{2}$ см. **362.** а) 9π см^2; ә) 4 см және 12 см. **363.** Жарайды. **364.** $\approx 1{,}67$ м. **365.** 4 см және 8 см. **366.** а) 54 см; ә) 1 м. **367.** $0{,}5l\cdot\cos\varphi$, $1{,}5l\cdot\cos\varphi$. **368.** $\frac{\pi}{4}$. **369.** $\frac{S\cdot\sin\alpha}{\sin\varphi}$. **370.** 64π см^2. **371.** 167π см^2. **372.** 308π см^2. **373.** 4 см және 10 см. **374.** а) ≈ 853 см^2; ә) ≈ 377 см^2. **375.** Бар болады, мысал келтіріңдер. **376.** $72\pi\sqrt{3}$ см^2. **377.** $10\pi\sqrt{2}$ см^2. **378.** $\approx 23{,}7$ см. **379.** $24\pi\sqrt{6}$ см^2. **380.** $96\pi(1+\sqrt{3})$см^2. **381.** 60°. **382.** $10{,}8\sqrt{6}$ см; жетпейді. **383.** ≈ 10 см. **384.** а) 8 см; ә) $2\sqrt{3}$ см. **385.** а) 192π см^2; ә) 16π см^2. **386.** $36\sqrt{3}$ см^2. **387.** 8 см. **388.** Болады. **389.** а) yOz жазықтығын қияды; ә) 4. **390.** Жазықтық: а) сфераны қияды; ә) онымен жанасады; б) онымен ортақ нүктесі болмайды. **391.** а) $x+2y+2z-9=0$; ә) $x-2y-2z-9=0$. **392.** $3x-4y+12z=0$. **393.** 5 см. **394.** 12 см. **395.** 12 см. **396.** а) $2\sqrt{7}$ дм; ә) 9,6 см. **397.** 7 см, 9 см, 11 см. **398.** $4\sqrt{2}$ см. **399.** $\approx 20\,000$ км. **400.** 10 см. **401.** а) $5\sqrt{2}$ см; ә) $4\sqrt{13}$ см. **402.** а) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$; ә) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$ см. **403.** а) $OA=OB=OC=13$ см; ә) $OM=ON=OL=2{,}6$ см. **404.** 4 см. **405.** а) $36\sqrt{2}$ см^2; ә) 8 см. **406.** ә) 80π мм. **407.** ә) 5 см. **409.** (0; arcsin 0,6]. **410.** а) Ақиқат; ә) 9 есе үлкейеді. **411.** 32π см^2. **412.** $13\frac{4}{9}$. **413.** 164π см^2. **414.** а) Екі шарды никельдеуге; ә) тетраэдрдің толық бетінің ауданы. **415.** $\approx 20\,106$ м^2. **416.** 44π. **417.** 48π см^2. **418.** а) 64π см^2; ә) 100π см^2. **420.** $r\sqrt{2}$. **421.** 25π см^2. **422.** 4 см. **423.** а) $\pi r^2\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$; ә) $\frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$. **424.** $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{6}$. **425.** 4 дм^2. **426.** 2 дм. **428.** $(2\sqrt{3}-3)$ см. **429.** $2R\cdot\sin\varphi$. **430.** а) $\frac{1}{6}\pi S$; ә) $\frac{4}{9}Q$. **431.** $2R^2\cdot\sin 2\beta$. **432.** 5 см. **433.** а) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; ә) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. **434.** 36π см^2. **435.** $2R\cos^2\alpha$. **436.** 63 см^2. **438.** 12,8 см немесе 7,2 см. **439.** 12,5 см. **440.** а) 20 см, 7,5 см, 25 см; ә) 45°. **441.** 24π дм^2. **442.** $\sqrt{7}$ см. **443.** 32,5 см. **444.** $\frac{b\cdot\sin\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$. **445.** 1). **446.** 4). **447.** 2). **448.** 3). **449.** 3). **450.** 3). **451.** 1). **452.** 1). **453.** 2). **454.** 5). **455.** 3). **456.** 4). **457.** 2). **458.** 3). **459.** 1). **460.** 4). **461.** 1). **462.** 4). **463.** 1). **464.** $S=6\pi R^2$. **465.** 80π дм^2. **466.** 54π см^2. **467.** 12π см^2. **468.** 180°. **469.** 9π см^2. **470.** $(160\pi+128\pi\sqrt{2})$ см^2. **471.** $4\sqrt{2}$ см. **472.** Аудандары тең. **473.** Ақиқат емес. **474.** 1 см^3. **475.** 2 дм^3. **476.** 45 дм^3. **477.** 20,7 м^3. **478.** 60 см^3. **479.** 72 см^3. **480.** 100 м^3. **481.** $\approx 1{,}5$ м. **482.** 120 см^3. **483.** $420\sqrt{2}$ см^3. **484.** 1 дм немесе $\frac{11-\sqrt{41}}{4}$ дм. **485.** $\approx(27{,}5\times13{,}2\times6{,}6)$ см. **486.** а) $48\sqrt{5}$ см^3; ә) 11 см. **487.** 1080 см^3. **488.** $0{,}5dQ$.

489. а) 105 см^3; ә) 384 см^2. **490.** а) 90°, abh. **491.** а) 1,5 × 3 × 2 м; ә) 4 дм және $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ дм. **492.** а) Тең; ә) тең. **493.** а) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$; ә) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **494.** 81,92 см^3. **495.** 6 дм. **497.** а) 84 дм^3; ә) 21 дм^3. **498.** $121\frac{1}{3}$ м^3. **499.** PCC_1B және PC_1B_1B пирамидаларының көлемдері тең, себебі олардың табандары болатын CC_1B мен C_1B_1B үшбұрыштары тең және P төбесінен жүргізілген биіктігі ортақ. $PABC$ мен PC_1B_1B пирамидаларының көлемдері де тең, себебі, егер олардың табандары ретінде өзара тең APB және PB_1B жақтарын алсақ, оларға C мен C_1 нүктелерінен жүргізілген биіктіктері де тең болады, өйткені $CC_1 \parallel (APB_1)$. Демек, $PABC$, PCC_1B және PC_1B_1B пирамидаларының көлемдері тең. **500.** Болады, мысалы, қиық пирамиданың бүйір қырын қамтитын және табан қабырғасын тең 3 бөлікке бөлетін екі қимасын жүргізсе. **501.** а) 2 590 000 м^3; ә) ақиқат. **502.** 455 т. **503.** 485 см^3. **504.** $\frac{26Q}{3}$. **505.** 72 см^3. **506.** а) 36 дм^3; ә) ≈ 9,7 дм^3. **507.** $27\sqrt{30}$ см^2. **508.** $\frac{7QS}{12b}$. **509.** 1,9 дм^3. **510.** а) $32\sqrt{3}$ см^3; ә) $\frac{9\sqrt{2}}{32}$ дм^3. **511.** Тең емес. Болмайды, себебі көлем ең үлкен болуы үшін қиық пирамиданың табандары тең болуы керек, олай болуы мүмкін емес. **512.** а) $\frac{3}{7}V$ және $\frac{4}{7}V$. **513.** а) 25 есе; ә) 5 есе. **514.** 24 дм^3. **515.** а) 96π см^3; ә) 144π см^3. **516.** 16π см^3. **517.** а) $\frac{128}{\pi}$ см^3; ә) $\frac{3h^2}{4\pi}$. **518.** ≈ 157 см^3. **519.** 21π см^3. **520.** 2 немесе $\frac{1}{2}$. **521.** а) 250π см^3; ә) 128π см^3. **522.** ≈ 1872 г. **523.** $18\pi\sqrt{3}$ дм^3. **524.** $h = r = 5$ см. **525.** $h = 8$ дм, $R = 4$ дм. **527.** $24\pi\sqrt{3}$ см^3. **528.** а) 96π см^3; ә) 324π дм^3. **529.** а) 84π дм^3; ә) $21\pi\sqrt{3}$ дм^3. **530.** 10 л. **531.** $\frac{8}{7}$. **532.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **533.** 1404π см^3. **534.** а) 224π см^3; ә) 457π см^3. **535.** 4. **536.** $18\pi \cdot \sqrt{2(1+\sqrt{2})}$ см^3. **537.** 96π дм^3. Конустың h биіктігін оның табанының R радиусы арқылы өрнектеңдер, ол үшін конустың толық бетінің ауданын біле отырып және оның осьтік қимасының ауданын екі тәсілмен өрнектеп, $l + R$ (l – конустың жасаушысы) табыңдар. **538.** $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\pi}{3}(14 - 7\sqrt{3})$ дм^3. **539.** $\frac{8}{3}\pi R^3$. **540.** $13\frac{1}{3}$ дм. **541.** 8 есе. **542.** $\sqrt[3]{35}$ см. **543.** $4{,}5\pi$ дм^3. **544.** а) 36π см^3; ә) $\frac{9\pi}{16}$ см^3. **545.** $\frac{9\pi}{32}$ дм^3. **546.** $V_4 = V_1 + V_2 + V_3$. **547.** $\frac{32\pi}{3}$ дм^3. **548.** а) 36π см^3; ә) $\frac{343\pi}{6}$ дм^3. **549.** а) 3 см; ә) ≈ 4,4 см. **550.** а) ≈ 0,10 м^3; ә) 3 дм немесе $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ дм. **551.** а) $\frac{64}{3}\pi$ см^3; ә) 450π см^3.

552. а) 36π см^3; ә) $\frac{16-9\sqrt{3}}{3}\pi$ дм^3. **553.** $\frac{1888}{3}\pi$ см^3. **554.** $\approx 4{,}3$ мм. **555.** 972π см^3. **556.** а) 9π дм^3; ә) $\frac{1}{4}$. **557.** $V_{\text{қабаты}} < 2V_{\text{сегм.}}$. **558.** 256π дм^2. **559.** $\frac{32}{3}\pi$ дм^3. **560.** 8. **561.** а) 1728 м^3; ә) 6300 дм^3. **562.** $3\sqrt{2}$ см^3. **563.** $1{,}5a^3\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg}\alpha$. **564.** 36 дм^3. **565.** 243 см^3. **566.** $\frac{2}{3}$ дм^3. **567.** $690\frac{9}{17}$ см^3. **568.** $250\sqrt{3}\pi$ см^3. **569.** $288\pi\sqrt{5}$ см^3. **570.** $121{,}5\pi$ см^3. **571.** $b^3\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. **573.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм. **574.** 6,48 м. **575.** $400\sqrt{5}$ см^3. Призманың бүйір қырын табу үшін (AB_1C_1) мен $(A_1B_1C_1)$ жазықтықтарының арасындағы φ бұрышының косинусын өрнектеңдер және фигураның ауданы мен ортогональ проекциясының арасындағы $S_{A_1B_1C_1} = S_{AB_1C_1}\cdot\cos\varphi$ қатысын пайдаланыңдар. **576.** а) $6\sqrt[6]{48}$ дм^2; ә) $12\sqrt[4]{12}$ см^3. **578.** 2). **579.** 5). **580.** 1). **581.** 2). **582.** 5). **583.** 1). **584.** 2). **585.** 5). **586.** 3). **587.** 4). **588.** 5). **589.** 1). **590.** 3). **591.** 2). **592.** 1). **593.** 5). **594.** 4). **595.** 3). **596.** $a < 3{,}5$ дм. **597.** 5 см. **598.** 60 дм^3. **599.** 2 л. **600.** 63π дм^3. **601.** 96π см^3. **602.** $33\frac{1}{3}$ %. **603.** а) Жоқ; ә) бар. **604.** Болады, қалай екенін түсіндіріңдер. **605.** Ақиқат емес. Дұрыс тұжырым жасаңдар. **606.** а) Жоқ; ә) мүмкін. **607.** а) Жоқ; ә), б) мүмкін. **608.** а) Жоқ, олар айқас түзулер болуы мүмкін; ә) иә; б) жоқ, себебі үшбұрыштардың ортақ төбесі бар екені айтылмаған. **609.** 10 см. **610.** 60° және $18\sqrt{3}$ см^2. **611.** 300 см^3. **612.** а) және ә) ақиқат. **613.** а) Ақиқат; ә) жоқ. **614.** а) $m = 4$; ә) кез келген m үшін; б) m-нің ондай мәндері жоқ. **615.** 300 га. **616.** 40 см. **617.** $(12+8\sqrt{3})\pi$ см^2. **618.** $\frac{r^2+h^2}{2h}$. **619.** $V_{\text{ш}} > V_{\text{пр}}$. **620.** $\frac{5\pi}{24}$ дм^3. **622.** 48. **623.** $(1+\sqrt{3})$ дм^2. **624.** $50\pi\sqrt{2}$ см^2. **625.** 6695 м. Тетраэдрдің табаны ретінде катеттері 5 м және 6 м болатын тікбұрышты үшбұрышты алыңдар, сонда тетраэдрдің биіктігі 1339 м-ге тең болады. **626.** $(300\sqrt{2}+240)$ см^2. **627.** 60° немесе 30°. **628.** $243\pi(7-4\sqrt{3})$ см^2. **629.** 12 см және $2\sqrt{6}$ см немесе 6 см және $4\sqrt{3}$ см. **630.** 27π см^2, $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$ см^3. **631.** $\frac{1}{3}$. **632.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3)\operatorname{tg}\varphi$ немесе $\frac{\sqrt{2}}{24}(m^3-n^3)\operatorname{tg}\varphi$. **633.** а) $r=\frac{2}{3}$ м болғанда, $0{,}5(r^2-r^3)\pi$ м^3; ә) $h = 4$ дм болғанда, $\frac{\pi}{3}(6h^2-h^3)$ дм^3. **634.** $\frac{1}{2}m\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **635.** 5). **636.** 1). **637.** 1). **638.** 3). **639.** 4). **640.** 5). **641.** 3). **642.** 4). **643.** 3). **644.** 5). **645.** 2). **646.** 1). **647.** 4). **648.** 5). **649.** 1). **650.** а) $(18\sqrt{3}+108)$ см^2; ә) $100\sqrt{3}$ см^2. **651.** $80\pi\sqrt{2}$ см^2. **652.** 48 см^2. **653.** $\frac{7\pi\sqrt{7}}{6}$ куб. бірл. **654.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ПӘНДІК КӨРСЕТКІШ

ҚОСЫМША ӘДЕБИЕТ

1. Бадаев С. А., Досанбай П. Т., Мажитова А. Д., Таласбаева Ж. Т. Аналитикалық геометрия. Есептер жинағы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, 2016.

2. Глейзер Г. И. История математики в школе: 9–10 классы. – М.: Просвещение, 1981.

3. Гусев В., Қайдасов Ж., Есенғазин Е. Есептер жинағы: жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныбына арналған оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 2015.

4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

5. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия: жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық + CD. – Көкшетау: Келешек-2030, 2019.

6. Солтан Г. Н., Солтан А. Е., Жумадилова А. Ж. Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған оқулық. Екі бөлімді. 10-сынып (1-б.) – Көкшетау: Келешек-2030 баспасы, 2020.

7. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

Қосалқы беттердегі иллюстрацияларда пайдаланылған фотосуреттер тізімі

1. Кеншілер мәдениет сарайы, Қарағанды қ. – 15 б.

2. Нұрлы Жол – Орта Азиядағы ең ұзын көпір, Павлодар қ. – 67 б.

3. «Астана-Бәйтерек» монументінің шар түріндегі үстіңгі элементі, Нұр-Сұлтан қ. – 89 б.

4. Назарбаев орталығы, Нұр-Сұлтан қ. – 140 б.

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Геометрия

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10 (1-б.), 11 (2-б.) сыныптардың оқушыларына арналған

ОҚУЛЫҚ

Екі бөлімді
11-сынып (2-б.)

+CD

Редакторы	С. Ш. Алибеков
Техникалық редакторы	Р. Н. Максутов
Суретшісі	А. Б. Жусупов
Мұқаба дизайнері	Е. Е. Велькер
Корректорлары	Р. С. Какаманова
	С. А. Абденова

Коды **5**13087

ИП Келешек-2030 баспасы
Қазақстан Республикасы,
020000, Көкшетау қ.
Баспа кеңсесі: Абай к-сі, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (қабылдау бөлімі),
8 (7162) 44-18-74, +7 708 444 18 74,
ұялы тел.: +7 702 781 06 78, +7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz