Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

АЛГЕБРА

Учебник для учащихся 9 класса общеобразовательной школы

+CD

Рекомендовано Министерством образования и науки Республики Казахстан

KELESHEK
2030
КОКШЕТАУ

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
С60

Солтан Г. Н. и др.
С60 **Алгебра:** учебник для учащихся 9 класса общеобразовательной школы + CD / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2019. – 320 с.: ил.

ISBN 978-601-317-424-2

Электронный вариант учебника: http://keleshek-2030.kz/books/algb_9r.php

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

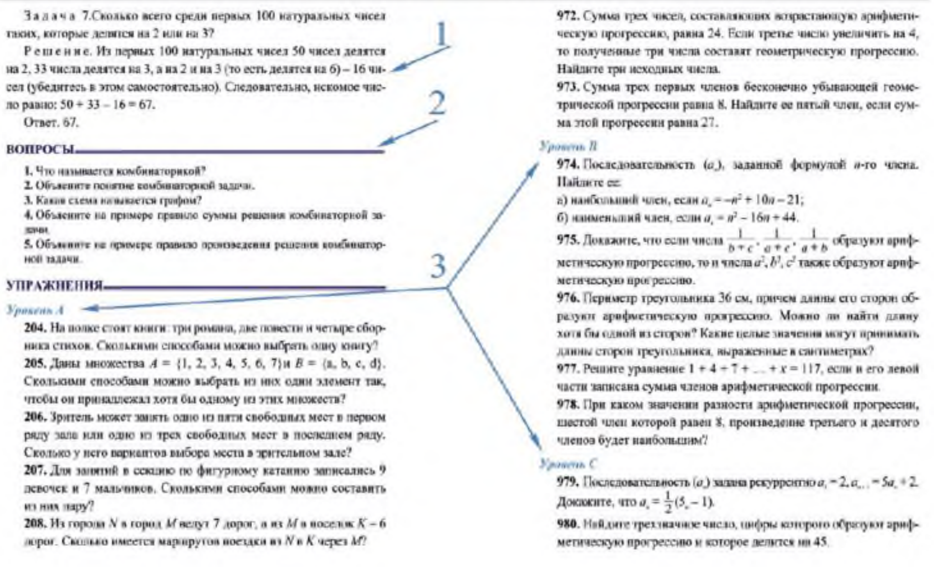
ISBN 978-601-317-424-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие девятиклассники! В этом учебном году вы завершите изучение курса алгебры уровня основного среднего образования. Вы значительно расширите свои знания о методах решения уравнений, неравенств и их систем, тригонометрии и элементах комбинаторики. Кроме того, данный учебник содержит новые разделы: «Последовательности» и «Элементы теории вероятностей», а также материалы для повторения курса алгебры 7–9 классов.

В нем изложена теория, приведены примеры решений упражнений и текстовых задач различной сложности (1). Даны контрольные вопросы для проверки усвоения теоретических знаний (2) и разнообразные упражнения (3) трех уровней сложности (A, B, C) для формирования практических умений и навыков. Среди упражнений имеются исследовательские задания и занимательные задачи.



Задача 7.Сколько всего среди первых 100 натуральных чисел таких, которые делятся на 2 или на 3?

Решение. Из первых 100 натуральных чисел 50 чисел делятся на 2, 33 числа делятся на 3, а на 2 и на 3 (то есть делятся на 6) – 16 чисел (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, искомое число равно: 50 + 33 – 16 = 67.

Ответ. 67.

ВОПРОСЫ

1. Что называется комбинаторикой?
2. Объясните понятие комбинаторной задачи.
3. Какая схема называется графом?
4. Объясните на примере правило суммы решения комбинаторной задачи.
5. Объясните на примере правило произведения решения комбинаторной задачи.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

204. На полке стоят книги: три романа, две повести и четыре сборника стихов. Сколькими способами можно выбрать одну книгу?

205. Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$. Сколькими способами можно выбрать из них один элемент так, чтобы он принадлежал хотя бы одному из этих множеств?

206. Зритель может занять одно из пяти свободных мест в первом ряду зала или одно из трех свободных мест в последнем ряду. Сколько у него вариантов выбора места в зрительном зале?

207. Для занятий в секцию по фигурному катанию записались 9 девочек и 7 мальчиков. Сколькими способами можно составить из них пару?

208. Из города N в город M ведут 7 дорог, а из M в поселок K – 6 дорог. Сколько имеется маршрутов поездки из N в K через M?

972. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 24. Если третье число увеличить на 4, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите три исходных числа.

973. Сумма трех первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 8. Найдите ее пятый член, если сумма этой прогрессии равна 27.

Уровень B

974. Последовательность (a_n), заданной формулой n-го члена. Найдите ее:

а) наибольший член, если $a_n = -n^2 + 10n - 21$;

б) наименьший член, если $a_n = n^2 - 16n + 44$.

975. Докажите, что если числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то и числа a^2, b^2, c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

976. Периметр треугольника 36 см, причем длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли найти длину хотя бы одной из сторон? Какие целые значения могут принимать длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах?

977. Решите уравнение $1 + 4 + 7 + ... + x = 117$, если в его левой части записана сумма членов арифметической прогрессии.

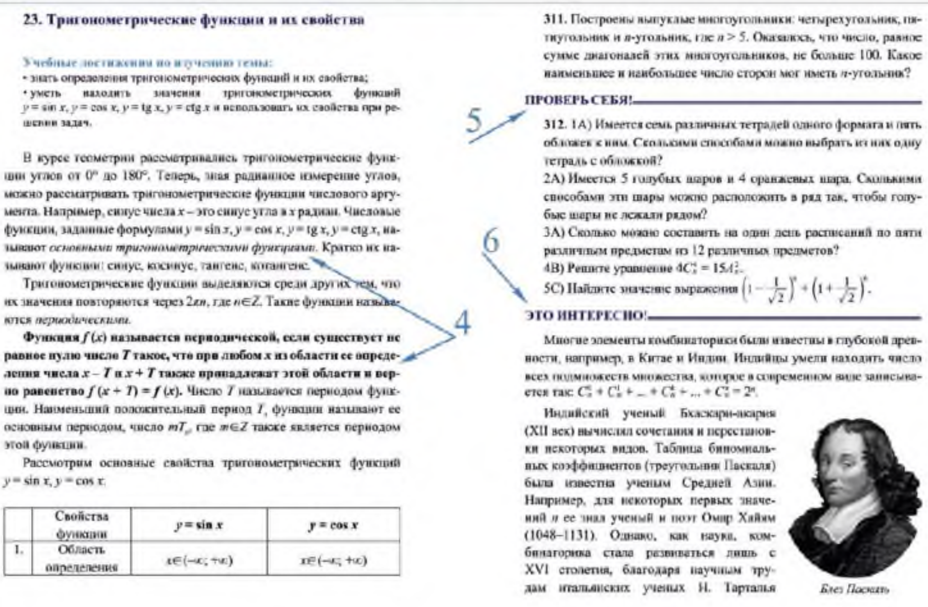
978. При каком значении разности арифметической прогрессии, шестой член которой равен 8, произведение третьего и десятого членов будет наибольшим?

Уровень C

979. Последовательность (a_n) задана рекуррентно $a_1 = 2, a_{n+1} = 5a_n + 2$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{2}(5_n - 1)$.

980. Найдите трехзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию и которое делится на 45.

Определения, формулы и алгебраические правила выделены разными начертаниями шрифта (4). В конце разделов предлагаются задания для повторения учебного материала и подготовки к сумматиному оцениванию под рубрикой «Проверь себя!» (5), а также исторические сведения (6). В этих сведениях имеются указания для расширения ваших знаний по истории алгебры с использованием дополнительной литературы или Интернета.



23. Тригонометрические функции и их свойства

Учебные достижения по изучению темы:
- знать определения тригонометрических функций и их свойства;
- уметь находить значения тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$ и использовать их свойства при решении задач.

В курсе геометрии рассматривались тригонометрические функции углов от 0° до 180°. Теперь, зная радианное измерение углов, можно рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Например, синус числа x – это синус угла в x радиан. Числовые функции, заданные формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$, называют *основными тригонометрическими функциями*. Кратко их называют функции: синус, косинус, тангенс, котангенс.

Тригонометрические функции выделяются среди других тем, что их значения повторяются через $2\pi n$, где $n \in Z$. Такие функции называются *периодическими*.

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует не равное нулю число T такое, что при любом x из области ее определения числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и верно равенство $f(x + T) = f(x)$. Число T называется периодом функции. Наименьший положительный период T_0 функции называют ее основным периодом, число mT_0, где $m \in Z$ также является периодом этой функции.

Рассмотрим основные свойства тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.

	Свойства функции	$y = \sin x$	$y = \cos x$
1.	Область определения	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$

311. Построены выпуклые многоугольники: четырехугольник, пятиугольник и n-угольник, где $n > 5$. Оказалось, что число, равное сумме диагоналей этих многоугольников, не больше 100. Какое наименьшее и наибольшее число сторон мог иметь n-угольник?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

312. 1A) Имеется семь различных тетрадей одного формата и пять обложек к ним. Сколькими способами можно выбрать из них одну тетрадь с обложкой?

2A) Имеется 5 голубых шаров и 4 оранжевых шара. Сколькими способами эти шары можно расположить в ряд так, чтобы голубые шары не лежали рядом?

3A) Сколько можно составить на один день расписаний по пяти различным предметам из 12 различных предметов?

4B) Решите уравнение $4C_x^4 = 15A_x^2$.

5C) Найдите значение выражения $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Многие элементы комбинаторики были известны в глубокой древности, например, в Китае и Индии. Индийцы умели находить число всех подмножеств множества, которое в современном виде записывается так: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Индийский ученый Бхаскари-акария (XII век) вычислил сочетания и перестановки некоторых видов. Таблица биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля) была известна ученым Средней Азии. Например, для некоторых первых значений n ее знал ученый и поэт Омар Хайям (1048–1131). Однако, как наука, комбинаторика стала развиваться лишь с XVI столетия, благодаря научным трудам итальянских ученых Н. Тарталья

Блез Паскаль

В учебнике использованы данные Комитета по статистике Министерства национальной экономики РК и материалы о достопримечательностях Казахстана, знания о которых вы можете расширить, используя Интернет.

К упражнениям даются ответы, а к поиску решения более трудных из них – указания.

Надеемся, что учебник, который вы держите в руках, будет вам надежным помощником в изучении алгебры.

Желаем успехов!

Авторы

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА

Арифметический квадратный корень и его свойства

$\sqrt{a} = b$, где $b^2 = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in R$.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geq 0$, $b > 0$.

Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b \geq 0$.

График функции $y = \sqrt{x}$ и ее свойства

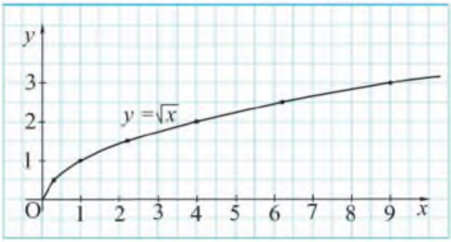


Рисунок 1

Свойства функции $y = \sqrt{x}$ (рисунок 1):

1) $D(y) = [0; +\infty)$;

2) $E(y) = [0; +\infty)$;

3) является возрастающей;

4) наименьшее значение равно 0.

Квадратное уравнение и его корни

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x = \frac{-b}{2a}$	Нет корней

Формула корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

$$ax^2 + 2kx + c = 0, a \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$,
то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – его корни.

Квадратичная функция и ее свойства

График функции $\boldsymbol{y = a(x - m)^2 + n}$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ сдвигами его вдоль оси абсцисс на m единиц и вдоль оси ординат на n единиц (рисунок 2). При этом: если $m > 0$, сдвиг по оси Ox происходит вправо, а при $m < 0$ – влево; если $n > 0$, то сдвиг по оси Oy происходит вверх, если же $n < 0$ – вниз. После таких перемещений **вершина** параболы имеет координаты $\boldsymbol{(m; n)}$, а ее **ось симметрии** задается уравнением $\boldsymbol{x = m}$.

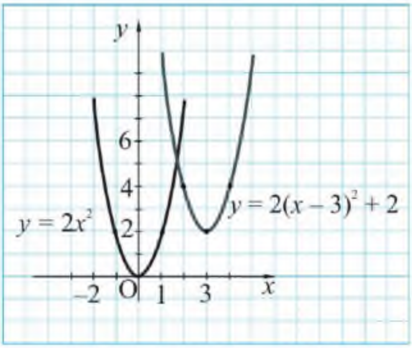


Рисунок 2

Графиком квадратичной функции $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ является парабола, **вершина** которой – точка $\boldsymbol{(x_0; y_0)}$, где $\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}$, $\boldsymbol{y_0 = y(x_0)}$. Прямая $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ – **ось симметрии** параболы.

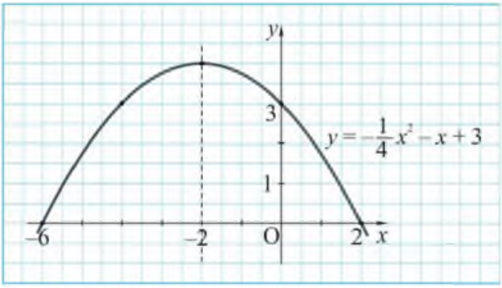


Рисунок 3

Например, на рисунке 3 изображен график функции $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$. Ее свойства:

1) область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;

2) множество значений: $E(y) = (-\infty; 4]$;

3) функция возрастает при $x \in (-\infty; -2]$ и убывает при $x \in [-2; +\infty)$;

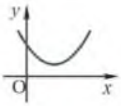
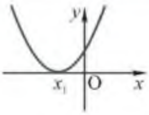
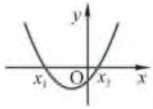
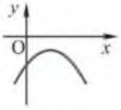
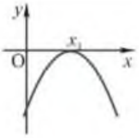
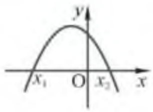
4) промежутки знакопостоянства функции: $y > 0$ при $x \in (-6; 2)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$;

5) наибольшее значение функции равно 4.

Квадратное неравенство

1) $ax^2 + bx + c > 0$

2) $ax^2 + bx + c \le 0$

$a > 0$ $D < 0$  1) $x \in (-\infty; +\infty)$; 2) Нет решений.	$a > 0$ $D = 0$  1) $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$; 2) $x = \{x_1\}$.	$a > 0$ $D > 0$  1) $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; 2) $x \in [x_1; x_2]$.
$a < 0$ $D < 0$  1) Нет решений; 2) $x \in (-\infty; +\infty)$.	$a < 0$ $D = 0$  1) Нет решений; 2) $x \in (-\infty; +\infty)$.	$a < 0$ $D > 0$  1) $x \in (x_1; x_2)$; 2) $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

Элементы статистики

Среднее арифметическое выборочных данных $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначается $\overline{x}$, а сумма всех рассматриваемых значений – прописной буквой Σ (сигма) греческого алфавита. В этих обозначениях можно записать, что $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, где i принимает все натуральные значения от 1 до n. Для интервального ряда в качестве выборочных данных $x_1, x_2, \dots, x_n$ берутся середины интервалов.

При исследовании характеристик выборочных данных рассматривают их отклонения от среднего арифметического, то есть разности между данными величинами и этим средним. Указанные разности принимают положительные или отрицательные значения, или равны 0, поэтому для оценки рассеивания многочисленных данных около их среднего арифметического используются не сами эти разности, а их квадраты.

Среднее арифметическое квадратов всех разностей между данными величинами и их средним арифметическим называется ***дисперсией*** (в переводе – рассеивание) и обозначается σ^2 (σ – строчная буква сигма греческого алфавита): $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$

Для того чтобы характеристика рассеивания и данные x_i имели одинаковую размерность, из дисперсии извлекают квадратный корень. **Квадратный корень из дисперсии называется стандартным отклонением:** $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}}$.

Сведения из курса алгебры 7 класса

Степени с целыми показателями

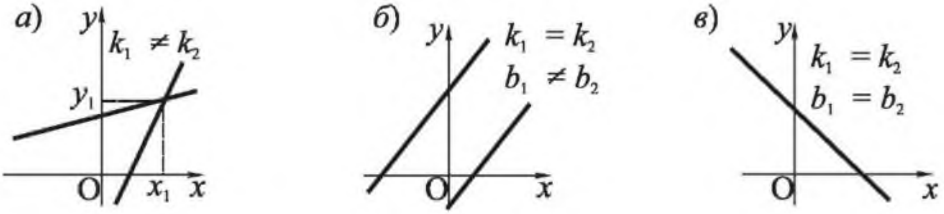
Определение	Свойства
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, n \in N, n > 1;$ $a^1 = a; a^0 = 1, a \neq 0;$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in N, a \neq 0.$	$a^p \cdot a^k = a^{p+k}, a^p : a^k = a^{p-k},$ $(a^p)^k = a^{p \cdot k}, (ab)^p = a^p \cdot b^p,$ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$, где $a \neq 0, b \neq 0,$ $p \in Z, k \in Z.$

Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Решение систем двух линейных уравнений

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



$(x_1; y_1)$ – *одно решение* *нет решений* *бесконечно много решений*

Рисунок 4

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

1. Укажите верные равенства:

а) $\sqrt{16} = \pm4$; в) $(\sqrt{4^2})^2 = 16$;

б) $\sqrt{121} = 11$; г) $\sqrt{17^2 - 2^2} = 15$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{49} - \sqrt{1,44}$; в) $(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} + \sqrt{3\frac{6}{25}} + \sqrt{12,5} \cdot \sqrt{2}$; г) $\sqrt{145^2 - 24^2}$.

3. Сравните числа:

а) $5\sqrt{3}$ и $6\sqrt{2}$; в) $0,6\sqrt{0,4}$ и $0,8\sqrt{0,2}$;

б) $-3\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{3}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{7,2}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{1,6}$.

4. Упростите выражение:

а) $(4 + \sqrt{a})(4 - \sqrt{a})$; в) $(\sqrt{m} + \sqrt{5})^2 - (m + 5)$;

б) $(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$; г) $(n + 10) - (\sqrt{10} - \sqrt{n})^2$.

5. Проходит ли график функции $y = \sqrt{x}$ через точку:

а) $A(-100; 10)$; б) $B(100; -10)$?

6. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:

а) $y = 20$; б) $y = -2$?

7. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой: а) $y = 0{,}9$; б) $x = 0{,}64$.

8. Укажите уравнение, не имеющее корней:

а) $3x^2 = -27$; в) $(x + 2)^2 = 0$; д) $(x - 3)^2 + 4 = 0$;

б) $x^2 + 9 = 0$; г) $5x - x^2 = 0$; е) $x^2 + x + 2 = 0$.

9. Решите уравнение:

а) $2x^2 = 5x$; в) $0{,}49 - x^2 = 0$;

б) $0{,}3x^2 = 7{,}5x$; г) $\frac{1}{4}x^2 - 25 = 0$.

10. Проверьте, является ли число $2 - 3\sqrt{3}$ корнем уравнения $x^2 - 4x - 23 = 0$.

11. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 - 5x - 24 = 0$; в) $0{,}5x^2 + 2x + 2 = 0$;

б) $x^2 - 13x + 42 = 0$; г) $0{,}1x^2 - 0{,}6x + 0{,}9 = 0$.

12. Используя теорему Виета, запишите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 9x - 10 = 0$; в) $5x^2 + 5x - 10 = 0$;

б) $x^2 + 12x + 7 = 0$; г) $2x^2 - 16x + 30 = 0$.

13. Один корень трехчлена $x^2 + bx + 35$ равен -7. Найдите другой его корень, коэффициент b и разложите трехчлен на множители.

14. При каких значениях x равно нулю выражение:

а) $\frac{(x-7)(x+3)}{5x}$; в) $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$;

б) $\frac{(x+2)(x-1)}{3x}$; г) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16}$?

15. а) Исследуйте, существуют ли два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 240.

б) Найдите два числа, сумма которых равна 14, а сумма их квадратов равна 106.

16. а) Площадь футбольного поля равна 6 000 м^2. Найдите периметр поля, если его длина на 40 м больше ширины.

б) Найдите длины сторон прямоугольного треугольника, если его площадь равна 96 см^2 и один катет больше другого на 4 см.

17. а) Найдите длину катета равнобедренного прямоугольного треугольника, площадь которого равна 32 см^2.

б) Найдите длину стороны ромба, учитывая, что его острый угол равен 30°, а площадь равна 50 см^2.

18. Вершина какой из парабол принадлежит оси абсцисс:

а) $y = x^2 - 4$; в) $y = (x - 4)^2$;

б) $y = x^2 - 4x$; г) $y = (x - 4)^2 + 3$?

19. Найдите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 4x + 8$; б) $y = -x^2 + 6x + 7$.

20. При каком значении аргумента равны значения функций:

а) $y = 7x^2 - 5x + 6$ и $y = -4x + 5 + 7x^2$;

б) $y = x^2 + 6x + 2$ и $y = 2x^2 + 4x + 3$?

21. На каком из рисунков 5, *а*, *б* изображено множество решений неравенства $\sqrt{x^2} < 3$?

22. Решите неравенство:

а) $\sqrt{y^2} \leq 8$; б) $\sqrt{y^2} \geq 4$.

23. При каких значениях x верно неравенство:

а) $(5x - 2)^2 \leq 0$; б) $(5x - 2)^2 > 0$?

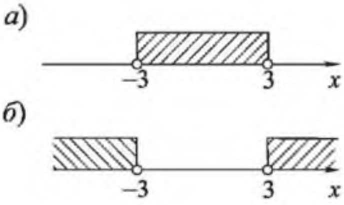


Рисунок 5

24. Решите неравенство:

а) $x^2 - 9 \geq 0$; в) $\dfrac{1}{(x-2)^2} > 0$;

б) $x^2 - 8 < 0$; г) $\dfrac{3}{(4-x)^2} \leq 0$.

25. На рисунке 6 схематически изображен график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Запишите решение неравенства:

а) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$; б) $x^2 - 4x + 3 > 0$.

26. Решите неравенство:

а) $x^2 - 3x - 4 < 0$; в) $x^2 + 6x + 9 > 0$;

б) $x^2 + x - 6 \geq 0$; г) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$.

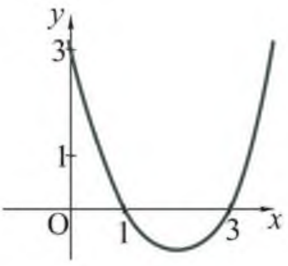


Рисунок 6

27. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(5-x)(5+x)}$; б) $\sqrt{(x-3)(3-x)}$?

Уровень B

28. Является ли тождеством равенство:

а) $\frac{\sqrt{x}}{y} = \sqrt{\frac{x}{y^2}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$?

29. Сравните значения выражений $\left(2\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$ и $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}}\right)$.

30. Сравните значения выражений $(\sqrt{29}-\sqrt{17})$ и $(\sqrt{34}-\sqrt{21})$, вычислив их приближенные значения с точностью до сотых.

31. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(2-\sqrt{8})^2}+\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$; в) $(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}})^2$;

б) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)^2$; г) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{4}{3-\sqrt{5}}$.

32. Упростите выражение: а) $\sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{4a^2}+1}$; б) $\sqrt{\left(\frac{b^2+1}{2b}\right)^2-1}$.

33. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x}$; г) $x^2-3(\sqrt{x})^2=10$;

б) $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x^2-2x}=\frac{1}{x}$; д) $x^4-10x^2+9=0$;

в) $x^2-3\sqrt{x^2}=10$; е) $(2x-1)^4-(2x-1)^2=12$.

34. Проведите исследование и объясните, почему корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеют различные знаки, если: а) $a>0$, $b>0$, $c<0$; б) $a<0$, $b<0$, $c>0$.

35. Укажите множество значений функции, заданной формулой:

а) $y=\frac{1}{2}x^2-3$; в) $y=(x-3)^2+5$;

б) $y=-3x^2+4$; г) $y=-(x-4)^2-2$.

36. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}3y = 0{,}6, \\ 0{,}2x - 0{,}5y = 0{,}8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}(5)x - 0{,}(3)y = 0{,}(6), \\ 0{,}(2)x - 0{,}(3)y = 0{,}(8). \end{cases}$

37. Дистанция авторалли состояла из 6 этапов протяженностью 60 км, 120 км, 170 км, 85 км, 80 км и 55 км. Найдите среднюю протяженность этапа и стандартное отклонение данных этой выборки.

38. Автор, проверяя набранные на компьютере страницы будущей книги, обнаружил опечатки, данные о которых приведены в таблице:

Номер страницы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число опечаток	0	1	0	2	1	2	4	3	0	1

Верно ли, что стандартное отклонение данных этой выборки не больше 1?

39. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке: а) 7; б) 8.

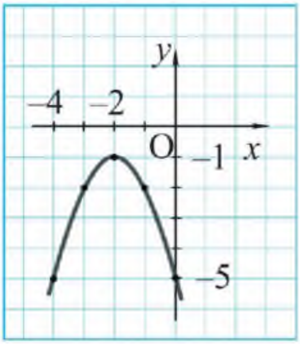


Рисунок 7

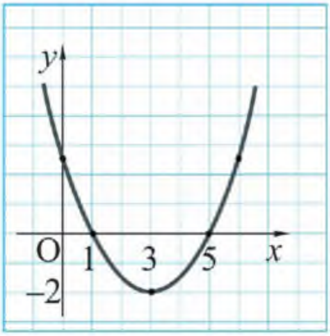


Рисунок 8

40. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если один его катет равен 6 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 5 см.

41. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если известно, что вписанная в него окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки 4 см и 6 см.

42. Два крана, работая вместе, загрузили баржу за 2 часа. За сколько часов мог бы выполнить эту работу каждый кран отдельно, если известно, что одному из них понадобится для этого на 3 часа больше, чем второму?

43. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6x^2 - 5x + 1 \le 0, \\ 4x - 1 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10x^2 - 7x + 1 > 0, \\ 1 - 3x \le 0. \end{cases}$

Уровень С

44. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:
а) $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$; б) $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$.

45. Найдите значение выражения:

$$\frac{4}{\sqrt{4} + \sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{8} + \sqrt{12}} + \frac{4}{\sqrt{12} + \sqrt{16}} + ... + \frac{4}{\sqrt{32} + \sqrt{36}}.$$

46. Упростите выражение:

а) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$; в) $(1 - 2\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$; г) $(3\sqrt{2} + 5)^2 + 30\sqrt{51 - 14\sqrt{2}}$.

47. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 8x + 10 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

48. Решите уравнение:

а) $x^2 - 7|x| = 0$; в) $x^2 + 6x + |x + 2| + 8 = 0$;

б) $x^2 - \frac{5x^2}{|x|} = 0$; г) $x^2 - |(\sqrt{-x})^2| - 20 = 0$.

49. Найдите все корни уравнения:

а) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$; в) $(x - 3)^2 - 2|x - 3| = 8$;

б) $2\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + \left(x + \frac{2}{x}\right) = 13$; г) $\frac{x + 5}{x - 5} + \frac{x - 5}{x + 5} = 5\frac{1}{5}$.

50. Велосипедист едет 5 минут по дороге, идущей в гору, затем – 3 минуты с горы. Обратный путь он преодолевает за 16 минут. Изобразите схематически маршрут движения велосипедиста и установите, во сколько раз быстрее он едет на спуске, чем на подъеме.

51. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1} \le 3$; в) $\dfrac{2x^3-x^4+3x^2}{x^2+x+6} > 0$;

б) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-x+1} > 2$; г) $\dfrac{2x^2+5x+2}{(3-x)^2\cdot(4-x^2)} \ge 0$.

52. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |2x+3| \le 5, \\ x^2-x-6>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-16<0, \\ x^2+5x>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+6x+5 \ge 0, \\ \dfrac{x}{x+1} \le 0. \end{cases}$

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Средняя цифра трехзначного числа равна сумме крайних. Сумма этого числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равна четырехзначному числу. Найдите четырехзначное число.

2) Вычислите значение выражения:

а) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}} - \dfrac{1717}{2424}$; б) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{390625}}}$.

3) Ердену вдвое больше лет, чем Асану будет тогда, когда Гульжан исполнится столько лет, сколько Ердену сейчас. Кто средний по возрасту?

4) Отец разделил несколько яблок детям так. Младшей дочери он дал половину всех яблок и еще половину яблока, старшей дочери – половину оставшихся и еще половину яблока, сыну – половину оставшихся и еще половину яблока. Сколько яблок разделил отец?

5) Некий торговец каждый год увеличивал на одну треть свое состояние, уменьшенное на 100 фунтов, которые ежегодно он тратил на свою семью. Через три года он обнаружил, что его состояние удвоилось. Спрашивается, сколько у него было денег вначале? (Задача Ньютона.)

I. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятия: линейного и нелинейного уравнения с двумя переменными, системы уравнений, неравенства и системы неравенств с двумя переменными, решения систем уравнений и неравенств с двумя переменными;
- способы решения уравнений с двумя переменными и их систем;
- как графически можно представить решения неравенств с двумя переменными и их систем.

уметь

- различать виды уравнений с двумя переменными и их систем;
- решать системы нелинейных уравнений с двумя переменными;
- решать текстовые задачи с использованием систем уравнений;
- изображать графически решения неравенств с двумя переменными и их систем.

1. Нелинейные уравнения с двумя переменными

Учебные достижения по изучению темы:

- знать и различать понятия линейного и нелинейного уравнения с двумя переменными;
- знать, что называется решением и графиком нелинейного уравнения с двумя переменными;
- уметь решать нелинейные уравнения с двумя переменными и текстовые задачи, приводимые к ним.

Некоторые уравнения с двумя переменными рассматривались в курсе алгебры 7–8 классов и в курсе геометрии 8 класса. Например, линейные уравнения с двумя переменными, то есть уравнения вида $ax + by + c = 0$, где x и y – переменные, a, b, c – некоторые действительные числа. Линейное уравнение с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю, называется уравнением первой степени с двумя переменными. Любое уравнение с двумя переменными, отличное от линейного, является нелинейным уравнением с двумя переменными. *Решением уравнения с двумя переменными называется такая пара их значений, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство*. Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения или не имеющие решений, называются *равносильными*.

Уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ky + p = 0$, в котором x и y переменные, a, b, c, d, k, p – действительные числа, причем хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю, называется *уравнением второй степени*. Уравнения такого вида относятся к нелинейным уравнениям с двумя переменными. Можно указать много примеров различных нелинейных уравнений: $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $xy = 16$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$; $x^3 - xy^2 = 0$.

Нелинейные уравнения с двумя переменными, их графики и множества решений многообразны. Существенным является и то, на каком множестве N, Z, Q или R находят решения. Например, уравнение $xy = 5$ имеет бесконечно много решений на множествах Q и R, это пары чисел $\left(x; \frac{5}{x}\right)$. На множестве N решениями этого уравнения являются только две пары чисел (1; 5) и (5; 1), а на множестве Z – четыре пары (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). Каждую упорядоченную пару $(x; y)$ чисел, являющуюся решением уравнения с двумя переменными x и y, можно изобразить в координатной плоскости точкой, абсцисса которой x, а ордината y. Множество всех таких точек является графиком уравнения с двумя переменными x и y. Приведем примеры решений нелинейных уравнений с двумя переменными.

Пример 1. Решить уравнение $9x^2 - 4y^2 = 0$.

Решение. $9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$. Следовательно, $3x - 2y = 0$ или $3x + 2y = 0$. Выразив переменную y через x, получим $y = 1{,}5x$ или $y = -1{,}5x$. Значит, решениями данного уравнения являются все пары чисел $(x; 1{,}5x)$, $(x; -1{,}5x)$.

Ответ. $(x; 1{,}5x)$, $(x; -1{,}5x)$, где $x \in R$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$.

Решение. Используя формулы квадрата суммы и разности двух выражений, преобразуем это уравнение так: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 0$. Сумма квадратов двух выражений равна нулю, если оба из них равны нулю. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение (–3; 5).

Ответ. (–3; 5).

Пример 3. Решить уравнение $x^2 + 4x + y^2 = 5$ и изобразить множество всех пар его решений графически.

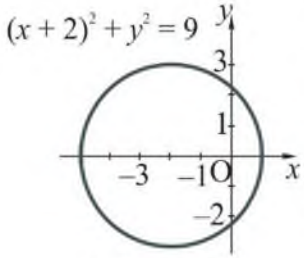


Рисунок 9

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $(x + 2)^2 + y^2 = 9$. Это уравнение окружности с центром в точке (–2; 0) и радиусом 3 (рисунок 9). Координаты каждой точки этой окружности являются решениями исходного уравнения.

Пример 4. Построить график уравнения $-12y^2 + 5xy + 2x^2 = 0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно переменной y и решим его: $y_{1,2} = \frac{-5x \pm \sqrt{25x^2 + 96x^2}}{-24} = \frac{-5x \pm 11x}{-24}$; $y_1 = \frac{2}{3}x$; $y_2 = -\frac{1}{4}x$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются все пары чисел $\left(x; \frac{2}{3}x\right)$ и $\left(x; -\frac{1}{4}x\right)$, где $x \in R$. В координатной плоскости это множество точек – объединение двух прямых $y = \frac{2}{3}x$ и $y = -\frac{1}{4}x$ (рисунок 10).

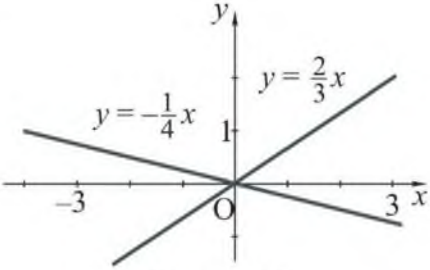


Рисунок 10

Пример 5. Найти все пары $(m; n)$ целых чисел такие, что $m + n = mn$.

Решение. Решим в целых числах уравнение $m + n = mn$, для чего выразим n через m. Получим $n(1 - m) = -m$, $n = \frac{m}{m-1}$. Представим последнее равенство так: $n = \frac{m-1+1}{m-1}$, $n = 1 + \frac{1}{m-1}$. Отсюда заключаем, что $n \in Z$ лишь при $m = 0$ или $m = 2$.

Ответ. (0; 0), (2; 2).

Пример 6*. Исследовать, имеет ли решения в натуральных числах уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$.

Решение. По условию число y должно быть нечетным, так как 7 – нечетное число, а $2x^2$ – четное. Обозначим $y = 2n + 1$, где $n \in N$. Тогда данное уравнение примет вид:

$$2x^2 - 5(2n + 1)^2 = 7,$$
$$2x^2 - 20n^2 - 20n - 12 = 0,$$
$$x^2 - 10n^2 - 10n - 6 = 0,$$
$$x^2 - 10n(n + 1) - 6 = 0.$$

Из последнего равенства следует, что x должно быть четным числом. Пусть $x = 2m$, где $m \in N$, тогда $4m^2 - 10n(n + 1) - 6 = 0$, $2m^2 - 5n(n + 1) - 3 = 0$. Но последнее равенство не выполняется, так как значение выражения $n(n + 1)$ – четное, как произведение двух последовательных натуральных чисел. Следовательно, данное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Ответ. Нет решений.

Задача 1. Площадь четырех квадратов со стороной x на 7 м^2 больше площади девяти квадратов со стороной y. Исследовать, могут ли длины сторон этих квадратов (в метрах) быть выражены натуральными числами.

Решение. По условию задачи составим уравнение $4x^2 - 9y^2 = 7$ и решим его на множестве N. Для этого разложим его левую часть на множители, а правую представим в виде произведения натуральных чисел. Получим $(2x - 3y)(2x + 3y) = 1 \cdot 7$. Учитывая, что по условию задачи $x > y$, имеем: $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x = 8, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ. Могут, $x = 2$ м, $y = 1$ м.

ВОПРОСЫ

1. Что называется: а) уравнением с двумя переменными; б) решением уравнения с двумя переменными?

2. Что называется графиком уравнения с двумя переменными? Приведите пример уравнения с двумя переменными, графиком которого является: а) прямая; б) гипербола; в) окружность; г) парабола.

3. Что значит решить уравнение с двумя переменными?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

53. Какие из уравнений являются линейными уравнениями с двумя переменными:

а) $xy = 12$; в) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 4$; д) $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = 0$;

б) $x + y = \sqrt{6}$; г) $(x - 2)(y + 3) = 0$; е) $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{4}{9}$?

54. Какие из пар чисел $\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$, $(2; 4)$, $(1; 1)$, $(1; 2)$, $\left(\frac{5}{8}; 0\right)$, $(3; 6)$ являются решениями уравнения $8x - 3y = 5$?

55. Найдите две пары чисел $(x;\ y)$, которые являются решениями уравнения $2x - 5y = 16$ и принадлежат множеству:
а) целых; б) натуральных; в) иррациональных чисел.

56. Для каждого нелинейного уравнения из № 53 укажите пару чисел $(x;\ y)$, которая является его решением.

57. Исследуйте, существует ли целое значение x такое, что решением уравнения $x(x - 1) - 2xy = 42$ является пара чисел: а) $(x;\ 4)$; б) $(x;\ 5)$.

58. Один из катетов прямоугольного треугольника равен $\sqrt{2}$ дм. Составьте уравнение с двумя переменными для нахождения неизвестных сторон этого треугольника. Исследуйте, могут ли его гипотенуза и второй катет быть соответственно равными:
а) 1,5 дм и 0,5 дм; б) 3 дм и $\sqrt{7}$ дм.

59. Найдите двузначное число, если оно в 3 раза больше суммы его цифр. Исследуйте все возможные случаи.

60. Площадь прямоугольника, длины сторон которого выражены целыми числами метров, равна 16 м^2. Найдите его наименьший периметр.

61. Постройте график уравнения:
а) $x^2 + y = 5$; в) $2y + 3x = 1$;
б) $xy = 15$; г) $x^2 + y^2 = 25$.

62. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел, которая является решением уравнения:
а) $x^2 + y^2 - (xy)^2 = 1$; в) $m^n = n^m$.
б) $(x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1$;

63. Найдите все пары чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие соотношению:
а) $4x^2 - 81y^2 = 0$; в) $xy + 20 = 5x + 4y$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$; г) $x\sqrt{y} - 3 = x - 3\sqrt{y}$.

64. Исследуйте, существует ли такое двузначное число, при делении которого на сумму цифр в частном получается 3, а в остатке – 7.

65. Решите в натуральных числах уравнение, рассмотрев все возможные случаи: а) $3mn - 7 = 3n - 2m$; б) $2mn - 4 = m + 2n$.

66. Существуют ли двузначные натуральные числа, произведение цифр которых: а) равно их сумме; б) в 4 раза больше их суммы?

67. Разность квадратов каких двух натуральных чисел равна 133? (Пример, устно решенный феноменальным французским вычислителем Анри Монде в 1840 году в школьном возрасте).

Уровень В

68. Одним из решений уравнения $x^2 - y^2 = 72$ является пара чисел $(m; n)$, где m и n соответственно равны количеству самых больших озер, полностью расположенных на территории Казахстана, площадь каждого из которых более 700 км², и самых длинных рек протяженностью не менее 800 км, протекающих по территории Казахстана. Найдите эти числа, если известно, что $12 < m + n < 20$.

Водная система Казахстана

69. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют соотношению:

а) $|y - x| = 2$; в) $|x| + |y| = 2$; д) $|y| = x^2 - 4x + 3$;
б) $|y| - |x| = 2$; г) $|y| = 4 - x^2$; е) $y^2 = 2x$.

70. Груз массой m тонн был перевезен автоколонной, состоящей из x машин, когда каждая из них сделала по y рейсов, а затем еще 7 из этих машин – по 12 рейсов. Если бы каждая из машин сделала по $(y + 6)$ рейсов, то для перевозки половины груза потребовалось бы на 7 машин меньше. Сколько машин было в автоколонне?

71. Постройте на координатной плоскости множество всех точек, координаты $(x; y)$ которых являются решениями уравнения:

а) $(x^2 - 16)^2 + (y^2 - 25)^2 = 0$; в) $x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 0$;

б) $x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$; г) $2x^3 - 2x^2y + y^2 - xy = 0$.

72. Исследуйте, при каких значениях $x \in R$ и $y \in R$ верно равенство:

а) $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$; в) $y^2 - 6y + 9 + x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$;

б) $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0$; г) $x^2 + 2\sqrt{2}x + y - 2\sqrt{y} + 3 = 0$.

73. Решите в натуральных числах уравнение:

а) $3n - 2 = 2mn - 3m$; б) $2mn - 4 = m + 3n$.

74. Исследуйте, каковы могут быть длины сторон прямоугольника в метрах, если его площадь выражается в квадратных метрах тем же целым числом, что и его периметр.

Уровень С

75. Найдите две пары $(x; y)$ натуральных чисел, являющиеся решениями уравнения $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$.

76. Моторная лодка движется против течения реки и встречает плывущий плот. После этого она проплывает против течения еще 3 минуты, затем быстро разворачивается и догоняет плот на расстоянии 102 м от места первой встречи. а) Какова скорость течения реки? б) Исследуйте, какой могла быть собственная скорость лодки.

77. а) Можно ли число 2018 представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

б) Для хранения одной тонны зерна имеются мешки двух размеров: одни вместимостью по 60 кг, другие – по 50 кг. Какое наименьшее количество мешков этих размеров надо взять, чтобы все они были наполнены?

78. Постройте на координатной плоскости множество всех точек, координаты $(x; y)$ которых являются решениями уравнения:

а) $(x - y)^2 = 2x + 2y - x^2 - y^2 - 2$; в) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 0$;

б) $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$; г) $x^2 + y^2 = 6|y| + 16$.

2. Системы нелинейных уравнений с двумя переменными

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятие системы нелинейных уравнений с двумя переменными;
- знать, что называется решением системы нелинейных уравнений с двумя переменными;
- уметь решать системы нелинейных уравнений с двумя переменными способами подстановки, алгебраического сложения, графически.

Понятие системы уравнений с двумя переменными известно из курса алгебры 7–8 классов. Рассматривались системы двух линейных уравнений с двумя переменными, то есть системы вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ где x, y – переменные, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – некоторые действительные числа. Вы знаете также и методы решения таких систем: способ подстановки, метод алгебраического сложения, графический. Эти же методы являются основными и при решении *систем нелинейных уравнений с двумя переменными*, то есть систем уравнений, в которых хотя бы одно уравнение – нелинейное.

Напомним, что *решением системы* уравнений с двумя переменными называется упорядоченная пара значений переменных, обращающая каждое уравнение в верное числовое равенство. *Решить систему уравнений* – это значит найти все ее решения или установить, что решений нет. Две системы уравнений называются *равносильными*, если все их решения одни и те же или они не имеют решений.

Рассмотрим примеры решения систем нелинейных уравнений с двумя переменными.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 - 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения выразим y через x и подставим во второе уравнение системы, получим: $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 - 2x + x - 5 - 7 = 0. \end{cases}$

Решим второе уравнение: $x^2 - x - 12 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Тогда $y_1 = -3 - 5 = -8$, $y_2 = 4 - 5 = -1$.

Ответ. $(-3; -8)$, $(4; -1)$.

Отметим, что способом подстановки можно решить любую систему нелинейных уравнений, в которой одно уравнение – линейное, а другое – второй степени.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Решение. Заменим систему равносильной $\begin{cases} 2xy = 12, \\ 2x^2 + 2y^2 = 26, \end{cases}$ в которой первое уравнение получено вычитанием, а второе – сложением левых и правых частей уравнений данной системы. Далее имеем: $\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 + y^2 = 13, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{6}{x}, \\ x^2 + \dfrac{36}{x^2} = 13. \end{cases}$ Решим второе уравнение системы: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; $x^2 = 4$ или $x^2 = 9$ (по теореме, обратной теореме Виета, рассматривая данное уравнение как квадратное относительно x^2). Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$. Тогда $y_1 = -3$, $y_2 = 3$, $y_3 = -2$, $y_4 = 2$.

Ответ. $(-2; -3)$, $(2; 3)$, $(-3; -2)$, $(3; 2)$.

Можно заметить, что данная система останется прежней при замене одной переменной на другую, так как левые части ее уравнений являются симметрическими многочленами. При рассмотрении таких систем уравнений надо иметь в виду, что если одним из решений этой системы является пара чисел $(a; b)$, то и пара чисел $(b; a)$ также будет ее решением. Вообще, симметрические системы уравнений с двумя переменными можно решать, используя, например, замену $xy = p$, $x + y = t$.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^3 + y^3 = 8. \end{cases}$

Решение. Преобразуем систему так: $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 4, \\ (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 8; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 4, \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 8. \end{cases}$ Обозначив $x + y = t$, $xy = p$, получим

$\begin{cases} t^2 - 2p = 4, \\ t(t^2 - 3p) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} p = \dfrac{t^2 - 4}{2}, \\ t^3 - 3t \cdot \dfrac{t^2 - 4}{2} = 8. \end{cases}$ Решим второе уравнение системы:

$2t^3 - 3t^3 + 12t - 16 = 0,$

$$t^3 - 12t + 16 = 0,$$
$$t^3 - 4t - 8t + 16 = 0,$$
$$t(t^2 - 4) - 8(t - 2) = 0,$$
$$(t - 2)(t^2 + 2t - 8) = 0,$$
$$t - 2 = 0 \text{ или } t^2 + 2t - 8 = 0,$$
$$t = 2 \text{ или } t_1 = -4,\ t_2 = 2. \text{ Тогда } p_1 = \frac{16 - 4}{2} = 6,\ p_2 = 0.$$

Итак, исходная система сводится к совокупности двух следующих систем уравнений: $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -x - 4, \\ x(-x - 4) = 6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = -x + 2, \\ x(-x + 2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x - 4, \\ x^2 + 4x + 6 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = -x + 2, \\ x(-x + 2) = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2 + 4x + 6 = 0$ не имеет корней, так как его дискриминант меньше нуля, следовательно, первая система уравнений не имеет решений. Решениями второй системы являются пары чисел (0; 2) и (2; 0).

Ответ. (0; 2), (2; 0).

Пример 4. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ 2x^2 + 7x - 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ y = x^2 + 3,5x - 2,5. \end{cases}$

График первого уравнения – гипербола, второго – парабола. Построим эти графики и найдем координаты их точек пересечения (рисунок 11).

Координаты точек пересечения графиков следующие: (–4; –0,5), (–0,5; –4), (1; 2).

Ответ. (–4; –0,5), (–0,5; –4), (1; 2).

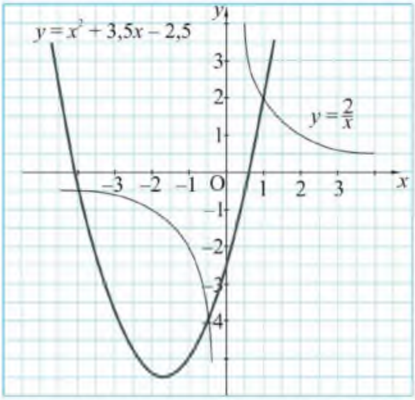


Рисунок 11

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Решение. Так как $x = y = 0$ не является решением этой системы, то можно разделить обе части первого ее уравнения на y^2, тогда получим $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{x}{y} + 3 = 0$ – квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$. Обозначим $\frac{x}{y} = t$ и решим уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $t_1 = 3$, $t_2 = 1$. Таким образом, исходная система уравнений равносильна совокупности двух следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 1, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Решим их:

$$\begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + y^2 = 10 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = y, \\ 2y^2 = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = y, \\ y^2 = 5. \end{cases}$$

Итак, решениями совокупности этих систем уравнений являются пары чисел (3; 1), (–3; –1), ($\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$), ($-\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$).

Ответ. ($-\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$), (–3; –1), (3; 1), ($\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$).

ВОПРОСЫ

1. Какие системы двух уравнений с двумя переменными считаются нелинейными?

2. Как можно решить любую систему двух уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение – линейное, а другое – второй степени?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

79. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ пара чисел: а) (2; 2); б) (3; 1)?

80. Решите способом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - y^2 = 100; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = -5, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$

81. Решите систему уравнений, используя способ сложения:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = 21. \end{cases}$

82. а) Сумма двух чисел равна 38, а $\frac{3}{4}$ большего числа составляет $\frac{5}{6}$ меньшего. Найдите эти числа. б) Исследуйте, существуют ли два числа, разность которых равна 7, а произведение равно 8.

83. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = (x - 1)^2 + 2, \\ xy = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - x = 1, \\ y = -(x - 1)^2 + 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

84. Скорость теплохода по течению реки равна 38,5 км/ч, а против течения – 32,5 км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

85. а) Площадь прямоугольного треугольника равна 60 см^2, а разность длин его катетов равна 7 см. Найдите периметр этого треугольника. б) Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 13 см, а площадь 30 см^2.

86. Являются ли равносильными системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ 4x^2 + 3y = 9 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3xy = 2y^2, \\ 4x^2 + 3y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} (x - y)^2 = 1, \\ xy = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} (x + y)^2 = 16, \\ xy = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5xy = 4x - 1, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 5xy = 4x - 1, \\ (y - 2x)^2 = 9? \end{cases}$

87. Используя способ подстановки, найдите все пары (m; n) чисел, являющиеся решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} m + n = -50, \\ mn = 96; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m^2 + mn + n^2 = 13, \\ m + n = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} m^2 - n^2 = 5, \\ mn = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3m - n = 0, \\ m^2 + n^2 + 2n = 9. \end{cases}$

88. Докажите, что если выполняются условия $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 34, \end{cases}$ то $x^5 + y^5 = 3368$.

89. Сколько миллионов (x) гектаров составляют лесные ресурсы Казахстана, и какое место (y) по ним он занимает среди стран мира, если пара чисел (x; y) является решением системы уравнений $\begin{cases} 3x - y + 8 = 0, \\ x^2 - y = 100? \end{cases}$

90. Найдите два натуральных числа, отношение которых равно 3, а отношение суммы их квадратов к их сумме равно 5 (древнегреческая задача Диофанта).

Уровень В

91. Решите способом сложения систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{11}{6}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{y} = -\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + xy = -10, \\ \dfrac{5x}{y} - 2xy = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = -9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 4, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -4. \end{cases}$

92. Решите систему уравнений, используя введение новых переменных:

а) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 6, \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 13, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{y} = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 6(x + y) + 5 = 0, \\ (x - y)^2 - 2(x - y) - 3 = 0. \end{cases}$

93. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y - x^2 = 2, \\ xy = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2x + y = -1, \\ x + y + 5 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 2, \\ y = -0{,}4x^2 + 2{,}4. \end{cases}$

94. Найдите все пары $(x; y)$ чисел, являющиеся решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2a, \\ xy = -3a^2, \end{cases}$ где $a \in R$; в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = a, \\ y^2 + 2x = a^2, \end{cases}$ где $a \in R$; г) $\begin{cases} y^2 = (2x + 1)^2, \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1. \end{cases}$

95. Существуют ли два различных числа, сумма, произведение и разность квадратов которых равны?

96. Проведите исследование и найдите все пары целых чисел $(m; n)$, являющиеся решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} m^2 + mn + n^2 = 13, \\ m^2 - mn + n^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} m^2 + n = 3, \\ m + n^2 = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m + n^2 = 37, \\ m^2 + n = 7. \end{cases}$

97. У брата было x груш, а у сестры – y^2 яблок. Всего у них было 11 этих фруктов. Если бы у брата было y груш, а у сестры – x^2 яблок, то всего этих фруктов у них было бы 7. Сколько было груш у брата и сколько яблок у сестры?

Уровень С

98. Решите систему симметрических уравнений:

а) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + xy + y = 4, \\ x^2 + xy + y^2 = 8. \end{cases}$

99. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} (x + 5y)(x - y) = 7, \\ (x + 5y)(x + y) = 21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy(x + y) = 48, \\ xy(x - y) = 16. \end{cases}$

100. Как можно решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = -4, \end{cases}$ в которой одно из уравнений однородное, то есть его левая часть – многочлен, все члены которого имеют одинаковые степени, а правая часть – 0?

101. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 - 7y^2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy = 0, \\ x^2 - 5y^2 = -4. \end{cases}$

102. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^3 + 8 - xy - 2y + 4x^2 + 8x}{x + 2} = 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \left|\dfrac{6}{x}\right|, \\ y = |x^2 - 1|. \end{cases}$

3. Решение текстовых задач с использованием систем нелинейных уравнений с двумя переменными

Учебные достижения по изучению темы:

- составлять по условию задачи ее математическую модель – систему нелинейных уравнений с двумя переменными;
- уметь находить решения составленной по условию задачи системы нелинейных уравнений с двумя переменными и устанавливать их соответствие условию задачи.

Напомним, что решение текстовой задачи с применением систем уравнений осуществляется так:

1) устанавливаем, о каких объектах или величинах идет речь в задаче, какие из них даны и какие неизвестны, две из которых обозначаем, например, x и y;

2) используя условие задачи и зависимости между известными и неизвестными величинами, составляем алгебраическую модель задачи – систему двух уравнений с двумя переменными;

3) решаем полученную систему уравнений;

4) находим ее решения, соответствующие условию задачи, и записываем ответ.

Задача 1. Двум бригадам было поручено принять на зернохранилище по 60 тонн пшеницы. Первая бригада принимала в час на 3 тонны пшеницы больше, чем вторая, и поэтому выполнила задание на 1 час раньше. Сколько тонн пшеницы принимала в час первая бригада, и за сколько часов она выполнила задание?

Решение. Пусть первая бригада принимала в час x тонн пшеницы, а время, за которое она выполнила задание, равно t часов. Тогда вторая бригада принимала в час $(x - 3)$ тонн пшеницы и работала $(t + 1)$ часов. По условию задачи составим систему уравнений $\begin{cases} xt = 60, \\ (x-3)(t+1) = 60. \end{cases}$ Решаем эту систему уравнений:

$\begin{cases} t = \dfrac{60}{x}, \\ (x-3)\left(\dfrac{60}{x}+1\right) = 60; \end{cases}$ $60 + x - \dfrac{180}{x} - 3 = 60$; $x^2 - 3x - 180 = 0$; $x_{1,2} =$ $= \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 180}}{2} = \dfrac{3 \pm 27}{2}$; $x_1 = 15$, $x_2 = -12$ (x_2 не удовлетворяет условию задачи). Тогда $t = \dfrac{60}{15} = 4$ (часа).

Ответ. 15 т; 4 ч.

Задача 2. При делении двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 1, а в остатке 16. Это же число получится, если к квадрату разности его цифр прибавить их произведение. Что это за число?

Решение. *Первый способ.* Обозначим неизвестное число $\overline{ab} = 10a + b$, где a – цифра его десятков, b – цифра единиц. Из первого условия задачи имеем $10a + b = ab + 16$, а из второго: $10a + b =$ $= (a - b)^2 + ab$. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 10a + b = ab + 16, \\ 10a + b = (a-b)^2 + ab; \end{cases}$ отсюда $(a - b)^2 + ab = ab + 16$, $(a - b)^2 = 16$,

$$a - b = -4 \text{ или } a - b = 4. \text{ Тогда}$$

$$a = b - 4 \text{ или } a = b + 4. \text{ Следовательно,}$$

$$10(b - 4) + b = (b - 4)b + 16 \text{ или } 10(b + 4) + b = (b + 4)b + 16;$$

$$b^2 - 15b + 56 = 0 \text{ или } b^2 - 7b - 24 = 0;$$

$$b_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{2} = \frac{15 \pm 1}{2} \text{ или } b_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 96}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{145}}{2} -$$

не удовлетворяет условию задачи, так как $b \in N$. Получили $b_1 = 7$, $b_2 = 8$, тогда $a_1 = 3$, $a_2 = 4$.

Ответ. 37 или 48.

Второй способ. Пусть $\overline{ab}$ – искомое число. По условию задачи

$$\begin{cases} 10a + b = ab + 16, \\ 10a + b = (a-b)^2 + ab. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы в натуральных числах и проверим, какие из его решений являются и решениями второго уравнения: $10a - ab = 16 - b$, $a(10 - b) = 16 - b$, $a = \frac{16 - b}{10 - b} = \frac{10 - b + 6}{10 - b} =$ $= 1 + \frac{6}{10 - b}$, где $a \in N$ и $b \in N$. Этим условиям удовлетворяют лишь пары чисел: $b_1 = 4$, $a_1 = 2$; $b_2 = 7$, $a_2 = 3$; $b_3 = 8$, $a_3 = 4$; $b_4 = 9$, $a_4 = 7$ и, соответственно, – двузначные числа: 24, 37, 48, 79. Из них условию $10a + b = (a - b)^2 + ab$ удовлетворяют лишь числа 37 и 48, так как $37 = (3 - 7)^2 + 21$, $48 = (4 - 8)^2 + 32$, а $24 \neq (2 - 4)^2 + 8$, $79 \neq (7 - 9)^2 + 63$.

Ответ. 37 или 48.

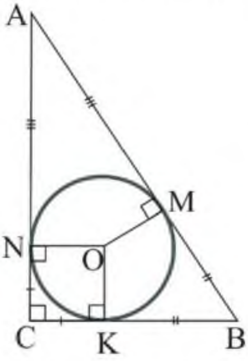


Рисунок 12

Задача 3. Найти неизвестный катет прямоугольного треугольника, если даны второй катет a и радиус r вписанной в него окружности. Исследовать, при каком соотношении между a и r задача имеет решение.

Решение. Обозначим: искомый катет $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $OM = OK = ON = r$ (рисунок 12). Так как $AM = AN$, $BM = BK$, $CN = CK = r$, то $c = (a - r) + (b - r)$, $c - b = a - 2r$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} c - b = a - 2r, \\ c^2 - b^2 = a^2; \end{cases} \begin{cases} c - b = a - 2r, \\ (c - b)(c + b) = a^2; \end{cases} \begin{cases} c - b = a - 2r, \\ c + b = \frac{a^2}{a - 2r}. \end{cases}$$ Отсюда

$$2b = \frac{a^2}{a - 2r} - (a - 2r), \text{ тогда } b = \frac{a^2 - (a - 2r)^2}{2(a - 2r)} = \frac{4ar - 4r^2}{2(a - 2r)} = \frac{2r(a - r)}{a - 2r},$$

причем $a > 2r$.

Ответ. $\frac{2r(a - r)}{a - 2r}$, где $a > 2r$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

103. Известно, что некоторая обыкновенная дробь не изменится, если к ее числителю прибавить 2, а к знаменателю 3. Если же к знаменателю прибавить 6, а к числителю 1, то дробь уменьшится на $\frac{1}{3}$. Найдите эту дробь.

104. а) Диагональ прямоугольника равна 17 см, а его периметр – 46 см. Найдите стороны этого прямоугольника. б) Четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, имеет площадь, равную 36 см^2. Найдите длины его диагоналей, если их отношение равно $\frac{4}{9}$.

105. а) Расстояние 300 км пассажирский поезд проходит на 1 ч быстрее товарного. Найдите скорость каждого из поездов, если за 1,5 ч пассажирский поезд проходит на 22,5 км больше, чем товарный. б) Из городов A и B навстречу друг другу одновременно вышли пассажирский и товарный поезда. Двигаясь без остановок с постоянной скоростью, пассажирский поезд прибыл в пункт B через 4 ч, а товарный – в пункт A через 6 ч. Найдите скорость каждого поезда, если через 2 ч после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 320 км.

106. На преодоление 15 км по течению и 18 км против течения путешественник на катере затратил 1 ч 45 мин. Найдите скорость катера и скорость течения реки, если за 15 мин катер может пройти по течению 5 км.

107. Отец с сыном могут выполнить работу за 1,2 ч. Если сын выполнит половину работы, а отец закончит ее, то потребуется 2,5 ч. За сколько часов может выполнить эту работу каждый из них, работая отдельно?

108. а) Исследуйте, существует ли двузначное число, разность цифр которого равна 2, а сумма их квадратов – 52. б) Если к двузначному числу прибавить удвоенную сумму его цифр, то получится 96. Если же это число умножить на сумму его цифр, то получится 952. Найдите это число.

109. Найдите обыкновенную дробь, если известно, что разность квадратов ее знаменателя и числителя равна 55 и после увеличения ее числителя в 2 раза, а знаменателя в 1,5 раза дробь увеличится на $\frac{1}{8}$.

110. Найдите: а) стороны двух квадратов, если сумма их площадей равна 25 $дм^2$, а произведение длин этих сторон равно 12 $дм^2$; б) площадь прямоугольного треугольника, если известно, что его гипотенуза, равная 13 см, возрастет на 4 см при увеличении каждого катета на 3 см.

Уровень В

111. Найдите: а) сторону ромба, площадь которого равна 80 $см^2$, а отношение диагоналей равно 0,8; б) площадь ромба, периметр которого равен 2 дм, а диагонали относятся как 3 : 4.

112. Найдите катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 13 см, а радиус вписанной в него окружности равен 2 см.

113. Разность длин ребер двух кубов равна 3 дм, а разность их объемов равна 117 $дм^3$. Найдите длины ребер этих кубов.

114. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 40 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля и двигались с постоянными скоростями. Через 12 минут расстояние между ними было 12 км. Найдите скорость каждого автомобиля, если один из них прибыл в пункт В на 10 минут позже, чем другой в пункт А.

115. Имеется 20-процентный раствор соли, содержащий x г соли и y г воды. Если долить в него 200 г воды, то концентрация раствора уменьшится на 10 %. Сколько соли и воды было в растворе первоначально?

116. Если к сумме цифр двузначного числа прибавить квадратный корень из их произведения, то получится 14. Если же от этой суммы отнять указанный корень, то получится 6. Что это за число? Исследуйте все возможные случаи.

117. В прямоугольном треугольнике, имеющем площадь $18\sqrt{3}$ $см^2$, высота, проведенная к гипотенузе, равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите катеты этого треугольника, если его периметр равен $6(3 + \sqrt{3})$ см.

118. Найдите координаты центра окружности: а) радиусом $4\sqrt{5}$, проходящей через точки (–12; –4), (4; –4); б) радиусом $2\sqrt{3}$, которой принадлежат точки (–3; –1), (1; –1).

Уровень C

119. Найдите: а) стороны прямоугольника, если их отношение равно k, а его площадь равна S (древнеегипетская задача); б) гипотенузу прямоугольного треугольника, периметр которого равен P, а площадь равна S (древнекитайская задача).

120. Буксир преодолевает путь между двумя пристанями (туда и обратно), расположенными на берегу реки, за 8 ч 40 мин. Катер, собственная скорость которого в 2 раза больше, тратит на такой же путь на 4 ч 40 мин меньше, чем буксир. Во сколько раз собственная скорость буксира больше скорости течения реки?

121. а) Два тела, двигаясь по некоторой окружности в разных направлениях, встречаются через каждые 6 секунд. При движении по ней с этими же постоянными скоростями в одном направлении, встречаются через каждые 30 секунд. За сколько секунд преодолевает это расстояние тело, имеющее большую скорость? б) Два автомобилиста, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении с постоянными скоростями, оказываются рядом через каждые 3 часа. При движении в разных направлениях они встречаются через каждые 20 минут. За какое время преодолевает эту трассу каждый автомобилист?

122. а) Два специалиста, работая вместе, выполняют задание за 5 дней. Если бы первый из них работал вдвое быстрее, а второй – вдвое медленнее, то эта же работа была бы сделана за 4 дня. За сколько дней выполнит все задание первый специалист, если будет работать один? б) Два специалиста при совместной работе выполняют некоторое задание за 3,6 часа. Если бы один из них проработал треть того времени, за которое мог выполнить все задание второй специалист, а затем второй – треть времени, за которое мог выполнить все задание первый специалист, то было бы выполнено $\frac{13}{18}$ всего задания. За сколько часов мог бы выполнить это задание каждый специалист в отдельности?

4. Неравенства с двумя переменными

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятие неравенства с двумя переменными;
- знать, что называется решением неравенства с двумя переменными;
- уметь решать простые неравенства с двумя переменными и текстовые задачи, приводимые к ним.

Неравенства с одной переменной, их различные виды и способы решения вы изучали в 7–8 классах. Теперь рассмотрим неравенства с двумя переменными. Неравенства вида

$\boldsymbol{ax + by + c < 0}$, $\boldsymbol{ax + by + c > 0}$, $\boldsymbol{ax + by + c \leq 0}$, $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$, где x и y – переменные, a, b, c – некоторые действительные числа, называются **линейными неравенствами с двумя переменными**.

Неравенство, например, вида $\boldsymbol{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ky + p < 0}$, в котором x и y – переменные, a, b, c, d, k, p – действительные числа, причем хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю, называется **неравенством второй степени с двумя переменными**.

Решением неравенства с двумя переменными называется такая пара их значений, при которых оно обращается в верное числовое неравенство. Например, пары чисел (–2; 1), (3; 4) являются решениями неравенства $x^2 + y^2 \leq 25$, так как $(-2)^2 + 1^2 \leq 25$ и $3^2 + 4^2 \leq 25$ – верные числовые неравенства. *Решить неравенство с двумя переменными* – значит найти все упорядоченные пары их значений, каждая из которых обращает его в верное числовое неравенство. Любое решение неравенства с двумя переменными определяет на координатной плоскости некоторую точку. Это дает возможность изображать все его решения в виде некоторого множества точек координатной плоскости.

Пример 1. Построить на координатной плоскости фигуру, состоящую из всех точек, координаты которых являются решениями неравенства $x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 9$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3. Множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 9$, – это круг с центром в начале координат и радиусом, равным 3 (рисунок 13). Координаты любой точки этого круга являются решением данного неравенства.

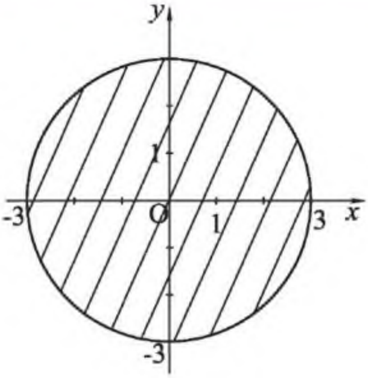


Рисунок 13

На рисунках множество всех точек, координаты которых являются решениями неравенства с двумя переменными, обычно выделяют штриховкой или цветом.

Пример 2. Решить неравенство $x - y - 2 < 0$.

Решение. Построим прямую $x - y - 2 = 0$, то есть $y = x - 2$ по двум точкам (0; –2) и (2; 0). Для каждой точки, принадлежащей этой прямой, выполняется равенство $x - y - 2 = 0$. Следовательно, координаты этих точек не являются решениями данного неравенства. Поэтому на рисунке эта прямая изображается штриховой линией. Данное неравенство можно записать так: $y > x - 2$. Оно верно для координат всех точек, лежащих выше прямой $y = x - 2$. Множество координат всех этих точек и является решением данного неравенства (рисунок 14).

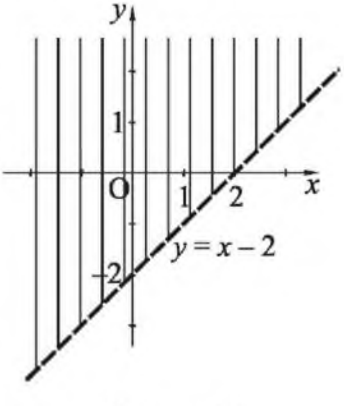


Рисунок 14

Пример 3. Решить неравенство $x^2 - 2x + 1 \leq 4y - y^2 - 4$.

Решение. Преобразуем это неравенство так: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 0$. Сумма квадратов двух выражений больше или равна 0. Следовательно, данное неравенство верно лишь при $x = 1$, $y = 2$.

Ответ. (1; 2).

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{y^2 - x^2y + \frac{1}{4}x^4} = \frac{1}{2}x^2 - y$.

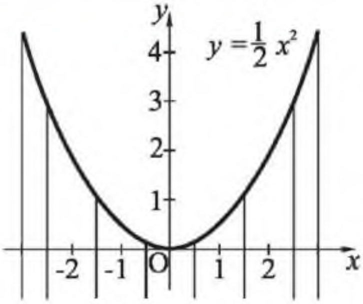


Рисунок 15

Решение. Преобразуем левую часть этого уравнения: $\sqrt{y^2 - x^2y + \frac{1}{4}x^4} = \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}x^2\right)^2} = |y - \frac{1}{2}x^2|$. Тогда данное уравнение примет вид: $|y - \frac{1}{2}x^2| = \frac{1}{2}x^2 - y$. Это равенство верно при всех значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $y - \frac{1}{2}x^2 \leq 0$, $y \leq \frac{1}{2}x^2$ (рисунок 15). Координаты любой точки заштрихованной части плоскости являются решениями исходного уравнения.

Пример 5. Найти количество всех пар целых чисел, являющихся решениями неравенства $x^2 + y^2 \leq 5$.

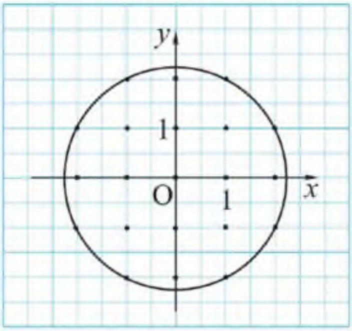


Рисунок 16

Решение. Изобразим на координатной плоскости с сеткой единичных клеток множество решений данного неравенства. Это круг радиуса $\sqrt{5}$ (рисунок 16). Отрезок $\sqrt{5}$ равен диагонали любого из прямоугольников сетки, стороны которого 1 и 2. Сосчитаем количество узлов сетки. Оно равно 21.

Ответ. 21.

ВОПРОСЫ

1. Приведите примеры линейного и нелинейного неравенств с двумя переменными.

2. Что называется решением неравенства с двумя переменными?

3. Что значит решить неравенство с двумя переменными?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

123. Какая из пар чисел $\left(-1; \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ является решением неравенства $y - 3x < 1$?

124. Решением какого из неравенств: а) $y + x^2 \leq 5$; б) $|y| \geq |x + 1|$ является пара чисел $(10^{-5}; 10^6)$?

125. Укажите какую-нибудь пару чисел, являющуюся решением неравенства: а) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 \leq 225$; б) $|x + y| > x^2 + y^2$.

126. Как можно найти 15 каких-либо решений неравенства: а) $y + x > 1$; б) $y - x^2 < 7$? Приведите примеры трех таких решений.

127. Исследуйте и установите, чем отличаются множества пар чисел, заданных неравенствами $y < x^2 + 6x + 1$ и $y \leq x^2 + 6x + 1$. Какому из этих множеств принадлежит точка: а) (1; 8); б) (–1; –4)?

128. Запишите неравенство, множество решений которого показано на рисунке 17.

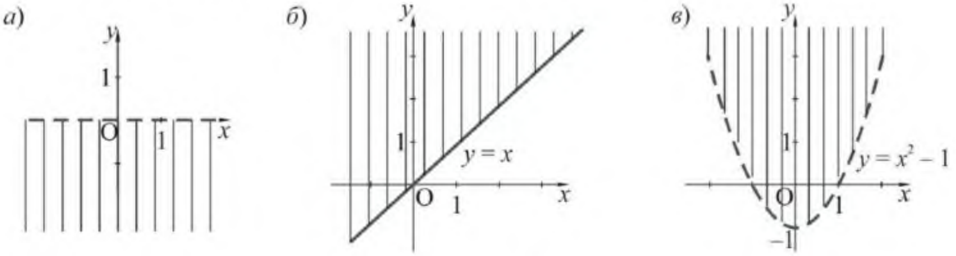


Рисунок 17

129. Изобразите в координатной плоскости решения неравенства:

а) $x \leq 4$; в) $x + y \geq 5$; д) $y \leq -x^2 + 4$;

б) $y > -3$; г) $y - \frac{1}{2}x^2 > 0$; е) $x^2 + y^2 \geq 9$.

130. Установите, сколько пар целых чисел являются решениями неравенства $x^2 + y^2 \leq 2$.

131. Установите, в каких координатных четвертях содержится множество точек, координаты которых являются решениями неравенства: а) $(x - 3)^2 + y^2 \leq 9$; б) $x^2 + (y + 2)^2 \leq 4$.

Уровень В

132. Брат и сестра, у которых было вместе не больше 400 тенге, купили x карандашей по цене 30 тенге и y карандашей по 40 тенге. Установите: а) какое наибольшее число карандашей они могли купить; б) сколько пар натуральных чисел $(x; y)$ удовлетворяют условию задачи.

133. Запишите неравенство, множество решений которого показано на рисунке 18.

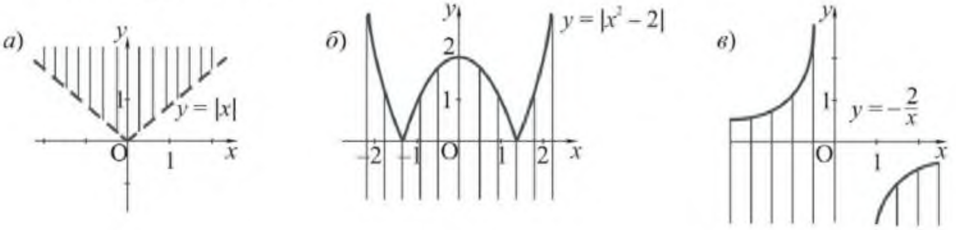


Рисунок 18

134. Изобразите в координатной плоскости решения неравенства:

а) $x^2 + y^2 \le 4$; в) $y < 2x - 3$; д) $x^2 - y - 4 \le 0$;

б) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 > 16$; г) $y \ge \sqrt{x} + 1$; е) $|x| < y$.

135. Верно ли, что множество решений неравенства $x^2 - 2x + y^2 - 4y > 0$ содержится в первой координатной четверти?

136. Решите неравенство:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 \le 0$; б) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 30 \le 0$.

137. Изобразите множество пар чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения:

а) $\sqrt{y^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}x^2} = y + \frac{1}{3}x$; в) $\sqrt{y^2 - 2x^2y + x^4} = x^2 - y$;

б) $\sqrt{y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{16}x^2} = -y + \frac{1}{4}x$; г) $\sqrt{y^2 - x^2y + \frac{1}{4}x^4} = y - \frac{1}{2}x^2$.

138. Решите неравенство $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ky + p \le 0$, если:

а) $a = \frac{1}{2}$, $b = c = 0$, $d = k = -1$, $p = -4$;

б) $a = c = 1$, $b = 0$, $d = -4$, $k = 6$, $p = 9$;

в) $a = c = d = k = 0$, $b = 2$, $p = -16$.

139. Для школьной библиотеки купили книги по цене 2000 тенге и 1600 тенге, всего на сумму не более 100 000 тенге. Проведите исследование и установите, какое наибольшее количество этих книг могли купить, если известно, что купили: а) наибольшее количество более дорогих книг; б) наибольшее количество более дешевых книг; в) одинаковое количество этих книг; г) книги на одинаковую сумму.

Уровень C

140. На каком из рисунков 19 (*а*, *б*, *в*) изображены все решения неравенства: 1) $x \le \frac{4}{y}$; 2) $xy \le 4$; 3) $y \le \frac{4}{x}$?

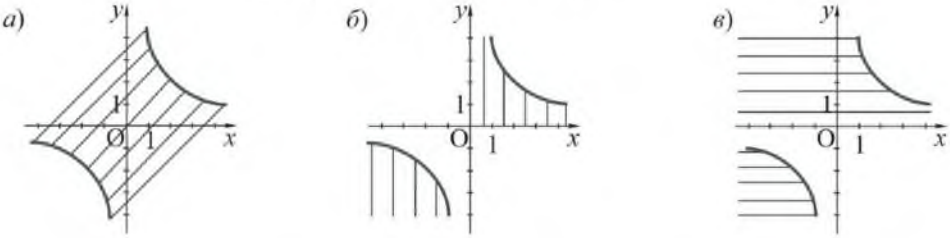


Рисунок 19

141. Изобразите в координатной плоскости решения неравенства:

а) $y \ge \sqrt{|x|}$; в) $|y| < 2x + 4$;

б) $\frac{4}{|x|} > y$; г) $|x| + |y| \le 5$.

5. Системы неравенств с двумя переменными

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятие системы неравенств с двумя переменными;
- знать, что называется решением системы неравенств с двумя переменными;
- уметь изображать множество решений системы неравенств с двумя переменными в координатной плоскости;
- уметь решать простейшие текстовые задачи на составление систем неравенств с двумя переменными.

Пример 1. Найти все общие решения неравенств $x^2 + y^2 \geq 16$ и $x + y \leq 2$, то есть решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16, \\ x + y \leq 2. \end{cases}$

Решение. Решениями первого неравенства являются координаты всех точек координатной плоскости, не содержащихся в круге с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Решениями второго неравенства являются координаты всех точек полуплоскости с границей $x + y = 2$, расположенных не выше этой границы. Пересечение указанных областей образует множество решений данной системы неравенств (рисунок 20).

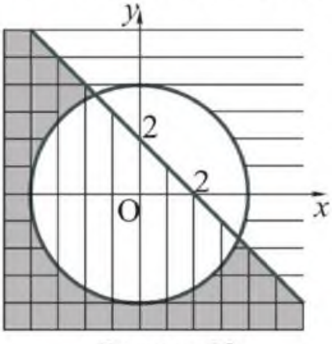


Рисунок 20

Отметим, что *решением системы неравенств с двумя переменными* называется упорядоченная пара их значений, обращающая каждое из неравенств системы в верное числовое неравенство. *Решить систему неравенств с двумя переменными* – значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 - y - 4 \le 0, \\ x + 2y - 2 \le 0. \end{cases}$

Решение. Заменим данную систему неравенств ей равносильной: $\begin{cases} y \ge x^2 - 4, \\ y \le -\frac{1}{2}x + 1. \end{cases}$ Построим график параболы $y = x^2 - 4$ и график прямой $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Выделим на координатной плоскости все общие решения неравенств данной системы (рисунок 21).

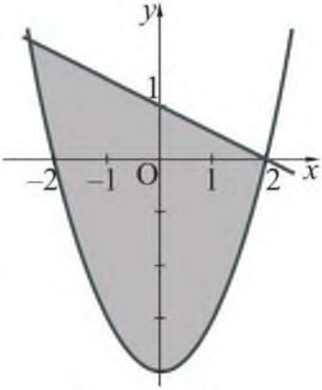


Рисунок 21

Пример 3. Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств $\begin{cases} y \ge |x| - 1, \\ x^2 + y^2 \le 4. \end{cases}$

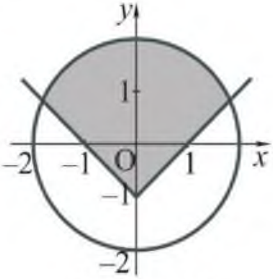


Рисунок 22

Решение. Первое неравенство системы задает на координатной плоскости множество всех точек графика уравнения $y = |x| - 1$ и всех точек, расположенных над ним. Второе – круг с центром (0; 0) и радиусом 2. Пересечение этих множеств показано на рисунке 22.

Задача 1. Дистанцию 100 м девятиклассник пробежал с попутным ветром за время, не меньшее 12 с, а против ветра – за время, не большее 15 с. Какой могла быть скорость ветра?

Решение. Пусть x м/с – скорость девятиклассника, y м/с – скорость ветра. Тогда, по условию задачи $\begin{cases} \frac{100}{x+y} \ge 12, \\ \frac{100}{x-y} \le 15. \end{cases}$ Так как $x > y > 0$, то получим $\begin{cases} 100 \ge 12(x+y), \\ 100 \le 15(x-y); \end{cases}$ $\begin{cases} 25 \ge 3x + 3y, \\ 20 \le 3x - 3y; \end{cases}$ отсюда $\begin{cases} y \le 8\frac{1}{3} - x, \\ y \le x - 6\frac{2}{3}. \end{cases}$

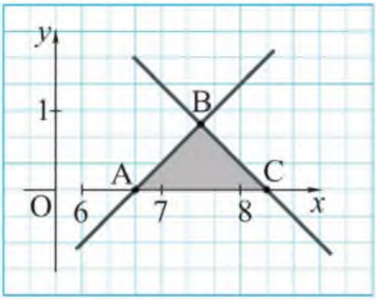


Рисунок 23

Построим в координатной плоскости фигуру, состоящую из всех точек, координаты которых являются решениями полученной системы неравенств (рисунок 23). Решениями этой системы неравенств являются координаты $(x; y)$ любой точки треугольника ABC, кроме точек его стороны AC. Учитывая координаты точки $B\left(7\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$, находим, что $0 < y \leq \frac{5}{6}$.

Заметим, что значения y можно было найти сложением левых и правых частей неравенств системы. (Сделайте это самостоятельно.)

Ответ. Не больше $\frac{5}{6}$ м/с.

Задача 2. Сумма катетов прямоугольного треугольника не меньше 10 дм, а его гипотенуза не больше 9 дм. Может ли площадь этого треугольника быть равной: а) 4 дм^2; б) 5 дм^2?

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника x дм и y дм. По условию задачи составим систему неравенств $\begin{cases} x + y \geq 10, \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 9. \end{cases}$ Преобразуем каждое неравенство системы $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 \geq 100, \\ x^2 + y^2 \leq 81. \end{cases}$ Вычитая левые и правые части этих неравенств, получим $2xy \geq 19$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}xy$, следовательно, $\frac{1}{2}xy \geq \frac{19}{4}$. Итак, площадь данного треугольника не меньше $4\frac{3}{4}$ дм^2.

Ответ. а) Не может; б) может.

ВОПРОСЫ

1. Что называется решением системы неравенств с двумя переменными?

2. Что значит решить систему неравенств с двумя переменными?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

142. Какие из пар чисел (–4; –4), (–1; –2), (1; –1), (2; –1), (2; 1), (3; 3) являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x \geq y, \\ x^2 - 2x \leq y? \end{cases}$

143. Решением какой из систем неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 20, \\ x + y < 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 < 2,5, \\ xy > 10 \end{cases}$ является пара чисел $\left(3\frac{1}{3}; 3\right)$?

144. Проведите исследование и составьте систему неравенств, множество решений которой изображено на рисунке 24, *а*, *б*.

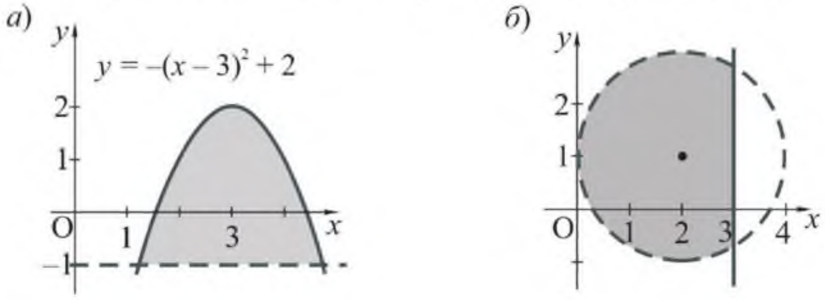


Рисунок 24

145. Постройте в координатной плоскости фигуру, координаты каждой точки которой являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq 3 - x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \leq 0, \\ y \geq x^2 - 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ x \geq 1. \end{cases}$

146. Изобразите множество всех точек, координаты которых являются решениями системы неравенств $\begin{cases} y < x^2 + 1, \\ x^2 + (y-1)^2 < 4. \end{cases}$ Проведите исследование и укажите число ее решений с целыми значениями *x* и *y*.

147. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой: а) $x + y = 6$; б) $3x - 4y = 12$.

148. Найдите площадь фигуры, координаты каждой точки которой являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} 1 \le x \le 5, \\ 0 \le y + 2 \le 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \le x + 1 \le 4, \\ 0 \le 2y - 2 \le 3. \end{cases}$

149. Решите графически систему неравенств:

а) $\begin{cases} y \ge x^2, \\ y < 5 - x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \le \sqrt{x}, \\ y \ge (x - 3)^2 - 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \ge x^2 - 2x - 3, \\ y < x + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < y < 0, \\ y < \frac{1}{2}x^3. \end{cases}$

150. Сумма площадей двух неравных квадратов не больше 16 м^2. Найдите длины их сторон, если они выражаются целым числом метров.

151. Периметр равнобедренного треугольника не больше 10 м, причем каждая его сторона выражается целым числом метров. Установите, сколько существует пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию задачи, если x м – длина боковой стороны, y м – длина основания треугольника.

152. Среди всех двузначных чисел, не превышающих 20, найдите то, которое больше увеличенного в 10 раз арифметического квадратного корня из произведения его цифр. Исследуйте все возможные случаи.

153. Для школы купили волейбольные и баскетбольные мячи. Если бы волейбольных мячей было куплено вдвое больше, то всех мячей было бы меньше 48. Если бы приобрели вдвое больше баскетбольных мячей, то всего мячей было бы меньше 60. Исследуйте, каково могло быть наибольшее количество купленных мячей.

Уровень В

154. Проведите исследование и запишите систему неравенств, множество решений которой изображено на рисунке 25, *а*, *б*.

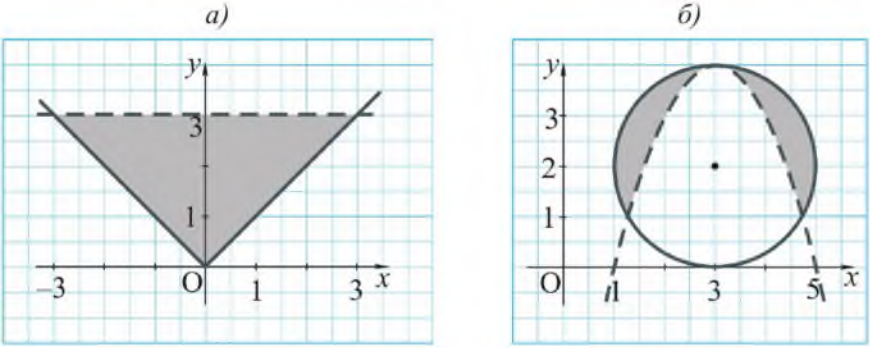


Рисунок 25

155. Найдите все пары натуральных чисел, являющиеся решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2 \le 9,\\ y<(x-1)^2-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2+y^2-2x+4y \le 4,\\ |x|>4.\end{cases}$

б) $\begin{cases}y \ge |x|,\\ 2y \le 8-x^2;\end{cases}$

156. Решите графически неравенство, используя системы неравенств:

а) $xy \le 0$; в) $x^2-y^2 \ge 0$;

б) $(x-3)(2y-x)>0$; г) $y^2-y<x-yx$.

157. Установите, сколько пар целых чисел $(x; y)$ являются решениями системы неравенств $\begin{cases}y \le -\frac{1}{2}x^2+2,\\ y \ge -2\sqrt{x}.\end{cases}$

158. Моторная лодка преодолела 100 м по течению реки не более чем за 5,4 с, а против течения реки – не более чем за 7,2 с. Установите, какой могла быть (м/с) собственная скорость лодки.

159. Сторона ромба не больше 10 см, а сумма его диагоналей не больше 25 см. Исследуйте, может ли площадь этого ромба быть равной: а) 55 см^2; б) 60 см^2.

160. Девятиклассники посещают факультатив по математике, причем девочек больше. Если бы мальчиков было вдвое больше, то всего членов факультатива было бы более 12, а если бы девочек было вдвое больше, то всего их было бы менее 15 человек. Сколько девочек и сколько мальчиков посещают факультатив по математике?

161. Из пункта, расположенного у подножия горы, вышли альпинисты на север и туристы – на восток. Они двигались с постоянными скоростями, причем туристы быстрее. Через два часа расстояние между ними было не больше 8 км. Установите: а) могла ли скорость альпинистов быть равной 3 км/ч; б) с какой наибольшей скоростью (км/ч), выраженной целым числом, могли двигаться альпинисты.

Уровень С

162. Проведите исследование и запишите систему неравенств, множество решений которой изображено на рисунке 26, *а*, *б*.

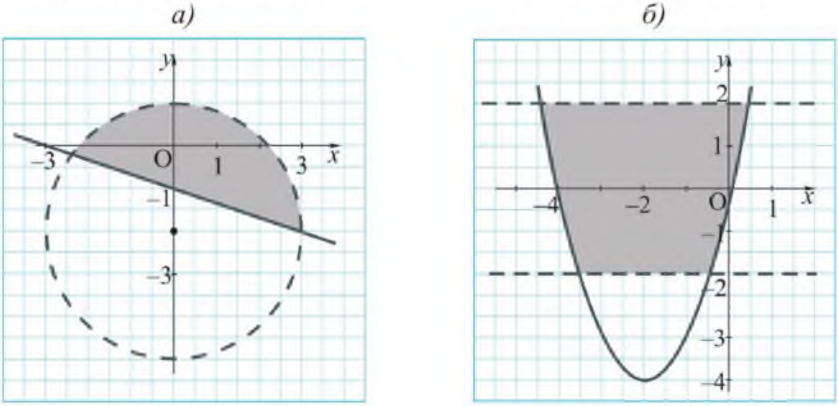


Рисунок 26

163. Постройте в координатной плоскости фигуру, координаты каждой точки которой являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ y \ge \dfrac{2}{x}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - y \ge 0, \\ x^2 + |y| \ge 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y \le 6, \\ |x| + y \ge 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \le 16, \\ |y| + 3x \le 3. \end{cases}$

164. Установите, сколько пар (x; y) натуральных чисел являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \le x^3, \\ x^2 + y^2 \le 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \le \frac{1}{2}x^2 + 1, \\ |x| \le 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 4x \le y - 5, \\ x^2 - 6x \le 3 - y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y < \sqrt{4x - x^2}, \\ y > 0. \end{cases}$

165. Найдите площадь фигуры, координаты каждой точки которой являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \le 4, \\ y \ge |2x - 4|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy \le 0, \\ |y - x| \le 5. \end{cases}$

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Предложите кому-либо из товарищей к порядковому номеру месяца его рождения, увеличенному вдвое, прибавить 5. Затем полученную сумму увеличить в 50 раз, от результата отнять 365 и прибавить его возраст. Как по ответу товарища можно определить, сколько ему лет и в каком месяце он родился?

2) Козу привязывают веревкой длиной 3 м к колечку, которое скользит по натянутой между двумя колышками A и B проволоке длиной 4 м. Постройте в прямоугольной системе координат фигуру, изображающую множество всех точек пастбища, до которых может дотянуться коза, если отрезок AB лежит на оси Ox, а его серединой является начало координат.

6. Упражнения на повторение раздела «Уравнения, неравенства с двумя переменными и их системы»

Уровень А

166. Найдите двузначное число: а) прибавив к которому сумму его цифр, получим 60; б) равное сумме числа его десятков и квадрата числа единиц.

167. Трехзначное число оканчивается цифрой 9. Если эту цифру переставить на первое место, то первоначальное число, умноженное на 9, будет больше нового числа на 71. Найдите первоначальное число.

168. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 10, \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$ (задача из трактата «Арифметика» древнегреческого математика Диофанта).

169. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4xy = 5, \\ 3x^2 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 = 2, \\ x^2 + xy = 3. \end{cases}$

170. При делении двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 4, а в остатке 3. Если это число разделить на произведение его цифр, то в частном будет 3, а в остатке будет 5. Что это за число?

171. Найдите сторону ромба, площадь которого равна 80 см^2, а отношение диагоналей равно 0,8.

172. Используя способ сложения уравнений, решите систему:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x^2 - y^2 = -15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 + 6x = 11, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

173. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy + y = 9, \\ xy - x = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ x^2 - y = 9. \end{cases}$

174. Дан треугольник ABC, в котором $AC = 9$ см, $BC = 12$ см, а медианы AM и BN перпендикулярны. Найдите AB.

175. Найдите все пары натуральных чисел $(x; y)$, являющиеся решениями уравнения:

а) $3x^2 + y^2 = 13$;　　в) $x^2 - y^2 = 105$.

б) $(xy)^2 - 5xy + 6 = 0$;

176. а) Одна из сторон прямоугольника равна $\sqrt{997}$ см. Найдите его диагональ, если она и вторая сторона прямоугольника выражаются целым числом сантиметров. б) Один из катетов прямоугольного треугольника равен $\sqrt{2031}$ см. Найдите его гипотенузу, если она равна целому числу сантиметров.

177. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(2x - y)(x - 3) = 0$;　　в) $(y - 4)(y - x^2) \leq 0$;

б) $\dfrac{x + 2y}{x - 4} = 0$;　　г) $\dfrac{x - y}{y + 3} \geq 0$.

178. Сумма двух смежных сторон прямоугольника не меньше 5 дм, а его диагональ не больше 4 дм. Исследуйте, может ли площадь этого прямоугольника быть равной: а) 4,5 дм^2; б) 3 дм^2.

179. Постройте в координатной плоскости фигуру, координаты каждой точки которой являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x + 2 \geq 0; \end{cases}$　　в) $\begin{cases} y < \dfrac{4}{x}, \\ y \geq x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - 3x - 4 \leq 0, \\ 2y - 6x + 8 \geq 0; \end{cases}$　　г) $\begin{cases} |x| < 2, \\ x^2 + y^2 < 9. \end{cases}$

180. а) Возле школы планировали посадить несколько лип и берез. Если лип посадить вдвое больше, а берез – сколько намечено, то всего будет посажено меньше 8 деревьев. Если берез посадить вдвое больше, а лип – сколько намечено, то лип окажется больше. Сколько лип и сколько берез планировали посадить?

б) За 500 рублей куплено несколько пудов сахара (1 пуд – 16 кг). Если бы на те же деньги было куплено сахара на 5 пудов больше, то каждый пуд сахара был бы на 5 рублей дешевле. Сколько пудов сахара куплено? (Старинная русская задача.)

Уровень В

181. а) Найдите два натуральных числа, если сумма обратных им чисел равна 0,2; б) Существуют ли два натуральных числа, разность квадратов которых равна 101?

182. Возраст одного человека не старше 80 лет в 1989 году был равен сумме цифр его года рождения. Найдите год его рождения.

183. Найдите натуральное число, которое от прибавления 5 и от вычитания 11 дает квадраты некоторых натуральных чисел (задача из древнеиндийской рукописи на березовой коре, найденной при раскопках в 1881 году в Индии).

Большой Убинский порог

184. Какова протяженность d км реки Уба, являющейся крупным правым притоком реки Иртыш, если d – составное трехзначное число, большее 276, но меньшее 282, которое нельзя представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

185. Докажите, что прямая $x + y + 2 = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 2$.

186. Общее сопротивление двух проводников при их последовательном соединении равно 12 Ом, а при параллельном – $2\frac{2}{3}$ Ом. Найдите сопротивление каждого проводника.

187. Дорога от лагеря до поселка длиной 10 км идет сначала с горы, а затем в гору. Туристы на спуске шли со скоростью на 2 км/ч больше, чем на подъеме. Найдите их скорости на спуске и подъеме, если путь от лагеря до поселка занял 2 часа 48 минут, а обратный путь – 2 часа 32 минуты.

188. Решите систему уравнений, используя способ деления левых и правых частей уравнений системы:

а) $\begin{cases} x^3y - x^2y = 50, \\ xy - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2y^2 - 3xy + y = 4, \\ 2xy - 3x^2 + x = 2. \end{cases}$

189. Используя способ введения новых переменных, найдите все решения системы уравнений, состоящие из пар рациональных чисел:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 243, \\ xy(x + y) = 162; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8(x^3 + y^3) = 65xy, \\ 2(x + y) = 5xy. \end{cases}$

190. Найдите все пары целых чисел, являющиеся решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 4, \\ x^3 - y^3 = 63; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x = 5, \\ xy + x = \left(\dfrac{x + y + 1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x - y - 1}{2}\right)^2. \end{cases}$

191. Дамир и Динара решили вместе систему уравнений $\begin{cases} (x + y)(y - 1) = 3, \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \end{cases}$ где x и y – целые числа. Дамир составил из пар решений выборку из всех значений x, а Динара – из всех значений y. Затем каждый из них нашел стандартное отклонение данных полученной выборки. Установите, у кого получилось большее стандартное отклонение.

192. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = |x^2 - 6x + 5|, \\ y - x + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 8, \\ xy + y = 4. \end{cases}$

193. Изобразите множество решений неравенства с двумя переменными: а) $x^2 + y^2 < 6x - 6y - 9$; б) $|y| < \sqrt{x + 2}$.

194. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами. Если бы девятиэтажных домов было вдвое больше, то всех домов было бы меньше 12. А если бы пятиэтажных домов было вдвое меньше, то всех домов было бы больше 4. Исследуйте, могло ли количество всех домов быть равным: а) 11; б) 10.

Уровень С

195. Во сколько раз сопротивление одного проводника больше, чем сопротивление другого, если известно, что их общее сопротивление при последовательном соединении в $6\frac{1}{4}$ раза больше, чем при параллельном?

196. Найдите все значения c, если прямая $x + y + c = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$.

197. Решите систему, первое из уравнений которой можно рассматривать как квадратное относительно любой из переменных или новой переменной $t = \frac{x}{y}$:

а) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 0, \\ y^2 - x^2 = 75; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 - 5xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

198. В равнобедренном треугольнике основание равно a, а высота, проведенная к нему, равна h. Найдите радиус окружности, касающейся прямых, содержащих боковые стороны этого треугольника, если его основание является хордой окружности.

199. Площадь S четырехугольника $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, равна 10 дм^2. Найдите площади треугольников BOC и AOD, если площади треугольников AOB и COD соответственно равны 1 дм^2 и 4 дм^2.

200. Докажите, что любая пара чисел является решением неравенства: а) $x^4 - x^2y^2 + y^4 \geq 0$; б) $x^6 - x^3y^3 + y^6 \geq 0$.

201. Решите графически неравенство:

а) $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 > 0$; в) $3 - |x| \geq |1 - y|$.

б) $\frac{x - y}{x + y} \leq 0$;

202. Установите, сколько пар $(x; y)$ натуральных чисел являются решениями системы неравенств $\begin{cases} \frac{1}{x} \leq y \leq -x + 4{,}5, \\ x > 0. \end{cases}$

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

203. 1A) Какое из уравнений: а) $x^2 + 4x + 4 = 0$; б) $xy = 19$; в) $x\sqrt{3} - y\sqrt{5} = 8$ является нелинейным уравнением с двумя переменными? Найдите одно из его решений.

2A) Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 10, \\ 12(x + y) = 5xy. \end{cases}$

3B) Две группы туристов одновременно отправились в поход, двигаясь с постоянными скоростями, первая – на север, вторая – на запад, и через 4 ч расстояние между ними было 24 км. Если бы обе группы отправились в одном направлении, то через 4 ч расстояние между ними было бы 4,8 км. Найдите скорость движения каждой группы.

4B) Изобразите в координатной плоскости множество решений неравенства $y + x^2 < 4x - 1$ и выберите из этого множества все пары $(x; y)$ натуральных чисел.

5C) Найдите площадь фигуры, координаты каждой точки которой являются решениями системы неравенств $\begin{cases} |x| + |y| \le 4, \\ y \le 1. \end{cases}$

ЭТО ИНТЕРЕСНО!


Диофант

Развитие теории решения уравнений, неравенств и их систем являлось главным предметом алгебры как науки почти до середины XIX века. Важность этих вопросов обусловлена и тем, что с их использованием решаются многочисленные практические задачи.

Одним из увлекательных разделов этой теории является решение уравнений с двумя или более переменными в целых или рациональных числах. Их называют неопределенными или диофантовыми уравнениями по имени древнегреческого математика III века Диофанта. В его книге «Арифметика», сохранившейся до наших дней, содержится большое количество задач на составление уравнений и их систем.

Гипатия

Приведем две из них:

1А) найти два числа, отношение которых равно 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5;

2В) найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из них, дает куб некоторого числа (решите эти задачи самостоятельно).

Решением неопределенных уравнений и популяризацией трудов Диофанта занималась древнегреческий ученый Гипатия (370–415), вошедшая в историю как первая женщина-математик.

П. Ферма

Способы решения уравнений, неравенств и их систем не выше второй степени люди освоили еще в первом тысячелетии, а выше второй – лишь во второй половине второго тысячелетия. Например, знаменитое уравнение $x^n + y^n = z^n$, где $n \in N$, носящее имя французского математика Пьера Ферма (1601–1665), которое он написал на полях «Арифметики» Диофанта, до сих пор не решено в целых числах полностью для любого натурального n.

Большое значение в математике имеет и доказательство тождественных неравенств, то есть таких неравенств, которые верны при всех допустимых или указанных значениях входящих в них переменных. Например, неравенства $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, где $a > 0$, $b > 0$, выражающие соотношения между средними: арифметическим

$\left(\frac{a+b}{2}\right)$, геометрическим ($\sqrt{ab}$), гармоническим $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$ и квадратичным $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$. (Докажите эти неравенства.)

Найдите, пользуясь Интернетом:

а) сведения о биографии Диофанта и его математическом наследии;

б) решение какого-либо неопределенного уравнения из «Арифметики» Диофанта;

в) сведения о биографии Гипатии и ее вкладе в развитие математической науки;

г) информацию о практическом применении неравенств о средних (арифметическом, геометрическом, гармоническом и квадратичном).

II. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

В результате изучения раздела надо

знать

- основные понятия и правила комбинаторики;
- определения: факториала числа, перестановок, размещений и сочетаний без повторений;
- формулы для нахождения числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений;
- формулу бинома Ньютона и его свойства.

уметь

- решать простейшие комбинаторно-логические задачи;
- применять правила суммы и произведения для решения комбинаторных задач;
- решать несложные комбинаторные задачи с использованием формул для нахождения числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений;
- применять формулу бинома Ньютона и его свойства для решения простых комбинаторных задач.

7. Основные понятия и правила комбинаторики

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятия: комбинаторика, комбинаторная задача, граф;
- знать правило суммы и правило произведения и уметь применять их для решения комбинаторных задач.

На практике часто ставится задача выбрать или упорядочить объекты различных множеств. Например, фермеру приходится планировать размещение сельскохозяйственных культур на нескольких полях, мастеру – распределять различные виды работ между подчиненными ему специалистами, в школе – составлять расписание уроков.

Раздел математики, посвященный решению задач выбора или расположения элементов множеств по установленным правилам, называется **комбинаторикой**, а сами такие задачи – *комбинаторными*. Слово «комбинаторика» произошло от латинского слова «*combina*», что означает «сочетать», «соединять». Рассмотрим примеры решения комбинаторных задач.

Задача 1. Самолет совершает облет природоохранной зоны между пунктами A, B, C, D, расстояния (в км) между которыми известны (рисунок 27). Какой маршрут облета всех этих пунктов, начиная из пункта A, кратчайший?

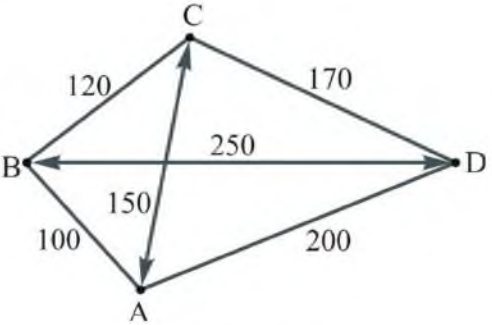


Рисунок 27

Решение. Рассмотрим все возможные варианты маршрутов.

Маршрут	Протяженность маршрута (км)
A → B → C → D → A	100 + 120 + 170 + 200 = 590
A → B → D → C → A	100 + 250 + 170 + 150 = 670

A → C → B → D → A	150 + 120 + 250 + 200 = 720
A → C → D → B → A	150 + 170 + 250 + 100 = 670
A → D → B → C → A	200 + 250 + 120 + 150 = 720
A → D → C → B → A	200 + 170 + 120 + 100 = 590

Сравнив протяженности всех маршрутов, получаем ответ.

Ответ. Маршрут A → B → C → D → A или A → D → C → B → A.

Для решения комбинаторных задач удобно использовать схемы, состоящие из точек, обозначающих некоторые объекты, и соединяющих их отрезков, которые выражают связи между этими объектами. Такая схема называется ***графом***, точки – *вершинами* графа, а соединяющие их отрезки – *ребрами* графа.

Задача 2. У бабушки Максима есть дочь и двое сыновей. У одного из сыновей бабушки двое сыновей и дочь, а у другого – две дочери и сын. У бабушкиной дочери трое сыновей и дочь. Сколько родственников названо?

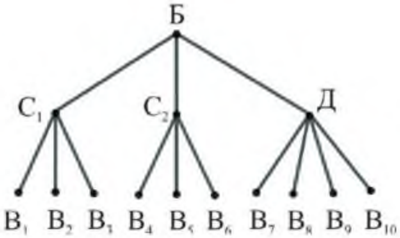


Рисунок 28

Решение. Для решения задачи используем граф (рисунок 28). Обозначим его вершины Б (бабушка), $С_1$, $С_2$ и Д – ее сыновья и дочь, $В_1$, $В_2$, …, $В_{10}$ – внуки и внучки бабушки, в том числе Максим. Подсчитав число вершин графа, получим ответ.

Ответ. 14.

Задача 3. Тридцать учащихся 5–9 классов составили 40 вопросов для викторины, причем девятиклассники подготовили одинаковое количество вопросов, а учащиеся различных параллелей классов – разное. Сколько учащихся составили только по одному вопросу?

Решение. Выберем из каждой параллели классов по одному ученику, всего их 5. Из условия задачи следует, что все они придумали разное количество вопросов. Поэтому общее количество вопросов (1 + 2 + 3 + 4 + 5), составленных ими, не меньше 15. Тогда остальные 25 учащихся составили не более 25 вопросов. Следовательно, каждый из них составил по одному вопросу. Тогда искомое число равно 25 + 1 = 26.

Ответ. 26.

Задача 4. На блюде лежат 5 яблок, 4 груши и 8 персиков. Сколько имеется способов выбора одного фрукта из них?

Решение. Одно яблоко можно выбрать 5 способами, одну грушу – 4, а один персик – 8. Следовательно, один из этих фруктов можно выбрать (5 + 4 + 8) способами.

Ответ. 17.

Для решения задач типа задачи 4 применяется правило, называемое в комбинаторике **правилом суммы**. *Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличается от выбора элемента b, то выбор «a или b» можно осуществить (m + n) способами.*

Используя понятия объединения и пересечения множеств, это правило можно сформулировать так: если конечные множества A и B не имеют общих элементов, то количество элементов их объединения равно сумме числа элементов множеств A и B. Это правило распространяется на случаи выбора элементов из трех и более множеств, каждые два из которых не имеют общих элементов.

Задача 5. Сколько имеется способов выбора пары (открытка и конверт) из 4 открыток и 3 конвертов?

Решение. Решим задачу с использованием графа (рисунок 29), на котором буквой П обозначена пара (открытка и конверт), буквами $О_1$, $О_2$, $О_3$, $О_4$ – открытки, $К_1$, $К_2$, $К_3$ – конверты. Как видим, искомое число пар равно $4 \cdot 3 = 12$.

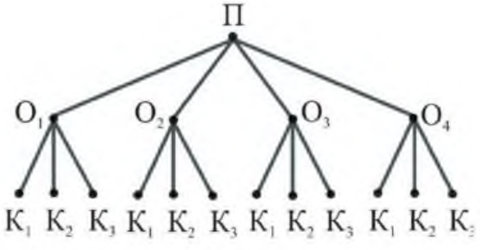


Рисунок 29

Ответ. 12 способов.

При решении задач типа задачи 5 применяется правило, называемое в комбинаторике **правилом произведения**. *Если элемент a* *можно выбрать m различными способами, причем после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n различными способами, то выбор «a и b» можно осуществить (m · n) способами.*

Используя понятия множества и их элементы, это правило можно сформулировать так: если множество A состоит из m элементов, а множество B – из n элементов, то множество, обозначаемое $A \cdot B$, состоящее из всевозможных пар $(a;\ b)$, где $a \in A$, $b \in B$, содержит $(m \cdot n)$ элементов.

Действительно, если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, то все пары вида $(a;\ b)$, где $a \in A$, $b \in B$, можно представить в таблице:

$$\begin{array}{c} (a_1;\ b_1)\ (a_2;\ b_1)\ \ldots\ (a_n;\ b_1) \\ (a_1;\ b_2)\ (a_2;\ b_2)\ \ldots\ (a_n;\ b_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_1;\ b_m)\ (a_2;\ b_m)\ \ldots\ (a_n;\ b_m) \end{array}$$

В такой таблице m строк и n столбцов. Следовательно, число всех пар равно $m \cdot n$.

Это правило распространяется на случаи выбора элементов из трех и более множеств.

Задача 6. Сколько всего двузначных чисел?

Решение. Число десятков двузначного числа может быть одним из девяти: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, а число единиц – одним из десяти: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Если число десятков равно 1, то цифру единиц можно выбрать 10 способами, аналогично для каждой из других цифр десятков. По правилу произведения всего получается $9 \cdot 10 = 90$ двузначных чисел.

Ответ. 90.

Отметим, что при решении комбинаторных задач нередко надо находить число элементов объединения двух множеств, которые имеют общие элементы. В этом случае количество элементов их объединения равно сумме чисел элементов множеств A и B без количества их общих элементов.

Задача 7. Сколько всего среди первых 100 натуральных чисел таких, которые делятся на 2 или на 3?

Решение. Из первых 100 натуральных чисел 50 чисел делятся на 2, 33 числа делятся на 3, а на 2 и на 3 (то есть делятся на 6) – 16 чисел (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, искомое число равно: $50 + 33 - 16 = 67$.

Ответ. 67.

ВОПРОСЫ

1. Что называется комбинаторикой?

2. Объясните понятие комбинаторной задачи.

3. Какая схема называется графом?

4. Объясните правило суммы на примере решения комбинаторной задачи.

5. Объясните правило произведения на примере решения комбинаторной задачи.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

204. На полке стоят книги: три романа, две повести и четыре сборника стихов. Сколькими способами можно выбрать одну книгу?

205. Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$. Сколькими способами можно выбрать из них один элемент так, чтобы он принадлежал хотя бы одному из этих множеств?

206. Зритель может занять одно из пяти свободных мест в первом ряду зала или одно из трех свободных мест в последнем ряду. Сколько у него вариантов выбора места в зрительном зале?

207. Для занятий в секцию по фигурному катанию записались 9 девочек и 7 мальчиков. Сколькими способами можно составить из них пару?

208. Из города N в город M ведут 7 дорог, а из M в поселок K – 6 дорог. Сколько маршрутов поездки из N в K через M?

209. Сколькими способами можно составить слог из двух букв, в котором на первом месте стоит согласная, а на втором – гласная буква русского языка, если в его алфавите 21 согласная буква и 10 гласных?

210. Установите, сколькими способами 5 школьников можно рассадить на 5 разноцветных стульях.

211. Шестеро друзей решили покататься на карусели, сидения которой изображали шесть различных зверей. После спора, кому какое сидение занять, они решили, что каждый из них покатается на каждом сидении карусели. Сколько раз им пришлось бы для этого прокатиться на карусели? Составьте таблицу занятия мест 1, 2, …, 6 друзьями (a, b, c, d, t, f).

212. В меню кафе 5 первых, 8 вторых и 7 третьих блюд. Сколькими способами можно выбрать обед, включающий первое, второе и третье блюда?

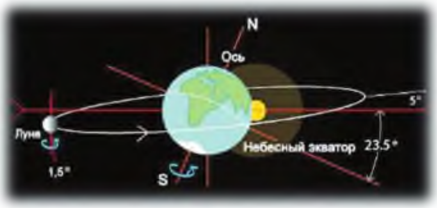
213. Рыбак поймал 5 окуней, 3 щуки и 4 леща. Сколькими способами можно выбрать для ухи две разные рыбы?

214. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых: а) используется по одному разу одна из цифр 3, 4, 5; б) используются только цифры 1, 2, 6, 7 без их повторения?

Уровень B

215. Сколько решений имеет уравнение $x + y = 2018$: а) в натуральных числах; б) в целых неотрицательных числах?

216. Известно, что скорость вращения Земли вокруг Солнца равна 40 247 км/ч, а скорость вращения Луны вокруг Земли – 8568 км/ч. Представьте числа, выражающие эти скорости, в виде суммы наименьшего количества степеней числа 2 с неотрицательными целыми показателями.



Вращение Луны вокруг Земли

Уровень С

217. а) У Бексултана две лошади, черной и гнедой масти; два седла, коричневое и желтое; две пары шпор, длинные и короткие; два подсумка, большой и малый. Сколькими способами он может осуществить полную экипировку для конного путешествия? Решите задачу с использованием графа.

б) Сколькими способами можно разменять купюру номиналом 10 000 тенге на купюры в 5000, 2000 и 1000 тенге?

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) В банке находятся пауки и жуки, всего насчитывается 50 ног. Сколько там жуков и пауков, если у паука 8 ног, а у жука 6 ног?

2) Кусок ткани разрезали на 4 части, затем одну из них – еще на 4 части. Одну из вновь полученных частей снова разрезали на 4 части и так далее. Могло ли получиться всех кусков: а) 36; б) 35?

3) Найдите значение выражения

$2^{11} - 2^{10} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^0$.

4) Представьте в виде суммы степеней числа 2 год своего рождения.

5) Имеется 10 ключей от 10 дверей, но неизвестно, к какой двери какой ключ подходит. Какое количество попыток надо сделать, чтобы открыть все двери, если к каждой из них подходит один ключ?

8. Перестановки без повторений

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения: перестановки без повторений, факториала числа;
- знать формулу числа перестановок из n элементов;
- уметь применять формулу числа перестановок для решения комбинаторных задач.

Задача 1. Сколько существует способов составления списка имен 5 учащихся, среди которых нет одинаковых?

Решение. На первое место можно поставить имя любого из пяти учеников, на второе – имя любого из четырех оставшихся, на третье – имя любого из трех оставшихся, на четвертое – имя любого из двух оставшихся и на пятое – имя одного оставшегося ученика. По правилу произведения всего таких способов составления списка $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ответ. 120 способов.

Решение этой задачи связано с установлением во множестве из 5 учащихся определенного порядка и нахождением числа вариантов перестановок из них. Множество вместе с установленным в нем порядком расположения его элементов называется *упорядоченным множеством*. Примерами упорядоченных множеств являются: алфавит любого языка; список учащихся класса; множество, состоящее из n последовательных натуральных чисел.

Различные упорядоченные множества, составленные из всех элементов данного множества, среди которых нет одинаковых, называются ***перестановками*** *его элементов без повторений.* Число перестановок из n элементов обозначают P_n (по первой букве французского слова *permutation*, что означает «перестановка»).

Выведем формулу числа перестановок из n элементов.

Множество, состоящее из одного элемента, можно упорядочить единственным образом, этот элемент является первым, то есть $P_1 = 1$. Множество из двух элементов можно упорядочить двумя способами, $P_2 = 2$. Множество из трех элементов – шестью способами, $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Вообще, $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. (Для этого произведения принято специальное обозначение $\boldsymbol{n!}$ (читается «эн факториал»).

Действительно, при последовательном выборе элементов и расположении их в определенном порядке на n местах на первое место можно поставить любой из n элементов. После того, как занято первое место, на второе место можно поставить $n - 1$ оставшихся элементов. Далее после занятия первого и второго мест, на третье место можно поставить $n - 2$ оставшихся элементов и так далее. В конце останется занять одно последнее место одним элементом. Тогда, по правилу произведения, все n мест можно занять $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \times \times \ldots \cdot 2 \cdot 1$ способами. Итак, $\boldsymbol{P_n = n!}$.

Отметим, что в математике принято считать $\mathbf{0! = 1}$. Целесообразность такого определения можно объяснить следующим. Для всех $n \geq 2$ имеем $n! = (n - 1)! \cdot n$. Если потребовать, чтобы это равенство выполнялось и при $n = 1$, то будем иметь $1 = 0!$.

Задача 2. Найти число перестановок из всех букв слова «алгоритм».

Решение. В данном слове 8 букв, среди которых нет повторяющихся. Искомое число перестановок равно $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \times \times 1 = 40\,320$.

Ответ. 40 320.

Задача 3. Сколько шестизначных чисел, кратных числу 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, в каждом из которых нет повторяющихся цифр?

Решение. Из условия задачи следует, что на последнем месте у каждого из таких чисел будет цифра 5. Цифры 1, 2, 3, 4, 6 могут быть расположены на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число равно $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ответ. 120.

Задача 4. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

Решение. Если бы вместо цифры 0 была бы какая-нибудь другая цифра, то всех четырехзначных чисел было бы $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Так как цифра 0 не может стоять в числе на первом месте, то всего четырехзначных чисел, записанных данными цифрами, будет $P_4 - P_3 = 24 - 6 = 18$.

Ответ. 18.

Задача 5. Каково наибольшее число элементов множества, в котором все элементы различные, если число перестановок из них меньше 5040?

Решение. По условию задачи надо найти наибольшее значение n, при котором верно неравенство $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n < 5040$. Так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$, то наибольшее значение n, при котором верно это неравенство, равно 6.

Ответ. 6.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятия перестановки.

2. Что называется факториалом числа?

3. По какой формуле находят число перестановок без повторений из n элементов?

4. Докажите, что $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

218. Сколько различных трехцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя ткань трех цветов?

219. Сколькими способами можно составить на один день расписание для первоклассников из четырех различных предметов?

220. Найдите число перестановок из всех букв слова: а) земля; б) победа.

221. Сколькими способами можно составить список из 9 учащихся? Как обычно составляются такие списки?

222. Сколькими способами можно рассадить на длинной скамейке 11 человек?

223. В поезде 14 вагонов. Сколькими способами можно распределить за каждым из них одного из 14 проводников?

224. Вычислите: а) $\frac{8!}{6!}$; б) $\frac{7!}{2!\cdot 4!}$; в) $\frac{9!}{6!\cdot 3!}$; г) $\frac{8!-7!}{6!}$.

225. Сколько элементов должно содержать множество, чтобы число всех перестановок из них было не больше: а) 120; б) 1000?

226. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 7 команд, если никакие две из них не наберут поровну очков?

227. Сколько пятизначных четных чисел можно составить из цифр 3, 5, 7, 8, 9?

Уровень B

228. Решите уравнение: а) $\frac{P_{n-2}}{P_{n-4}} = 90$; б) $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-2}} = 16$.

229. Сколько пятизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 0, 3, 5, 7, 9?

230. Исследуйте, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + y = n$, где $n \in N$.

231. На школьном концерте хотели выступить Адинай, Байтас, Вера, Гульден, Дархан. Сколькими способами можно составить список их выступлений, если: а) Байтас не будет выступать перед Адинай; б) Гульден выступит сразу после Дархана?

232. В коробке 7 цветных и 5 простых карандашей одинаковой формы. Исследуйте, какое наименьшее количество карандашей надо взять из коробки, не заглядывая в нее, чтобы среди них было не меньше 2 цветных и 1 простого карандашей.

Уровень C

233. Исследуйте, существует ли пятизначное число, записанное цифрами 0, 1 и тремя двойками, являющееся квадратом некоторого трехзначного числа.

234. Докажите, что любое число вида $4n^4 + 1$, где $n \in N$, является простым числом лишь при $n = 1$ (задача немецкого математика Х. Гольдбаха (1690–1764).

9. Размещения без повторений

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение размещений без повторений;
- знать формулу числа размещений без повторений из n элементов по k элементов;
- уметь применять формулу числа размещений для решения комбинаторных задач.

Задача 1. Сколько упорядоченных подмножеств, состоящих из двух различных элементов, можно составить из множества, содержащего четыре элемента, среди которых нет одинаковых?

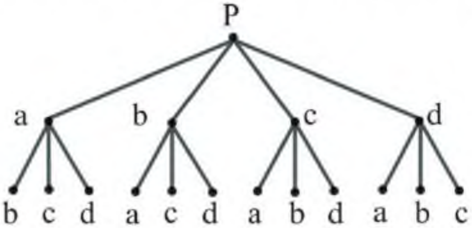


Рисунок 30

Решение. Обозначим данное множество $A = \{a, b, c, d\}$. Решим задачу с использованием графа (рисунок 30). Выбор первого элемента из множества A можно сделать четырьмя способами. Затем с каждым из этих четырех элементов можно составить три пары. Следовательно, всего число таких пар равно 12.

Ответ. 12.

Упорядоченные подмножества, состоящие из k различных элементов, составленные из множества, содержащего n различных элементов, называются ***размещениями*** *без повторений из n элементов по k элементов.* Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (по первой букве французского слова *arrangement*, что означает «размещение»). Читается: «число размещений из n элементов по k» или кратко «A из n по k».

Выведем формулу числа размещений n элементов по k.

Выбор элемента на первое место можно сделать n способами, на второе – $(n - 1)$ способами и так далее. Выбор k-го элемента можно осуществить $n - (k - 1)$ способами, то есть $n - k + 1$ способами.

Тогда по правилу произведения $\boldsymbol{A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$. Эту формулу можно преобразовать так:

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{A_n^k} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Отметим, что при $n = k$ получим $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$, то есть $\boldsymbol{A_n^n = P_n}$.

Задача 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр, можно составить?

Решение. Число различных способов выбора 4 элементов из 10 равно A_{10}^4. Поскольку с цифры 0 число не может начинаться, то искомое число равно

$A_{10}^4 - A_9^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (10-1) = 4536$.

Ответ. 4536.

Задача 3. При выборе кандидатов на три различные должности из нескольких претендентов были рассмотрены все возможные варианты. Их число оказалось равным 120. Сколько было претендентов на эти должности?

Решение. По условию задачи $A_n^3 = 120$, то есть $n \cdot (n-1)(n-2) = 120$. Это уравнение имеет единственное решение $n = 6$ в натуральных числах, так как лишь произведение трех последовательных натуральных чисел 4, 5, 6 равно 120.

Ответ. 6.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятия размещения без повторений из n элементов по k элементов.

2. По какой формуле можно найти число размещений из n элементов по k?

3. Используя формулу $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, докажите, что: а) $A_n^0 = 1$; б) $A_n^1 = n$; в) $A_n^n = P_n$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

235. Сколькими способами могут занять четыре различные вакансии 9 претендентов на них?

236. Сколькими способами можно составить расписание из 5 уроков на один день, если всего изучаемых предметов 14, а два урока по одному предмету не планируются?

237. В забеге на 100 м участвуют 8 спринтеров. Сколько существует вариантов распределения трех первых мест между ними?

238. В секции по плаванию 10 человек. Сколько существует способов выбора 5 из них для участия в соревнованиях по пяти видам плавания (по одному человеку на каждый вид)?

239. Сколько всего трехзначных чисел, в которых нет повторяющихся цифр?

240. Докажите, что: а) $A_{10}^{5} = 6A_{10}^{4}$; б) $A_{15}^{7} = 15A_{14}^{6}$.

241. Вычислите: а) $A_8^3 - A_7^2$; б) $P_5 - A_5^2$; в) $P_7 : A_7^5$; г) $A_{10}^5 : A_9^3$.

242. Какое может быть наибольшее количество различных предметов, из которых можно составить не более 210 размещений по 2 предмета в каждом?

Уровень B

243. Решите уравнение: а) $\frac{P_{n+2}}{A_n^5 \cdot P_{n-3}} = 21$; б) $\frac{P_{n+5}}{A_{n+3}^{k+3} \cdot P_{n-k}} = 240$.

244. Найдите область определения и множество значений функции: а) $f(x) = A_{8-x}^{x-4}$; б) $f(x) = A_{25-x^2}^{x-2}$.

245. При выборе комиссии из нескольких человек в составе председателя, заместителя и секретаря подсчитали все возможные варианты. Их число оказалось равным 3360. Из скольких кандидатов выбиралась эта комиссия?

246. Слово состоит из различных букв. Сколько в нем букв, если число размещений из них по 4 различные буквы равно 840?

247. В классе 25 учащихся, из которых 15 занимаются теннисом, 14 – легкой атлетикой, 7 – обоими из этих видов спорта, а остальные – плаванием. Сколько учащихся занимаются плаванием?

Уровень С

248. Сколько всего имеется натуральных чисел, меньших 1000, в записи которых все цифры различные?

249. В ящике лежат туфли одинаковой формы: 6 пар черных и 6 пар коричневых. Какое наименьшее количество туфель надо достать из ящика, не заглядывая в него, чтобы среди них была хотя бы одна пара туфель одного цвета?

250. Расшифруйте числовой ребус, в котором различные буквы обозначают различные цифры: а) $(\text{КА})^{\text{К}} = \text{ИКС}$; б) $\text{Н}^{\text{Н}} = \text{ИКС}$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Используя только знаки плюс и факториал, цифры 1 и 4 и скобки, запишите число 144.

2) В зале 28 рядов стульев по 32 стула в каждом. Все стулья пронумерованы, начиная с первого ряда. В каком ряду находится место 375?

3) В коробке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 голубых, 20 желтых, остальные – белые и зеленые. Сколько шаров надо взять, не заглядывая в коробку, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

4) Произведение каких четырех последовательных натуральных чисел равно 3024?

10. Сочетания без повторений

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение сочетаний без повторений;
- знать формулу числа сочетаний без повторений из n элементов по k элементов;
- знать основные свойства сочетаний из n элементов по k элементов;
- уметь применять формулу числа сочетаний из n элементов по k элементов и их свойства для решения комбинаторных задач.

Задача 1. Сколько подмножеств, состоящих из трех различных элементов, можно составить из множества, содержащего четыре элемента, среди которых нет одинаковых?

Решение. Обозначим данное множество $A = \{a, b, c, d\}$ и составим все указанные подмножества: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$. Всего их четыре.

Ответ. 4.

Подмножества, состоящие из k различных элементов, составленные из множества, содержащего n различных элементов, называются ***сочетаниями*** *без повторений из n элементов по k элементов.* Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (по первой букве французского слова *combinasion*, что означает «сочетание»). Читается: «число сочетаний из n элементов по k» или кратко «C из n по k».

Выведем формулу числа сочетаний n элементов по k.

Пусть число всевозможных подмножеств, содержащих k элементов, равно C_n^k. Из каждого такого подмножества перестановкой его элементов можно составить все упорядоченные подмножества, число которых равно A_n^k. Это число в $k!$ раз больше, чем C_n^k, так как каждое множество из k элементов можно упорядочить $k!$ способами. Следовательно, $C_n^k = \frac{n!}{(n - k!) \cdot k!}$. Эту формулу можно записать, сократив дробь на $(n - k)!$, так:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Отметим, что $C_n^n = 1$. В математике принято также считать, что и $C_n^0 = 1$.

Число C_n^k имеет различные свойства. Рассмотрим два из них.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$. Действительно,

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k.$$

2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$. Действительно,

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} \times$$

$$\times \left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) = \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))! \cdot (k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Задача 2. Сколькими способами можно разместить в ряд 5 мальчиков и 4 девочки так, чтобы девочки не стояли рядом?

Решение. Для выполнения условия задачи девочек можно разместить на 6 местах: 4 места – между мальчиками, 1 место – перед ними и 1 место после них. Следовательно, искомое число равно $C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Ответ. 15.

Задача 3. Найти все значения x, при которых верно равенство $C_5^{x-1} = 2C_5^x$.

Решение. По условию задачи $\frac{5!}{(5-x+1)! \cdot (x-1)!} = \frac{2 \cdot 5!}{(5-x)! \cdot x!}$, где $x \in N$, причем $1 \le x \le 5$. Отсюда $\frac{1}{(5-x+1) \cdot (5-x)! \cdot (x-1)!} = \frac{2}{(5-x)! \cdot x \cdot (x-1)!}$. Умножив левую и правую части уравнения на не равное нулю выражение $(5-x)! \cdot (x-1)!$, получим $\frac{1}{6-x} = \frac{2}{x}$, откуда $x = 4$.

Ответ. Равенство верно при $x = 4$.

Задача 4. Сколько команд участвовало в чемпионате страны по футболу, если всего было сыграно 306 матчей, причем каждая команда сыграла с каждой по два матча?

Решение. Обозначим число команд n. По условию задачи $2 \cdot C_n^2 = 306$. Тогда получим уравнение $n \cdot (n - 1) = 306$. Решив его, найдем $n = 18$. (Сделайте это самостоятельно.)

Ответ. 18.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятия сочетаний без повторений из n элементов по k элементов.

2. По какой формуле можно найти число сочетаний из n элементов по k?

3. Докажите, что: а) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$; б) $C_n^k = \frac{n - k + 1}{k} C_n^{k-1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

251. На 5 сотрудников выделены три одинаковые премии. Сколько существует вариантов награждения ими этих сотрудников?

252. Сколькими способами можно составить команду для эстафетного бега 4 × 100 м из 7 спортсменов, не учитывая порядок распределения их по этапам?

253. В классе 20 учащихся. Сколькими способами можно выбрать из них двух для дежурства?

254. Из вершины развернутого угла провели 8 лучей, содержащихся в нем. Сколько углов, не больших развернутого, получилось при этом?

255. Верно ли равенство: а) $C_6^5 = \frac{6}{5} C_5^4$; б) $\frac{6}{5} C_5^4 = C_5^4 + C_5^5$?

256. Докажите, что верно равенство:

а) $C_{25}^{23} = C_{25}^2$; в) $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 = C_7^2 + C_7^4 + C_7^6$;

б) $C_{32}^{27} = C_{32}^5$; г) $C_{10}^8 = C_9^8 + C_9^7$.

257. Вычислите:

а) $C_{16}^4 - 5C_{11}^8$; в) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$;

б) $C_{20}^{17} - 3C_{24}^{22}$; г) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

258. Решите уравнение: $C_n^2 + n = 6$.

259. При каких значениях n верно равенство $C_3^n + 3n = 9$?

260. На окружности последовательно отмечены 12 точек. Найдите число: а) хорд окружности с концами в этих точках; б) треугольников с вершинами в этих точках.

261. На отрезке AB отметьте его внутренние точки C, D, E, F, K. Сколько всего отрезков получилось на рисунке?

262. В игре «Спортлото» выбираются 6 номеров из 45. Сколько имеется вариантов выбора этих номеров?

263. Из одной вершины треугольника проведены 4 луча, пересекающие его сторону. Сколько при этом получилось треугольников?

264. Сколько разносторонних треугольников можно составить из отрезков, длины которых (см) равны: а) 4, 5, 6, 7; б) 2, 3, 4, 5?

265. Сколько различных правильных обыкновенных дробей можно составить из первых 8 простых чисел, чтобы в каждую из них входили только два простых числа?

Уровень B

266. Решите уравнение:

а) $3C_{n+1}^{3} = (n+1)C_n^2$;　　в) $3C_n^3 = 2C_n^5$;

б) $C_n^3 + C_n^2 = 15(n-1)$;　　г) $\dfrac{1}{C_4^k} - \dfrac{1}{C_5^k} = \dfrac{1}{C_6^k}$.

267. Найдите область определения и множество значений функции:
а) $f(x) = C_{x+1}^{4-x}$;　б) $f(x) = C_{3x-5}^{3-x}$.

268. Найдите все значения n, при которых верно неравенство:
а) $C_n^5 < C_n^3$;　б) $C_4^{n-1} > 2C_4^n$.

Уровень C

269. Исследуйте, сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы трех натуральных чисел, первое из которых равно 1. Рассмотрите случаи четного и нечетного n.

270. Покупатель решил рассмотреть все возможные варианты покупки 4 вещей из нескольких имеющихся. Продавец сказала, что ему для этого надо будет рассмотреть не больше 105 вариантов. Какое наибольшее количество вещей могло быть?

271. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^{k}, \\ 3C_{n+1}^{k} = 5C_{n+1}^{k-1}. \end{cases}$

11. Бином Ньютона и его свойства

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулу бинома Ньютона и его свойства;
- уметь применять формулу бинома Ньютона для возведения двучлена в степень с натуральным показателем, для приближенных вычислений и сравнения значений выражений.

Вам хорошо известны формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Нетрудно получить формулы $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ и $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. (Выведите их самостоятельно.) Используя числа C_n^k, эти формулы можно записать так:

$$(a + b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2,$$
$$(a + b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3,$$
$$(a + b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4,$$
$$(a + b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5.$$

Обратим теперь внимание на то, как можно получить числа C_n^k в разложении $(a + b)^4$, используя формулу для $(a + b)^3$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = (C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3)(a + b) =$
$= C_3^0a^4 + C_3^1a^3b + C_3^2a^2b^2 + C_3^3ab^3 + C_3^0a^3b + C_3^1a^2b^2 + C_3^2ab^3 + C_3^3b^4 =$
$= C_3^0a^4 + (C_3^1 + C_3^0)a^3b + (C_3^2 + C_3^1)a^2b^2 + (C_3^3 + C_3^2)ab^3 + C_3^3b^4.$

Учитывая, что $C_3^0 = C_4^0$, $C_3^1 + C_3^0 = C_4^1$, $C_3^2 + C_3^1 = C_4^2$, $C_3^3 + C_3^2 = C_4^3$, $C_3^3 = C_4^4$, имеем $(a + b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$.

Вообще для любого натурального n верна формула

$$\boldsymbol{(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n}.$$

Эта формула называется кратко *биномом Ньютона* в честь знаменитого английского физика и математика И. Ньютона (1643–1727), исследовавшего и распространившего ее для любого $n \in R$. Числа C_n^0, C_n^1, … , C_n^n называются **биномиальными коэффициентами**.

В правой части этого тождества $n + 1$ слагаемых, каждое из которых называется *членом разложения* бинома и может быть представлено в виде $C_n^k a^{n-k} b^k$. Показатели степеней a и b изменяются от n до 0 и от 0 до n соответственно. При этом сумма показателей степеней a^{n-k} и b^k равна n в каждом члене разложения бинома.

Отметим, что если в формуле бинома Ньютона положим $a = 1$, $b = -1$, то получим $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + (-1)^n C_n^n$, откуда $\boldsymbol{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots}$. То есть сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.

Если в формулу бинома Ньютона подставим $a = b = 1$, то получим

$$\boldsymbol{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n}.$$

Из этой формулы следует, что число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n. Биномиальные коэффициенты можно расположить в виде следующей треугольной таблицы:

$$\begin{array}{c}
C_1^0 \\
C_1^0 \; C_1^1 \\
C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2 \\
C_3^0 \; C_3^1 \; C_3^2 \; C_3^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_n^0 \; C_n^1 \; \ldots \; C_n^{n-1} \; C_n^n
\end{array}$$

Эта таблица называется *треугольником Паскаля* по имени французского математика, сделавшего большие открытия в математике.

Учитывая свойства сочетаний, отметим, что биномиальные коэффициенты связаны следующими соотношениями: 1) $C_n^k = C_n^{n-k}$, 2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$. Из этих соотношений следует, что: 1) *биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны*; 2) в *треугольнике Паскаля биномиальный коэффициент в какой-либо строке таблицы равен сумме двух биномиальных коэффициентов, расположенных над ним справа и слева в предыдущей строке*. Эти соотношения позволяют легко составить треугольник Паскаля для заданных значений n. Например, для всех $n \leq 9$ треугольник Паскаля выглядит так:

n	Биномиальные коэффициенты разложения $(a + b)^n$																		
0										1									
1									1		1								
2								1		2		1							
3							1		3		3		1						
4						1		4		6		4		1					
5					1		5		10		10		5		1				
6				1		6		15		20		15		6		1			
7			1		7		21		35		35		21		7		1		
8		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

С использованием треугольника Паскаля можно вычислять биномиальные коэффициенты и решать разнообразные задачи на использование бинома Ньютона. Например,

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

При $b = 1$ формула бинома Ньютона примет вид

$$(1 + a)^n = 1 + C_n^1a + C_n^2a^2 + ... + C_n^na^n.$$

Если значение a очень малое, то все слагаемые, начиная с третьего, также очень малы. Отбросив их, получаем формулу для приближенных вычислений: $(1 + a)^n \approx 1 + na$. По этой формуле, например,

$$1{,}04^4 = (1 + 0{,}04)^4 \approx 1 + 4 \cdot 0{,}04 = 1{,}16;$$

$$0{,}98^5 = (1 - 0{,}02)^5 \approx 1 - 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}9.$$

Пример 1. При каком значении n в разложении бинома $(1 + x)^n$ его пятый коэффициент равен девятому коэффициенту?

Решение. По условию должно выполняться равенство $C_n^4 = C_n^8$. По свойству сочетаний $C_n^8 = C_n^{n-8}$, следовательно, $C_n^4 = C_n^{n-8}$, $n - 8 = 4$, $n = 12$.

Ответ. При $n = 12$.

Пример 2. Найти наименьшее значение n, при котором отношение двух соседних биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$ равно $\frac{7}{15}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $C_n^k : C_n^{k+1} = \frac{7}{15}$, то есть $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} : \frac{n!}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!} = \frac{7}{15}$. Отсюда получаем $\frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{15}$, $7n - 7k = 15k + 15$, $n = \frac{22k+15}{7} = \frac{21k+14+k+1}{7} = 3k + 2 + \frac{k+1}{7}$.

Наименьшее значение n достигается при $k = 6$, оно равно 21.

Ответ. 21.

Пример 3. Что больше: 11^{10} или 10^{11}?

Решение. Сравним дробь $\frac{11^{10}}{10^{11}}$ с 1.

$$\frac{11^{10}}{10^{11}} = \frac{(10+1)^{10}}{10\cdot 10^{10}} = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{10+1}{10}\right)^{10} = \frac{1}{10}\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{1}{10}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{10}\right)^{5}\right)^{2} =$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\left(1 + 5\cdot\frac{1}{10} + 10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{2} + 10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{3} + 5\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{4} + \left(\frac{1}{10}\right)^{5}\right)^{2} = \frac{1}{10}\times$$
$$\times\left(1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{5}{10000}+\frac{1}{100000}\right)^{2} < \frac{1}{10}\left(1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{10}\right)^{2} < 1,\ \text{так как}\ \left(1+\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)^{2} = 1{,}9^2 = 3{,}61.$$

Следовательно, $11^{10} < 10^{11}$.

Ответ. 10^{11} больше, чем 11^{10}.

Задача. Сколько имеется способов освещения помещения, если в нем есть n ламп?

Решение. Рассмотрим все возможные варианты. Может не гореть ни одна из ламп, таких способов $C_n^0 = 1$. Может гореть только одна лампа, таких способов C_n^1. И так далее. Наконец, могут гореть все лампы, таких способов C_n^n. Итак, всего способов освещения $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$.

Ответ. 2^n.

ВОПРОСЫ

1. Что называют биномом Ньютона?

2. Какие свойства биномиальных коэффициентов вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

272. Запишите разложение бинома: а) $(a+1)^6$; б) $(1-b)^7$.

273. Найдите наибольший биномиальный коэффициент разложения:
а) $(m+n)^8$; б) $(x+y)^7$.

274. Запишите в виде степени многочлен:
а) $x^6 + 6x^5 2 + 15x^4 2^2 + 20x^3 2^3 + 15x^2 2^4 + 6x 2^5 + 2^6$;
б) $3^5 - 5 \cdot 3^4 y + 10 \cdot 3^3 y^2 - 10 \cdot 3^2 y^3 + 5 \cdot 3y^4 - y^5$.

275. Чему равно число слагаемых в разложении бинома:
а) $(a-b)^{10}$; б) $(x+y)^k$?

276. Какова сумма показателей степеней переменных 25-го члена разложения $(a-b)^{36}$?

277. Четвертый биномиальный коэффициент в разложении $(x+y)^{12}$ равен p. Укажите номер еще одного члена разложения этого бинома с таким же коэффициентом.

278. Найдите сумму биномиальных коэффициентов разложения: а) $(c+1)^{10}$; б) $(x+y)^{11}$.

279. Укажите номер члена разложения бинома $(x+y)^n$ с наибольшим биномиальным коэффициентом, если: а) $n = 50$; б) $n = 101$.

280. Укажите номер члена разложения бинома, не содержащий переменной: а) $(x + x^{-1})^6$; б) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^4$.

281. Установите, верно ли равенство:
а) $(\sqrt{2} + 1)^4 = 17 + 12\sqrt{2}$; б) $(\sqrt{2} - 1)^4 = 17 - 12\sqrt{2}$.

282. Найдите с точностью до 0,01 приближенное значение выражения: а) $1{,}01^5$; б) $0{,}99^4$; в) $1{,}03^8$; г) $0{,}95^7$.

283. Сколько имеется способов освещения помещения, если в нем есть 6 ламп?

Уровень B

284. Сравните значение выражения $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$ с числом: а) 2; б) 3.

285. Вычислите: а) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^5$; б) $(\sqrt{3}-1)^6$.

286. Запишите: а) пятый член разложения бинома $(a-b)^7$; б) четвертый член разложения бинома $(a^2+1)^{12}$; в) третий член разложения бинома $(a+b)^{2020}$.

287. Найдите пятый биномиальный коэффициент в разложении бинома $(1+x)^n$, если: а) третий биномиальный коэффициент равен 28; б) отношение третьего биномиального коэффициента ко второму равно 5,5.

288. Верно ли при любом $n \in N$ неравенство $2^n > n$? Объясните ответ, используя разложение бинома $(1+1)^n$.

Уровень C

289. Исследуйте, может ли какой-либо биномиальный коэффициент разложения $(a+b)^n$ быть равным: а) сумме пяти первых натуральных чисел; б) произведению пяти первых натуральных чисел.

290. Исследуйте, существует ли значение n, при котором третий биномиальный коэффициент разложения $(a+b)^n$ равен среднему арифметическому второго и четвертого биномиальных коэффициентов.

291. Что больше: 9^7+10^7 или 11^7?

292. Установите, что при любом $n \in N$ верно неравенство $2^n > \frac{n^2}{2}$.

12. Упражнения на повторение раздела «Элементы комбинаторики»

Уровень А

293. В шахматном турнире, в котором каждый участник сыграет с каждым по одной партии, участвуют Виктор, Тарас, Лейла, Дарига и Саят. Известно, что Виктор уже сыграл 4 партии, Тарас и Лейла – по 2 партии, а Дарига и Саят – по одной партии. С кем сыграла Лейла? Решите задачу с использованием графа.

294. Сколько получится чисел в результате перестановок цифр числа 2018?

295. Верно ли равенство:

а) $P_3 + P_2 = P_5$; в) $\dfrac{P_8 - P_7}{P_6} = 49$;

б) $\dfrac{P_8 - P_7}{P_6} = \dfrac{P_1}{P_6}$; г) $\dfrac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-2}} = (k-1)^2$?

296. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, не повторяя их в числе.

297. В решении какой из следующих задач используются сочетания, а в какой – размещения и почему? В группе 12 учащихся. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных, если: а) их обязанности одинаковые; б) один из них является старшим дежурным?

298. Сократите дробь:

а) $\dfrac{A_5^2}{3!}$; в) $\dfrac{A_{n+1}^3}{A_n^2}$;

б) $\dfrac{A_6^3}{4!}$; г) $\dfrac{A_{n+3}^3}{A_{n+1}^2}$.

299. Сколькими способами можно определить стартовый состав (5 человек) команды для игры в баскетбол из 9 человек?

300. Из 10 различных задач для суммативного оценивания выбираются 5 заданий. Сколько различных вариантов заданий можно составить?

301. На окружности отмечены 5 точек. Сколько существует выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках?

302. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

Уровень B

303. Из цифр 0, 3, 4, 5 составлены все нечетные числа, в каждом из которых нет одинаковых цифр. Сколько получилось нечетных чисел?

Урочище Каскабулак.
Рисунки на камне

304. В урочище Каскабулак старейшего заповедника Аксу-Жабаглы Казахстана сохранилось много древних рисунков на камнях. а) Найдите одну четвертую часть всех возможных способов распределения I, II и III премий между 21 сотрудником и вы узнаете, сколько примерно таких рисунков; б) Отнимите от полученного результата количество всех возможных способов выбора четырех книг из восьми, и вы найдете число, указывающее год, предшествующий году образования этого заповедника.

305. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых нет ни одной из цифр: а) 0, 2, 9; б) 1, 2, 9?

306. Решите уравнение:

а) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; в) $14C_{n+1}^{n-1} = A_{n+1}^3$.

б) $A_{2n}^3 = 12A_n^3$;

307. Найдите значение выражения $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$.

Уровень C

308. Найдите количество делителей числа: а) p^n, где p – простое число; б) 1 000 000.

309. Докажите, что если трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37, то и число $\overline{bca}$ делится на 37.

310. Найдите наибольшее значение n, при котором верно неравенство $A_n^3 \leq 1320$.

311. а) Построены выпуклые многоугольники: четырехугольник, пятиугольник и n-угольник, где $n > 5$. Оказалось, что число, равное сумме диагоналей этих многоугольников, не больше 100. Какое наименьшее и наибольшее число сторон мог иметь n-угольник?

б) Белки собрали поровну орехов, причем известно, что количество орехов больше числа белок. При переносе их в дупло каждая белка передала каждой другой по одному ореху, которые упали. Сколько орехов собрала каждая белка, если на хранение всеми белками было перенесено 33 ореха?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

312. 1A) Имеется 7 различных тетрадей одного формата и 5 обложек к ним. Сколькими способами можно выбрать из них 1 тетрадь с обложкой?

2A) Имеется 5 голубых шаров и 4 оранжевых. Сколькими способами эти шары можно расположить в ряд так, чтобы голубые шары не лежали рядом?

3A) Сколько можно составить на 1 день расписаний по 5 различным предметам из 12 различных предметов?

4B) Решите уравнение $4C_n^4 = 15A_n^2$.

5C) Найдите значение выражения $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Блез Паскаль

Многие элементы комбинаторики были известны в глубокой древности, например в Китае и Индии. Индийцы умели находить число всех подмножеств множества, которое в современном виде записывается так: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n$.

Индийский ученый Бхаскари-акария (XII век) вычислял сочетания и перестановки некоторых видов. Таблица биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля) была известна ученым Средней Азии. Например, для некоторых первых значений n ее знал ученый и поэт Омар Хайям (1048–1131).


Леонард Эйлер

Однако как наука комбинаторика стала развиваться лишь с XVI столетия, благодаря научным трудам итальянских ученых Н. Тартальи (1499–1557), Дж. Кардано (1501–1576), Г. Галилея (1564–1642) и французских ученых П. Ферма (1601–1665) и Б. Паскаля (1623–1662).

Термин «комбинаторика» стал использоваться после опубликования в 1666 году немецким математиком Г. Лейбницем (1646–1716) научного труда «Рассуждения о комбинаторном искусстве», в котором впервые было дано изложение теории сочетаний и перестановок. Большие достижения в области комбинаторики принадлежат швейцарскому математику Л. Эйлеру (1707–1783).

Найдите в Интернете:

1) сведения о биографии Б. Паскаля и его достижениях в области комбинаторики;

2) сведения о биографии Л. Эйлера, его знаменитую задачу о кенигсбергских мостах и ее решение;

3) сведения о первооткрывателях формулы разложения бинома $(a + b)^n$.

III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В результате изучения раздела надо

знать

- определения: числовой последовательности, арифметической и геометрической прогрессий;
- способы задания числовых последовательностей;
- понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии;
- формулы: n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий, суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии;
- сущность метода математической индукции.

уметь

- находить n-е члены последовательностей, в том числе арифметической и геометрической прогрессий;
- применять формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы n членов арифметической и геометрической прогрессий, суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в том числе для решения текстовых задач;
- применять метод математической индукции для решения задач.

13. Числовая последовательность, способы ее задания и свойства

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение конечной и бесконечной числовых последовательностей, понятия убывающей и возрастающей последовательностей, способы задания последовательностей;
- уметь находить *n*-й член последовательности, устанавливать свойства числовых последовательностей, заданных различными способами.

Рассмотрим ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Поставим в соответствие каждому из этих чисел его квадрат. Получим конечную последовательность квадратов первых семи натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Поставим теперь в соответствие каждому натуральному числу обратное ему число, получим бесконечную числовую последовательность: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Если имеется правило, которое каждому натуральному числу ставит в соответствие некоторое действительное число, то говорят, что задана числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Каждое число a_n называется *членом последовательности*, а n – его номером. Члены последовательности могут обозначаться любыми малыми буквами латинского алфавита, например, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, или $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и т. д. Саму последовательность с членами a_n обозначают (a_n).

Числовой последовательностью *называется функция, областью определения которой является множество n первых натуральных чисел или множество всех натуральных чисел. Числовая последовательность, заданная на множестве n первых натуральных чисел, называется конечной, а на множестве всех натуральных чисел – бесконечной числовой последовательностью.*

Числовая последовательность как функция может быть задана различными способами: формулой, таблицей, графически, словесно. Часто числовая последовательность задается указанием формулы ее

n-го члена. Например, последовательность квадратов нечетных натуральных чисел задается формулой $a_n = (2n - 1)^2$, где $n \in N$. По этой формуле можно найти любой член этой последовательности, например, $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, … , $a_5 = 81$, … .

Пример 1. Числовая последовательность (b_n) задана таблицей. Построить график этой последовательности и записать формулу ее n-го члена.

n	1	2	3	4	5	6
b_n	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{6}$

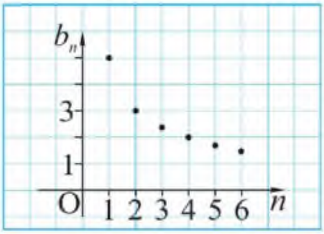


Рисунок 31

Решение. Данная последовательность конечная, ее график (рисунок 31) состоит из шести точек с координатами $(n; b_n)$. Поскольку знаменатель каждой дроби, равной значению b_n, равен номеру n, а ее числитель на 4 больше, чем n, то формулу n-го члена этой последовательности можно записать так: $b_n = \frac{n+4}{n}$.

Иногда последовательность можно задать формулой, позволяющей находить ее $(n + 1)$-й член через предыдущие (один или несколько), которые указываются. Такой способ задания последовательности называется *рекуррентным*.

Пример 2. Найти четвертый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 3a_n$, если $a_1 = 2$.

Решение. Чтобы найти четвертый член этой последовательности, найдем предыдущие члены: $a_2 = 3a_1 = 6$, $a_3 = 3a_2 = 18$. Тогда $a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54$.

Ответ. 54.

Пример 3. Дана последовательность (a_n): -5; 5; -5; 5; …, в которой числа -5 и 5 чередуются. Записать формулу ее n-го члена.

Решение. Можно заметить, что $a_1 = (-1)^1 \cdot 5$, $a_2 = (-1)^2 \cdot 5$, $a_3 = (-1)^3 \cdot 5$, $a_4 = (-1)^4 \cdot 5$. Поскольку на всех местах с нечетными номерами находится число -5, а с четными номерами – число 5, то $a_n = (-1)^n \cdot 5$.

Ответ. $a_n = (-1)^n \cdot 5$.

Пример 4. Найти номер члена последовательности $a_n = n^2 - 21$, начиная с которого все ее члены будут больше 100.

Решение. Найдем все значения $n \in N$, удовлетворяющие условию $n^2 - 21 > 100$.

Получим: $n^2 > 121$, $n > 11$. Следовательно, начиная с 12-го номера все члены данной последовательности больше 100.

Ответ. $n = 12$.

Последовательность может также быть задана указанием характеристического свойства ее членов. Например, последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … .

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, больше предыдущего, называется *возрастающей*. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, меньше предыдущего, называется *убывающей*. Отметим, что последовательность, все члены которой равны, называется *постоянной*.

Пример 5. Доказать, что последовательность, заданная формулой $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, является возрастающей.

Доказательство. Докажем, что $a_{n+1} > a_n$, для чего оценим знак разности $a_{n+1} - a_n$. Имеем $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$ $= \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$. Последнее выражение больше нуля при любом $n \in N$. Следовательно, $a_{n+1} > a_n$, значит, указанная последовательность – возрастающая.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение числовой последовательности.

2. Какая числовая последовательность называется конечной, а какая – бесконечной?

3. Какие способы задания числовой последовательности вы знаете? Приведите примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

313. Назовите первый и шестой члены последовательности:

а) (a_n): 2; –1; 5; –2; 9; –3; 15; –4;

б) (b_n): 3; 0; –3; –6; –9; –12; –15.

314. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = 3n - 1$. Найдите a_1, a_{10}, a_{2020}.

315. Напишите пять первых членов последовательности:

а) $a_n = 2 - 3n$; в) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$;

б) $a_n = 50 - 7n$; г) $b_n = n^3$.

316. Найдите область определения и множество значений функции, являющейся конечной последовательностью чисел:

а) 3; 9; 27; 81; в) 2; 4; 8; 2; 4; 8; 2; 4; 8.

б) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$;

317. Установите, на каком из рисунков 32–35 изображен график: а) возрастающей последовательности; б) убывающей последовательности.

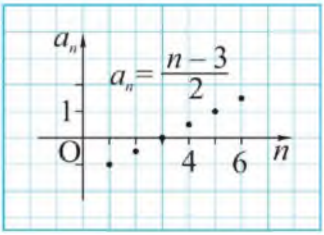


Рисунок 32

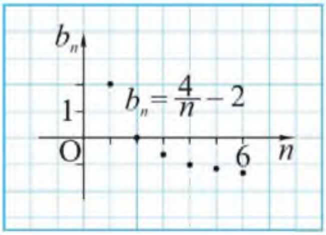


Рисунок 33

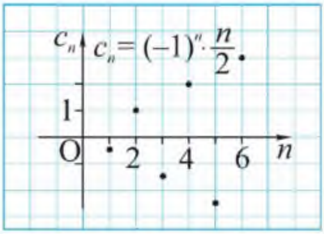


Рисунок 34

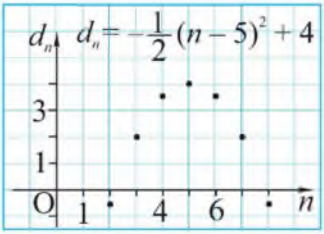


Рисунок 35

318. Исследуйте, какая из последовательностей (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n) является: а) возрастающей; б) убывающей:

(a_n): $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$.

(d_n): $\frac{3}{10}; \frac{9}{100}; \frac{27}{1000}; \frac{81}{10000}$.

(b_n): –4; –16; –64; –256.

(e_n): 5; 2; 5; 5; 2; 5; 5; 5; 2.

(c_n): –5; 25; –125; 625.

(f_n): 0,1; 0,11; 0,111; 0,1111.

319. Для последовательностей (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), указанных в задаче 318, запишите формулу n-го члена.

320. Запишите: а) возрастающую последовательность двузначных чисел, в записи которых используются только цифры 2, 3, 5 без повторений; б) убывающую последовательность трехзначных чисел, в записи которых используются цифры 0, 1, 4, 7 без повторений. Сколько членов содержит каждая из этих последовательностей?

321. Запишите пять первых членов последовательности, заданной формулой:

а) $a_n = |2 - 5n|$;

в) $c_n = 2^{n-1}$;

б) $b_n = \frac{30}{n+1}$;

г) $d_n = (-3)^n$.

Укажите, какими (конечными или бесконечными) являются эти последовательности.

322. Найдите шесть первых членов последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = -5$, $a_2 = 1$ и $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$;

б) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ и $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

323. Найдите член последовательности $a_n = 2n - 5$ с номером:

а) 8; в) k;
б)12; г) $k + 2$.

324. Найдите номер члена последовательности $d_n = 42 - 5n$, равного:

а) 17; в) –8;
б) 2; г) –53.

325. Последовательность (y_n) задана формулой n-го члена $y_n = 4n - n^2$. Найдите n, если:

а) $y_n = -96$; в) $y_n = 0$;
б) $y_n = 4$; г) $y_n = 3$.

326. Установите, является ли членом последовательности, заданной формулой $b_n = n^2 - 6n + 9$, число:

а) 24; в) –100;
б) 49; г) 625.

Если является, то укажите его номер.

327. Выпишите шесть первых членов последовательности, если:

а) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 8$; в) $c_1 = -2, c_2 = 1$ и $c_{n+1} = c_{n-1} + c_n$;
б) $b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = 3b_n$; г) $d_1 = 1, d_2 = 2$ и $d_{n+2} = d_n \cdot d_{n+1}$.

328. Составьте формулу n-го члена последовательности: а) (x_n), первый член которой равен 3, а каждый следующий на 5 больше предыдущего; б) (y_n), первый член которой равен 50, а каждый следующий на 9 меньше предыдущего.

329. Найдите, при каких значениях n члены последовательности, данной в задаче 328: а) $x_n > 100$; б) $y_n < 0$.

330. Исследуйте, начиная с какого номера, члены последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена:

а) $a_n = n^2 - 7n$, положительные;
б) $a_n = -n^2 + 4n + 5$, отрицательные.

331. Докажите, что последовательность, n-й член которой равен:

а) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, является возрастающей;

б) $b_n = \dfrac{n+1}{n}$, является убывающей.

Уровень B

332. Выпишите шесть первых членов последовательности (c_n) и задайте ее формулой n-го члена, если: а) $c_1 = 15$, $c_{n+1} = c_n + 2$; б) $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n \cdot 2$.

333. Последовательность чисел, заданная рекуррентной формулой $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ и условиями $a_1 = a_2 = 1$, называется *последовательностью Фибоначчи* (итальянского математика Леонардо Пизанского (1180–1250), более известного под фамилией Фибоначчи).

а) Запишите семь первых членов последовательности Фибоначчи.

б) Докажите, что для членов последовательности Фибоначчи верно равенство $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+3}$.

334. Составьте формулу n-го члена и напишите пять первых членов последовательности: а) (a_n) чисел, кратных 3; б) (b_n) четных чисел, кратных 3; в) (c_n) нечетных чисел, кратных 3.

335. Членами последовательности (b_n) являются числа, выражающие последовательные десятичные знаки представления обыкновенной дроби $\frac{5}{13}$ в виде десятичной. а) Исследуйте, есть ли среди членов этой последовательности одинаковые числа. б) Найдите b_1, b_8, b_{15}, b_{22}. в) Является ли эта последовательность возрастающей или убывающей?

336. Докажите, что последовательность, n-й член которой равен:

а) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, является возрастающей;

б) $b_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$, является убывающей.

Уровень C

337. Последовательность (a_n) задана начальным условием $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n \cdot n$. Найдите: а) пять первых членов этой последовательности; б) формулу n-го члена этой последовательности, используя понятие факториала числа.

338. Запишите семь первых членов возрастающей последовательности трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 9. Сколько членов содержит эта последовательность?

339. Запишите пять первых членов последовательности (a_n) четных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3, составьте формулу ее n-го члена.

340. Последовательность (x_n) задана формулой n-го члена $x_n = \frac{4n+1}{5n}$. Найдите: а) на сколько сотый член последовательности больше $\frac{4}{5}$; б) при каких n верно неравенство $x_n - \frac{4}{5} < 10^{-3}$.

341. Докажите, что последовательность, n-й член которой равен $c_n = \frac{2^n}{n!}$, при $n \geq 2$ является убывающей.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) В числовой последовательности 1; 2; 3; 7; 46 все члены, кроме двух, имеют некоторое свойство. Назовите эти члены и их свойство.

2) Известно, что $a + \frac{1}{a} = 5$. Запишите последовательность чисел, являющихся значениями выражений: $a^2 + \frac{1}{a^2}$; $a^3 + \frac{1}{a^3}$; $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

3) Длина окружности заднего колеса велосипеда для циркового представления в 2 раза больше длины окружности переднего колеса. Если длину окружности заднего колеса уменьшить на 1 м, а переднего увеличить на 1 м, то на пути 60 м заднее колесо сделает на 30 оборотов больше, чем переднее. Найдите длину окружности каждого колеса.

14. Метод математической индукции

Учебные достижения по изучению темы:

- знать аксиому математической индукции, сущность метода математической индукции;
- уметь применять метод математической индукции для доказательства тождеств и неравенств, вывода формул и при решении задач.

Вы уже, возможно, не раз замечали, что $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ для любых n первых нечетных чисел. Например: $1 = 1^2$; $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$. По-видимому, указанное равенство верно для любого $n \in N$. Доказать его, перебирая последовательно натуральные числа, невозможно. Сколько бы чисел мы не взяли, всегда за последним из них имеется следующее число, так как множество N бесконечное.

Для доказательства утверждений, верных для любого $n \in N$, в математике используется следующая аксиома.

Если утверждение верно для $n = 1$ и из предположения, что оно верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$, то это утверждение верно для любого $n \in N$. Способ доказательства утверждений, основанный на этой аксиоме, называют **методом математической индукции**.

Доказательство методом математической индукции осуществляется так.

1) *Устанавливается, что утверждение верно для* $n = 1$.

2) *Предполагается, что это утверждение верно для* $n = k$.

3) *Доказывается, что утверждение верно для* $n = k + 1$, *учитывая, что оно верно для* $n = k$.

4) *Делается вывод, что утверждение верно для любого* $n \in N$.

Докажем теперь, что равенство $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ верно для любого $n \in N$.

Доказательство.

1) При $n = 1$ равенство верно, так как $1 = 1^2$.

2) Предположим, что при $n = k$ верно равенство $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$.

3) Докажем, что при $n = k + 1$ верно равенство

$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$.

Действительно, $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$.

Следовательно, исходное равенство верно при любом $n \in N$.

Пример 1. Доказать, что при любом $n \in N$, $q \neq 1$ верно равенство

$$\mathbf{1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.}$$

Доказательство.

1) При $n = 1$ равенство верно.

2) Предположим, что при $n = k$ верно равенство $1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} = \dfrac{1 - q^k}{1 - q}$.

3) Докажем, что при $n = k + 1$ верно равенство

$1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + q^k = \dfrac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$.

Действительно, учитывая предположение, получаем

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + q^k = \frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k = \frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Следовательно, исходное равенство верно при любом $n \in N$, $q \neq 1$.

Пример 2. Доказать, что при любом $n \in N$ значение выражения $4^n + 2$ делится на 3.

Доказательство.

1) При $n = 1$ утверждение верно, так как $4^1 + 2$ делится на 3.

2) Предположим, что при $n = k$ выражение $4^k + 2$ делится на 3.

3) Докажем, что при $n = k + 1$ выражение $4^{k+1} + 2$ делится на 3.

Действительно, $4^{k+1} + 2 = 4 \cdot 4^k + 2 = (1 + 3)4^k + 2 = (4^k + 2) + 3 \cdot 4^k$. Это выражение делится на 3, так как каждое слагаемое делится на 3.

Следовательно, выражение $4^n + 2$ делится на 3 при любом $n \in N$.

Пример 3. Доказать равенство $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, где $n \in N$.

Доказательство.

1) При $n = 1$ равенство верно, так как $1 \cdot 1! = 2! - 1$.

2) Предположим, что при $n = k$ верно равенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

3) Докажем, что при $n = k + 1$ верно равенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1.$$

Учитывая предположение, получаем

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \times (k+1)! = (k+1)!(1 + (k+1)) - 1 = (k+2)! - 1$.

Следовательно, исходное равенство верно при любом $n \in N$.

Нередко утверждение верно не для всех $n \in N$, а начиная с некоторого $n = m$. В таких случаях метод математической индукции применяют так.

1) *Устанавливается, что утверждение верно для* $n = m$.

2) *Предполагается, что это утверждение верно для* $n = k$, *где* $k \geq m$.

3) *Доказывается, что утверждение верно для* $n = k + 1$, *учитывая, что оно верно для* $n = k$.

4) *Делается вывод, что утверждение верно для любого* $n \in N$, *где* $n \geq m$.

Пример 4. Исследовать, при каких значениях $n \in N$ верно неравенство $2^n > n^2$.

Решение. При $n = 1$ неравенство верно.

При n, равном 2; 3; 4, неравенство неверно, так как $2^2 = 2^2$; $2^3 < 3^2$; $2^4 = 4^2$.

При $n = 5$ неравенство верно, так как $2^5 > 5^2$. По-видимому, неравенство $2^n > n^2$ верно для всех натуральных $n \geq 5$. Для проверки этой гипотезы применим метод математической индукции.

1) При $n = 5$ неравенство верно.

2) Предположим, что при $n = k$, где $k \geq 5$, верно неравенство $2^k > k^2$.

3) Докажем, что при $n = k + 1$ верно неравенство $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Для этого умножим левую и правую части неравенства $2^k > k^2$ на 2, тогда получим $2^{k+1} > 2k^2$. Так как $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 =$

$= (k-1)^2 - 2 > 0$ при $k \geq 5$, то $2k^2 > (k+1)^2$. Итак, доказано, что при $k \geq 5$ верны неравенства $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$. Тогда $2^{k+1} > (k+1)^2$. Следовательно, неравенство $2^n > n^2$ верно при $n \geq 5$.

Ответ. Неравенство $2^n > n^2$ верно при $n = 1$ и $n \geq 5$, $n \in N$.

ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте аксиому математической индукции.

2. Как осуществляется доказательство методом математической индукции?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

342. Найдите ошибки в рассуждениях ученика: «Докажем, что при любом $n \in N$ число $2n + 2019$ – четное. Предположим, что при $n = k$ число $2k + 2019$ – четное. Тогда при $n = k + 1$ число $2(k+1) + 2019 = (2k + 2019) + 2$ – четное, как сумма двух четных чисел. Утверждение доказано».

343. Для последовательностей (a_n) и (b_n), заданных рекуррентно, докажите формулу n-го члена:

а) $a_n = 3^n + 2$, если $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$;

б) $b_n = 5(2^n - 1)$, если $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 2b_n + 5$.

344. Докажите, что сумму S_n первых n членов последовательности (c_n) можно найти по формуле: а) $S_n = n(n+1)$, если (c_n) – последовательность четных натуральных чисел; б) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, если (c_n) – последовательность натуральных чисел.

345. Для последовательности, заданной формулой n-го члена, докажите формулу суммы ее n первых членов:

а) $S_n = \frac{n(5n+1)}{2}$, если $a_n = 5n - 2$;

б) $S_n = 2n(10 - n)$, если $b_n = 22 - 4n$;

в) $S_n = 2^n - 1$, если $a_n = 2^{n-1}$;

г) $S_n = 32(1 - 2^{-n})$, если $b_n = 16 \cdot 2^{-n+1}$.

346. Докажите, что для всех $n \in N$ верно равенство:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + ... + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$;

в) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

г) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

347. Для последовательности (a_n), заданной перечислением ее членов, докажите формулу суммы n первых членов:

а) $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, если (a_n): $1^3; 2^3; \ldots, n^3$;

б) $S_n = 2n^2(n + 1)^2$, если (a_n): $2^3; 4^3; \ldots, (2n)^3$.

348. Ученик получил задание: «Доказать, что при любом $n \in N$ значение выражения $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ является натуральным числом». Его решение было таким: «При $n = 1$ значение выражения равно натуральному числу 1. Предположим, что значение этого выражения является натуральным числом при любом $n = k$, то есть $\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}$ – натуральное число. Поскольку k – любое натуральное число, то вместо k можно подставить и следующее за ним натуральное число. Следовательно, и при $n = k + 1$ значение этого выражения является натуральным числом». Найдите ошибки в рассуждениях ученика и решите задачу правильно.

349. Докажите, что для любых натуральных n:

а) $13^n + 5$ делится на 3; в) $n^3 + 5n$ делится на 6;

б) $7^n + 5$ делится на 6; г) $2n^3 - 3n^2 + n$ делится на 6.

350. Докажите, что если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$ для всех $n \in N$.

351. Докажите, что верно неравенство для указанных натуральных значений n:

а) $n! > 2^n$ при $n \geq 4$; в) $3^n > 2n^2$ при $n \geq 3$.

б) $2^n > 5n$ при $n \geq 5$;

Уровень B

352. Для последовательности (b_n), заданной перечислением ее членов, докажите формулу суммы n первых членов:

а) $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, если (b_n): $1^2; 2^2; 3^2; \ldots ; n^2$;

б) $S_n = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$, если (b_n): $1^2; 3^2; \ldots ; (2n-1)^2$;

в) $S_n = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$, если (b_n): $2^2; 4^2; \ldots ; (2n)^2$.

353. Докажите, что для любых натуральных n выражение $n^5 - n$ делится на 5.

354. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

355. Докажите, что для любых натуральных $n \geq 2$ верно неравенство $(1 + a)^n > 1 + na$, где $a > -1$ и $a \neq 0$. (Неравенство швейцарского математика Я. Бернулли (1654–1705).

356. Исследуйте, при каких значениях $n \in N$ верно неравенство:

а) $2^{n-1} \geq n$; в) $2^n > 4n^2 + 1$.

б) $2^{n-1} < n!$;

Уровень C

357. Докажите, что для всех $n \in N$ верно равенство $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \ldots + \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{n}{2n+1}$.

358. Докажите, что для любых натуральных n выражение $n^7 - n$ делится на 7.

359. Верно ли, что при любом $n \in N$ значение выражения $n^9 - n$ делится на 9?

360. Ученик получил задание: «Доказать, что значение выражения $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком значении $n \in N$». Доказательство ученика было таким: «При $n = 1$ утверждение верно, так как 9 не делится на 121. Предположим, что при $n = k$ значение выражения $k^2 + 3k + 5$ не делится на 121. Тогда при

$n = k + 1$ имеем: $(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 5 = (k^2 + 3k + 5) + 2(k + 2)$. Последнее выражение не делится на 121, так как первое слагаемое не делится на 121 по предположению, а второе не делится на 121, так как оно четное». Найдите ошибку в рассуждениях ученика и решите задачу правильно.

361. Исследуйте, при каких значениях $n \in N$ верно неравенство:
а) $2^n > n^2 + 4n + 5$; б) $3^n > 2^n + 7n$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Макар решил обобщить неравенство Бернулли (смотрите № 355) и доказать методом математической индукции, что $(1 + a)^n \geq 1 + na$, где $a \in R$, $n \in N$. Вот его рассуждения.

1. При $n = 1$ неравенство верно.

2. Допустим, что при $n = k$, где $k > 1$, верно неравенство $(1 + a)^k \geq 1 + ka$.

3. Докажем, что при $n = k + 1$ верно неравенство $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$. Имеем $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k \cdot (1 + a)$. Учитывая допущение, получим $(1 + a)^k \cdot (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a)$. Так как $(1 + ka)(1 + a) = 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$, то $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$. Следовательно, неравенство $(1 + a)^n \geq 1 + na$ верно при $a \in R$, $n \in N$.

Верно ли неравенство $(1 + a)^n \geq 1 + na$, где $a \in R$, $n \in N$?

Если неверно, то в чем ошибся Макар?

15. Арифметическая прогрессия и ее свойства

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение, формулу n-го члена и характеристическое свойство арифметической прогрессии;
- распознавать арифметическую прогрессию среди числовых последовательностей;
- уметь применять свойства арифметической прогрессии при решении задач.

Задача 1. Отдыхающий решил в понедельник загорать 10 минут, а в каждый последующий день недели – на 5 минут больше, чем в предыдущий. Сколько минут он будет загорать в каждый из дней недели?

Для ответа на вопрос задачи составим последовательность минут продолжительности загорания: 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 5.

Задача 2. Метеоролог, наблюдая за изменениями температуры воздуха в течение всех дней одной из недель марта, заметил, что в первый день она была равна 5 °С, а в каждый следующий день снижалась на 1 °С по сравнению с предыдущим. Какова была температура воздуха в эти дни недели?

Запишем последовательность значений температуры воздуха в каждый день недели: 5 °С; 4 °С; 3 °С; 2 °С; 1 °С; 0 °С; –1 °С. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом –1.

Последовательности, рассмотренные в этих задачах, называются арифметическими прогрессиями. Слово «прогрессия» происходит от латинского «*progressio*», что означает «движение вперед».

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для этой последовательности числом. Разность между $(n + 1)$-м и n-м членами арифметической прогрессии называется **разностью арифметической про-**

грессии и обозначается буквой ***d***. Для членов арифметической прогрессии (a_n) выполняется условие:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}\text{, где } d \text{ – ее разность.}$$

Если $d > 0$, то арифметическая прогрессия является возрастающей, если $d < 0$ – убывающей. Если $d = 0$, то арифметическая прогрессия называется *постоянной*. Например, ряд натуральных четных чисел образует возрастающую арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$; последовательность чисел, противоположных четным натуральным числам, – это убывающая арифметическая прогрессия с разностью $d = -2$.

Для арифметической прогрессии (a_n) с разностью d и известным ее первым членом a_1 любой ее n-й член можно найти по формуле:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n - 1)}.$$

Докажем эту формулу методом математической индукции.

1) При $n = 1$ формула верна.

2) Предположим, что при $n = k$ формула $a_k = a_1 + d(k - 1)$ верна.

3) Докажем, что и при $n = k + 1$ верна формула $a_{k+1} = a_1 + dk$.

Действительно, по определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$. Подставив в это равенство вместо a_k выражение $a_1 + d(k - 1)$, имеем: $a_{k+1} = a_1 + d(k - 1) + d = a_1 + dk$. Следовательно, $a_n = a_1 + d(n - 1)$ для любых $n \in N$.

Рассмотрим **свойства арифметической прогрессии**.

1. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предшествующего ему и следующего за ним членов, то есть:

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\text{, где } n \geq 2.$$

Эту формулу можно получить, используя равенства $a_n - a_{n-1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$ (сделайте это самостоятельно). Отметим, что этим свойством обусловлено и название «арифметическая прогрессия».

2. Любой член арифметической прогрессии, состоящей из n членов, можно выразить через ее k-й член по формуле

$$\boldsymbol{a_n = a_k + d(n - k)}\text{, если } 1 \leq k \leq n - 1.$$

3. Каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому $(n-k)$-го и $(n+k)$-го ее членов, то есть

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ если } 1 \leq k \leq n-1.$$

(Свойства 2 и 3 докажите самостоятельно.)

4. Сумма первого и последнего членов арифметической прогрессии, в которой n членов, равна сумме двух ее членов, равноотстоящих от них, то есть

$$\boldsymbol{a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}}.$$

Действительно, $a_k = a_1 + d(k-1)$, $a_{n-k+1} = a_1 + d(n-k)$. Их сумма равна: $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + d(k-1+n-k) = 2a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n$.

Отметим также, что верно утверждение: **если каждый член последовательности, кроме первого, равен среднему арифметическому предшествующего ему и следующего за ним членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией**.

Действительно, если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, где $n \geq 2$, то $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$. Это равенство можно преобразовать так: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Получили, что разность между каждым членом последовательности и предшествующим ему членом одна и та же. Следовательно, эта последовательность является арифметической прогрессией.

Это утверждение объединяют со свойством 1 и называют *характеристическим свойством арифметической прогрессии*. Это свойство позволяет установить, является ли некоторая последовательность арифметической прогрессией.

Отметим, что если n-й член арифметической прогрессии (a_n) с разностью d представить в виде $a_n = nd + (a_1 - d)$, то получим, что он является значением линейной функции $y = dx + (a_1 - d)$ при $x = n$, где $n \in N$. Следовательно, множество точек $(1; a_1)$, $(2; a_2)$, $\ldots$, $(n; a_n)$ является графиком арифметической прогрессии.

Верно и обратное. Значения любой линейной функции $y = kx + b$, где $x \in N$, образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен $k + b$, а разность равна k.

Задача 3. Сколько всего трехзначных чисел, делящихся на 7?

Решение. Наименьшее такое число равно 105, а наибольшее равно 994. Арифметическая прогрессия (a_n), в которой $a_1 = 105$, а разность $d = 7$, содержит все трехзначные числа, делящиеся на 7. При этом $a_n = 994$. Учитывая, что $a_n = a_1 + d(n - 1)$, получим уравнение $994 = 105 + 7(n - 1)$. Решив его, найдем $n = 128$.

Ответ. 128.

Задача 4. Периметр разностороннего треугольника равен 18 см. Найти его стороны, если их длины выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию.

Решение. Обозначим стороны треугольника a, $a + d$, $a + 2d$, где $d > 0$ (рисунок 36). По условию задачи $a + a + d + + a + 2d = 18$, откуда $a + d = 6$. Треугольник существует, если верно неравенство $a + 2d < a + a + d$. Отсюда следует, что $a > d$. Решениями уравнения $a + d = 6$ в натуральных числах, удовлетворяющих условию $a > d$, являются лишь пары чисел $d = 1$, $a = 5$ или $d = 2$, $a = 4$. Соответственно, стороны треугольника могут быть равными 5 см, 6 см, 7 см или 4 см, 6 см, 8 см.

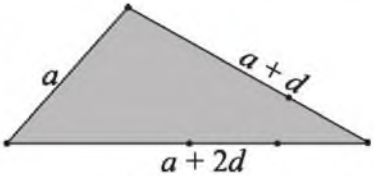


Рисунок 36

Ответ. 5 см, 6 см, 7 см или 4 см, 6 см, 8 см.

Задача 5. Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, в которой $a_1 + a_2 + a_3 = -60$, $d = 4$. Найти число отрицательных членов этой прогрессии.

Решение. По свойству арифметической прогрессии $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ или $a_1 + a_3 = 2a_2$. Тогда получим $3a_2 = -60$, $a_2 = -20$; $a_1 = a_2 - d = -24$; $a_n = -24 + 4(n - 1)$. По условию требуется найти: при каких n выполняется условие $a_n < 0$. Решив неравенство $-24 + 4(n - 1) < 0$, найдем, что при $n < 7$. Следовательно, в этой прогрессии шесть отрицательных членов: a_1; a_2; …; a_6.

Ответ. Шесть.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение арифметической прогрессии.

2. Выведите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

3. Сформулируйте характеристическое свойство арифметической прогрессии.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

362. Выпишите шесть первых членов арифметической прогрессии (a_n), в которой:
а) $a_1 = 15$, $d = -4$; б) $a_1 = -32$, $d = 8$.

363. Зная первые два члена арифметической прогрессии, найдите следующий за ними член:
а) 3; 8; …; в) 17; 8; …; д) $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$; ... ;
б) –2; –5; …; г) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; …; е) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; … .

364. Из данных последовательностей выберите те, которые являются арифметическими прогрессиями:
а) 12; –14; 16; –18; в) 98; 95; 92; 89; д) –15; –11; –7; –3;
б) 4; 4; 4; 4; 4; 4; г) 7; 14; 28; 56; е) $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{17}{10}$.

365. Выразите разность d арифметической прогрессии (a_n) через:
а) a_{21} и a_{22}; в) a_{15} и a_{18};
б) a_8 и a_{10}; г) a_{30} и a_{34}.

366. В арифметической прогрессии (a_n) с разностью d найдите:
а) a_{11}, если $a_1 = 5$, $d = 1,2$; б) a_{15}, если $a_1 = -12$, $d = 1,4$.

367. Зная, что (x_n) – арифметическая прогрессия и $x_1 = 4$, $x_2 = 0,5$, найдите: а) x_5; б) x_{11}; в) x_k.

368. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (x_n):
а) 1; 6; 11; 16; …; в) –4; –6; –8; –10; …;
б) 25; 21; 17; 13; …; г) 1; –4; –9; –14; … .

369. Установите, является ли членом арифметической прогрессии –15; –8; … число: а) 93; б) 153.

370. Найдите номер члена a_n арифметической прогрессии (a_n), если:
а) $a_n = 15{,}2$, $a_1 = 4{,}2$, $d = 1{,}1$; б) $a_n = 32$, $a_1 = 14{,}5$, $d = 0{,}7$.

371. а) В арифметической прогрессии $a_9 = -24$, $d = -3$. Найдите a_{19}.
б) Найдите пятый член арифметической прогрессии, если ее второй член равен 6, а четвертый равен –16.

372. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой $a_n = 6 - 1{,}5n$. Найдите член этой прогрессии с номером:

а) 4; в) $k - 2$;
б) 12; г) $k + 4$.

373. Найдите шестнадцатый, сорок первый и n-й члены арифметической прогрессии:

а) 12; 16; …; в) $\frac{5}{8}$; 1; …;
б) –21; –16; …; г) $-\frac{1}{4}$; –1; … .

374. Является ли арифметической прогрессией последовательность, график которой изображен на рисунке 37, *а*, *б*? Если является, то запишите формулу ее n-го члена.

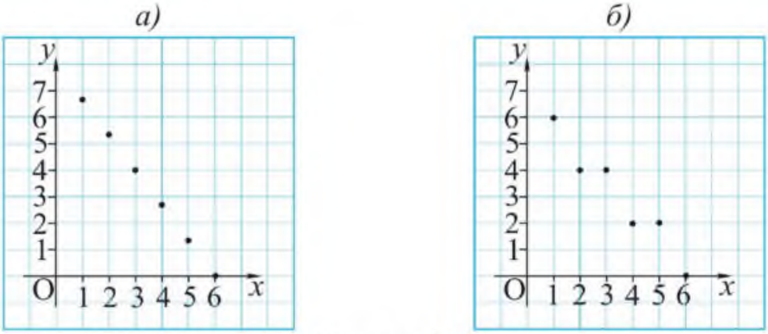


Рисунок 37

375. Назовите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), заданной формулой:

а) $a_n = -3n + 1$; в) $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$;
б) $a_n = 4n - 0{,}5$; г) $a_n = -\frac{3}{4}n - 5$.

Какая из этих последовательностей: 1) возрастающая; 2) убывающая?

376. Сколько всего двузначных чисел, делящихся и на 3, и на 4?

377. а) Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 55; 47; 39; …?

б) Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия –43; –36; –29; …?

378. Найдите четыре последовательных целых числа, образующих арифметическую прогрессию, если наибольшее из них равно сумме квадратов трех остальных.

379. Седьмой член арифметической прогрессии составляет 70 % от четвертого, а сумма седьмого и четвертого членов равна 102. Найдите разность этой прогрессии.

380. Докажите, что если последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия, то: а) $a_1 + a_{14} = a_6 + a_9$; б) $a_{11} + a_{23} = a_5 + a_{29}$.

381. Арифметическая прогрессия (a_n) состоит из двенадцати членов, причем $a_1 = -2{,}4$ и $d = 0{,}4$. Найдите сумму:

а) первого и последнего членов;

б) второго и предпоследнего членов;

в) четвертого члена с начала и четвертого от конца;

г) двух средних членов;

д) сделайте вывод, как можно найти сумму всех 12 членов этой прогрессии.

Уровень В

382. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_4 = 16$, $a_2 \cdot a_3 = 60$.

383. а) В арифметической прогрессии семь членов. Найдите их сумму, если четвертый член равен 21.

б) Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, пятый член которой равен –2.

384. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_2 + a_4 + a_6 = 18$ и $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 120$;

б) $a_1 + a_2 + a_3 = -12$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 98$.

385. Периметр треугольника равен 15 см. Найдите его стороны, если они выражаются целым числом сантиметров и образуют арифметическую прогрессию.

386. Докажите, что последовательность, заданная формулой: а) $a_n = 7 - 3n$; б) $b_n = 4n - 5$, является арифметической прогрессией. Какая из них является: 1) возрастающей; 2) убывающей последовательностью?

387. Исследуйте, каким может быть первый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 \in Z$, $a_2 = 2$ и $a_3^2 + a_4^2 < 4$.

388. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения (1), а x_3 и x_4 – корни уравнения (2), причем числа x_1; x_2; x_3; x_4 в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Найдите n и m, если даны уравнения:

а) $x^2 - 7x + n = 0$ (1), $x^2 - 11x + m = 0$ (2);

б) $x^2 - 4x + n = 0$ (1), $x^2 + 14x + m = 0$ (2).

Уровень С

389. Найдите трехзначное число, если его цифры образуют арифметическую прогрессию и оно делится на 45.

390. а) Найдите стороны прямоугольного треугольника, если они образуют арифметическую прогрессию.

б) Катер, отходя от станции, равномерно увеличивал скорость, которая через 20 минут стала равной 60 км/ч. Найдите (м/мин^2) ускорение катера.

391. а) Пятый член арифметической прогрессии равен 12. При каком значении ее разности d произведение третьего и восьмого членов будет наибольшим?

б) Седьмой член арифметической прогрессии (a_n) равен 10. При каком значении ее разности d выражение $a_9(a_4 + a_{12})$ принимает наименьшее значение?

16. Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулы суммы *n* первых членов арифметической прогрессии;
- уметь находить сумму *n* первых членов арифметической прогрессии по формулам и применять их при решении задач.

Используя свойство $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$ арифметической прогрессии (a_n), выведем формулу суммы S_n первых *n* ее членов.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n, \text{ с другой стороны,}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Тогда $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$,

$$\text{откуда } \boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}.$$

То есть сумма *n* первых членов арифметической прогрессии равна среднему арифметическому a_1 и a_n, умноженному на *n*.

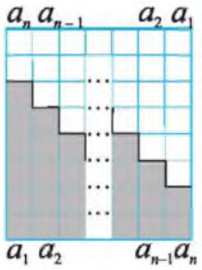


Рисунок 38

Эту формулу геометрически можно проиллюстрировать так: сумма S_n равна площади ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основание каждого из которых равно 1, а высота – соответствующему члену последовательности (рисунок 38). Если к этой фигуре приложить равную ей, как показано на рисунке, то получим прямоугольник. Его основание равно *n*, высота равна $a_1 + a_n$, а площадь равна $(a_1 + a_n)n$. Тогда $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Если в эту формулу вместо a_n подставить $a_1 + d(n - 1)$, то получим еще одну формулу суммы *n* первых членов арифметической прогрессии:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}.$$

Задача 1. Найти сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 250.

Решение. Числа, кратные 6, образуют арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1 = 6$ и $a_n = 6n$. Найдем число членов этой прогрессии, удовлетворяющих условию $a_n \leq 250$. Решим неравенство $6n \leq 250$, получим $n \leq 41\frac{2}{3}$. Следовательно, число членов прогрессии, сумму которых надо найти, равно 41. Итак, имеем $a_{41} = 6 \cdot 41 = 246$, $S_{41} = \frac{(6+246)\cdot 41}{2} = 5166$.

Ответ. 5166.

Задача 2. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_2 = 3$ и $a_5 + a_7 = 2$. Найти S_7.

Решение. $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$. Так как $a_1 + a_7 = a_2 + a_6$ и $a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2} = 1$, то получаем $S_7 = \frac{a_2 + a_6}{2} \cdot 7 = \frac{3+1}{2} \cdot 7 = 14$.

Ответ. 14.

Задача 3. Чему равен n-й член арифметической прогрессии, если известны сумма $S_n = 384$, ее разность $d = 2$ и первый член $a_1 = -19$?

Решение. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ имеем $a_n = -19 + 2(n-1)$. Далее найдем значение n, используя формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Тогда $384 = \frac{(-38 + 2(n-1))n}{2}$, $n^2 - 20n - 384 = 0$, $n = 10 \pm \sqrt{100 + 384} =$ $= 10 \pm 22$. Так как $n \in N$, то $n = 32$. Следовательно, $a_{32} = -19 + 2(32-1) =$ $= 43$.

Ответ. 43.

ВОПРОСЫ

1. Выведите формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии:

а) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$;   б) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

2. Какой из этих формул удобно воспользоваться для вычисления суммы всех двузначных чисел?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

392. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1 = 5$, $a_{10} = 15$; в) $a_5 + a_6 = -15{,}2$;

б) $a_1 = 0{,}5$, $a_4 = 9{,}5$; г) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$.

393. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), для которой:

а) $S_7 = 105$, $a_7 = -6$; б) $S_{15} = 121{,}5$, $a_{15} = 11{,}6$.

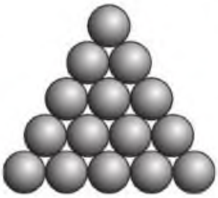


Рисунок 39

394. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором – 2, в третьем – 3 и т. д. (рисунок 39). а) Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 55? б) Сколько потребуется шаров, чтобы составить треугольник из 15 рядов?

395. Найдите a_1 и a_n – члены арифметической прогрессии (a_n), для которой:

а) $n = 23$, $d = -5$, $S_{23} = 161$; б) $n = 16$, $d = 0{,}5$, $S_{16} = -48$.

396. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Заполните таблицу:

	a_1	d	n	a_n	S_n
а)	7			3	20
б)	8		7		14
в)		2	12		72
г)		3		20	77

397. Найдите сумму всех нечетных чисел от 15 до 56.

398. В арифметической прогрессии сумма пяти первых членов равна 15, а сумма двадцати первых членов равна 360. Найдите сумму двадцати пяти первых членов этой прогрессии.

399. В арифметической прогрессии (a_n), в которой разность $d \neq 0$, сумма членов с седьмого по тринадцатый включительно равна 52,5. Найдите номер члена этой прогрессии, равного 7,5.

400. Найдите сумму: а) всех четных чисел, больших 25, но меньших 125; б) всех двузначных чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5.

401. Ботанический заказник «Каратальские пески» Казахстана известен зарослями облепихи, растущими между барханами. Узнайте его площадь, если число, выражающее ее в гектарах, в 1000 раз больше числа, полученного в ответе задачи: «Асхат спускался по бархану, склон которого составляет с горизонтом 30°. Он достиг его основания за 4 шага, при этом его первый шаг был равен 0,5 м, а каждый следующий на 10 см больше предыдущего. С какой высоты (м) спускался Асхат?»


Заросли облепихи

402. Сколько раз часы пробьют за сутки, если они отбивают только целые часы?

403. Боковая сторона трапеции с основаниями 3 см и 5 см разделена на 4 равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные ее основаниям. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключенных между боковыми сторонами трапеции.

404. Запишите формулу суммы n первых натуральных чисел: а) нечетных; б) четных.

405. Артем поделился с Дашей своим открытием. Он установил, что среди арифметических прогрессий в последовательности n первых нечетных натуральных чисел среднее арифметическое всех ее n членов равно n. Так ли это?

406. Исследуйте, может ли сумма n первых натуральных чисел быть равной: а) 555; б) 666.

407. Найдите сумму положительных членов арифметической прогрессии 50; 43; … .

408. Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:
а) $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 10$; б) $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = -16$.

Уровень B

409. Решите уравнение, в котором слагаемые являются членами арифметической прогрессии: а) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$; б) $(x + 1) + (x + 4) + \ldots + (x + 28) = 155$.

410. Сколько членов арифметической прогрессии с разностью 0,5 надо взять, чтобы их сумма равнялась 175, а первый член был равен наибольшему целому решению неравенства $2x^2 + 13x - 34 < 0$.

411. Сколько шаров одинакового радиуса можно расположить в виде равностороннего треугольника (как на рисунке 39) или прямоугольника так, чтобы на стороне треугольника и большей стороне прямоугольника располагалось одинаковое количество шаров, а на меньшей стороне прямоугольника – на 3 шара меньше?

412. Найдите сумму $25^2 - 24^2 + 23^2 - 22^2 + \ldots - 2^2 + 1^2$.

Уровень C

413. Исследуйте, является ли арифметической прогрессией последовательность, для которой $S_n = n^2 - 1$, где $n \in N$.

414. Докажите, что сумма n первых членов арифметической прогрессии может быть задана либо квадратичной функцией, либо линейной функцией.

415. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если сумма n первых ее членов вычисляется по формуле: а) $S_n = 5n^2 - 8n$; б) $S_n = n - \frac{n^2}{16}$.

416. Дана конечная арифметическая прогрессия $\frac{x-1}{x}$; $\frac{x-2}{x}$; $\frac{x-3}{x}$; … ; $\frac{1}{x}$. Найдите: а) сумму всех ее членов; б) сумму членов с номерами, принадлежащими области определения функции $y = \sqrt{-n^2 + 27n - 170}$, где $n \in N$.

17. Геометрическая прогрессия и ее свойства

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определение, формулу n-го члена и характеристическое свойство геометрической прогрессии;
- распознавать геометрическую прогрессию среди числовых последовательностей;
- уметь применять свойства геометрической прогрессии при решении задач.

Задача 1. Дан равносторонний треугольник, периметр которого равен 12 см. Затем построен треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Далее построен еще один треугольник, вершинами которого являются середины сторон второго треугольника (рисунок 40). Записать последовательность периметров построенных треугольников. Какова ее особенность?

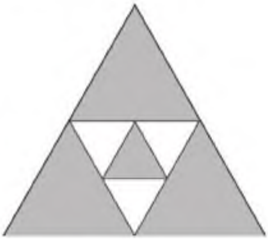


Рисунок 40

Используя свойство средней линии треугольника, найдем периметр второго треугольника, равный 6 см, и периметр третьего – равный 3 см. В последовательности 12; 6; 3 периметров этих треугольников каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $\frac{1}{2}$.

Такие последовательности называют геометрическими прогрессиями.

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число. Частное от деления $(n + 1)$-го на n-й член геометрической прогрессии называется **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначается буквой q. Для членов геометрической прогрессии (b_n) выполняется условие

$$\boldsymbol{b_{n+1} = b_n q}, \text{ где } q \text{ – ее знаменатель.}$$

Если $q = 1$, то геометрическая прогрессия называется *постоянной*. Геометрическая прогрессия может быть возрастающей или убывающей. Например, ряд чисел 2; 4; 8; 16; 32; 64 образует возрастающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2$. Последовательность чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$, обратных числам указанного ряда, – это убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Для геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем $q \neq 1$ и известным ее первым членом b_1 любой ее n-й член можно найти по формуле

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}.$$

Докажем эту формулу методом математической индукции.

1) При $n = 1$ формула верна.

2) Предположим, что при $n = k$ формула $b_k = b_1 q^{k-1}$ верна.

3) Докажем, что и при $n = k + 1$ верна формула $b_{k+1} = b_1 q^k$.

Действительно, по определению геометрической прогрессии $b_{k+1} = b_k q$. Подставив в это равенство вместо b_k выражение $b_1 q^{k-1}$, имеем: $b_{k+1} = b_1 q^{k-1} q = b_1 q^k$. Следовательно, $b_n = b_1 q^{n-1}$ для любых $n \in N$ и $q \neq 1$.

Рассмотрим **свойства геометрической прогрессии**.

1. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов, то есть

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ где } n \geq 2.$$

Действительно, по определению геометрической прогрессии $b_n = b_{n-1} \cdot q$, а $b_{n+1} = b_n q$. Из этих равенств следует, что $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, откуда $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, где $n \geq 2$.

2. Произведение первого и последнего членов геометрической прогрессии, в которой n членов, равно произведению двух ее членов, равноотстоящих от них, то есть $\boldsymbol{b_1 b_n = b_k b_{n-k+1}}$.

(Докажите это свойство самостоятельно.)

Верно также утверждение: **если в последовательности отличных от нуля чисел квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией**. Это утверждение объединяют со свойством 1 и называют *характеристическим свойством геометрической прогрессии*. Это свойство позволяет установить, является ли некоторая последовательность геометрической прогрессией. Из указанного характеристического свойства следует, что три положительных числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии лишь тогда, когда число b есть среднее геометрическое чисел a и c, то есть $b = \sqrt{ac}$. Отметим, что этим свойством обусловлено название «геометрическая прогрессия».

Задача 2. Исследовать, могут ли стороны прямоугольного треугольника, меньший катет которого равен b, быть последовательными членами геометрической прогрессии. Если могут, то запишите эту прогрессию.

Решение. Предположим, что стороны прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию b, bq, bq^2 со знаменателем $q > 1$. По теореме Пифагора $b^2q^4 = b^2 + b^2q^2$, отсюда $q^4 - q^2 - 1 = 0$. Решаем это биквадратное уравнение: $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, учитывая, что $q > 1$, получим $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Следовательно, стороны прямоугольного треугольника могут образовывать геометрическую прогрессию: $b, b\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. Могут; $b, b\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, b\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 3. В первом банке начисляют доход в 6 % в конце каждого года, а во втором – 0,5 % в конце каждого месяца. В какой банк выгоднее вложить деньги на 4 года, если процентная ставка не изменяется?

Решение. Если вкладчик вложит a тенге в первый банк, то в конце первого года вклад будет равен $1{,}06a$ тенге. В конце второго года он увеличится на 6 % уже от этой суммы и станет равным $1{,}06^2a$ тенге. Рассуждая аналогично, устанавливаем, что через 4 года вклад будет равен $1{,}06^4a$ тенге.

Если вкладчик вложит a тенге во второй банк, то в конце первого года его вклад станет равным $1{,}005^{12}a$ тенге, а через 4 года – $1{,}005^{48}a$ тенге.

Сравним числа $1{,}06^4$ и $1{,}005^{48}$. Для этого достаточно сравнить $1{,}005^{12}$ и $1{,}06$. Используя формулу бинома Ньютона, получаем: $1{,}005^{12} = (1 + 0{,}005)^{12}$, $(1 + 0{,}005)^{12} > 1 + 12 \cdot 0{,}005$, $1 + 12 \cdot 0{,}005 = 1{,}06$. Следовательно, $1{,}005^{12} > 1{,}06$, $1{,}005^{48}a > 1{,}06^4a$.

Ответ. Выгоднее вкладывать деньги во второй банк.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение геометрической прогрессии.

2. Выведите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

3. Сформулируйте характеристическое свойство геометрической прогрессии.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

417. Запишите пять первых членов геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = 1$, $q = 2$; в) $b_1 = -25$, $q = \frac{1}{5}$;

б) $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = 3$; г) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\sqrt{2}$.

418. Зная первые два члена геометрической прогрессии (b_n), найдите два следующих за ними члена:

а) 2; 6; …; в) 1,4; –7; …; д) $2\sqrt{2}$; 4; …;

б) 10; 5; …; г) –36; –12; …; е) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; –1; … .

419. Определите, является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) 0,5; 5; 50; 500; в) 4; 0,4; 0,04; 0,004;

б) 5; 5,5; 5,55; 5,555; г) $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; 1; –2.

420. Установите, какой прогрессией – арифметической или геометрической – является последовательность, для которой:

а) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{8}$; в) $c_1 = -27$, $c_{n+1} = \frac{2}{9} + c_n$;

б) $b_1 = 7$, $b_{n+1} = b_n - 8$; г) $d_1 = -27$, $d_{n+1} = \frac{2}{9}d_n$.

421. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n) и найдите b_5, если:

а) $b_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$; в) $b_1 = 6{,}25$, $q = \frac{1}{5}$;

б) $b_1 = 16\sqrt{2}$, $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $b_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = -\sqrt{3}$.

422. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), для которой выполняется равенство:

а) $b_2 + b_4 + b_6 = 5(b_1 + b_3 + b_5)$; б) $b_2 + b_4 + b_6 = -\sqrt{2}\,(b_1 + b_3 + b_5)$.

423. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

а) b_5, если $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$; в) q, если $b_3 = 7$, $b_6 = 56$;

б) b_1, если $b_6 = \frac{1}{32}$, $q = \frac{1}{2}$; г) b_9, если $b_2 = 2$, $b_5 = \frac{1}{4}$.

424. Найдите первый член возрастающей геометрической прогрессии, в которой:

а) $b_1 + b_2 = 14$, $\frac{b_4}{b_3} = 4$; в) $b_1 + b_2 + b_3 = 7$, $\frac{b_4}{b_2} = 2$;

б) $b_1b_2 = 144$, $\frac{b_4}{b_3} = 3$; г) $b_1b_2b_3 = 729$, $\frac{b_5}{b_3} = 9$.

425. Какая из последовательностей, графики которых изображены на рисунке 41, *а*, *б*, является геометрической прогрессией?

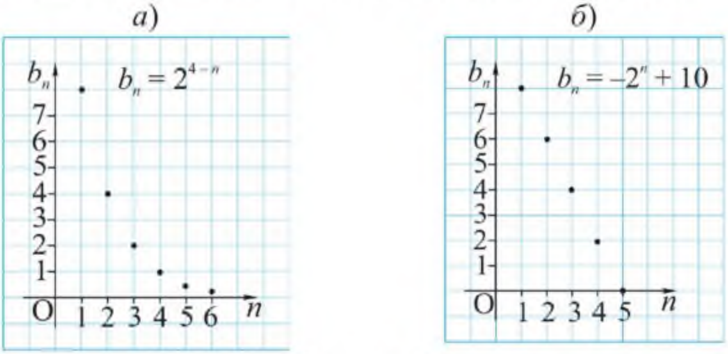

а) *б*)

Рисунок 41

426. Исследуйте, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой ее n-го члена: а) $x_n = 2 \cdot 4^n$; б) $y_n = 81 \cdot 3^{1-n}$, $n \in N$. Если является, то укажите ее первый член и знаменатель.

427. Три числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Найдите число b, если числа a, $b - 8$, c также образуют геометрическую прогрессию.

428. а) Третий член геометрической прогрессии равен –3. Найдите произведение первых пяти членов этой прогрессии.

б) Найдите произведение первых двадцати членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 0{,}1$, $b_{20} = 20$.

429. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 60. Если от первого числа отнять 10, от второго 8, а третье оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

430. Исследуйте, могут ли длины сторон треугольника составлять геометрическую прогрессию и быть выражены натуральными числами, произведение которых равно 216.

431. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 + b_3 = 60$, $b_2 = 18$; в) $b_1 + b_4 = 27$, $b_2 + b_3 = 18$;

б) $b_2 = 10$, $b_3 + b_4 = 60$; г) $b_1 + b_2 + b_3 = 7$, $b_1b_2b_3 = 8$.

432. а) Рост дрожжевых клеток происходит делением каждой клетки на две. Сколько получится клеток из 1000 после десятикратного их деления?

б) В какую сумму превратится в банке вклад в a тенге через n лет, если каждый год прирост составляет p %?

Уровень B

433. Докажите, что если последовательность неравных чисел a, b, c, d является геометрической прогрессией, то $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$.

434. Исследуйте, существует ли геометрическая прогрессия, в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Если существует, то найдите ее знаменатель.

435. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + bx + 4 = 0$, а числа x_3 и x_4 – корнями уравнения $x^2 + cx + 64 = 0$. Найдите b и c, если последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией.

436. Объем древесины на опытном участке лесхоза составляет 10 000 м^3. Известно, что ее ежегодный прирост равен 10 %. Каким будет объем древесины на этом участке через 6 лет?

437. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 < 0$ и сумма $b_1 + b_2 + b_3$ принимает наибольшее значение.

Уровень C

438. Докажите, что если различные положительные числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии, то верно неравенство: а) $\frac{a + c}{2} > \frac{a + b + c}{3}$; б) $a^3 + c^3 > 2b^3$.

439. Исследуйте, могут ли три различных числа быть одновременно членами геометрической и арифметической прогрессий.

440. Найдите три числа a, b, c, образующие геометрическую прогрессию, если числа a, b, $(c - 8)$ составляют арифметическую прогрессию, а числа a, $(b - 2)$, $(c - 10)$ – геометрическую.

441. Запишите три первых члена возрастающей геометрической прогрессии, сумма которых равна 21, а сумма обратных им чисел равна $\frac{7}{12}$.

18. Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулы суммы *n* первых членов геометрической прогрессии;
- уметь находить суммы *n* первых членов геометрической прогрессии по формулам и применять их при решении задач.

Используя формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ при $q \neq 1$, выведем формулу суммы *n* первых членов геометрической прогрессии (b_n). Имеем $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n$, $S_n - S_nq = b_1 + b_1q + \ldots + b_1q^{n-1} - b_1q - \ldots - b_1q^{n-1} - b_1q^n = b_1 - b_1q^n$. Тогда $S_n(1-q) = b_1(1-q^n)$, $\boldsymbol{S_n} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Отметим, что если $q = 1$, то $S_n = b_1 \cdot n$.

Рассмотрим геометрический вывод формулы $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ суммы *n* первых членов геометрической прогрессии (b_n) для $0 < q < 1$.

Построим квадрат *ABCD* со стороной, равной 1. На его стороне *CD* отметим точку B_1, пусть $B_1D = q$. Затем на луче *AD* построим прямоугольник $DB_1C_1D_1$, в котором $DD_1 = 1$. Отметим на отрезке C_1D_1 точку B_2 так, чтобы $\frac{CD}{B_1D} = \frac{C_1D_1}{B_2D_1}$. Тогда $\frac{1}{q} = \frac{q}{B_2D_1}$, $B_2D_1 = q^2$. Далее на луче *AD* построим прямоугольник $D_1B_2C_2D_2$, в котором $D_1D_2 = 1$. Если таким же способом построить $n - 1$ прямоугольник (рисунок 42), то их площади вместе с площадью квадрата образуют геометрическую прогрессию 1; q; q^2; q^3; … ; q^{n-1}. Ее сумма равна: $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ (пример 1 пункта 14). Если умножить левую и правую части этого равенства на b_1, то получим формулу $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ суммы *n* первых членов геометрической прогрессии (b_n) для $0 < q < 1$.

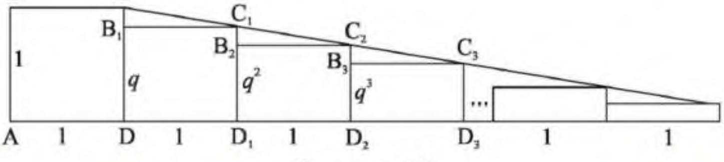


Рисунок 42

Учитывая, что $b_1q^n = b_1q^{n-1}q = b_nq$, формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии (b_n) можно записать так: $\boldsymbol{S_n} = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

З а д а ч а 1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии (b_n) равна 20, а сумма следующих четырех ее членов равна 320. Найти знаменатель и первый член этой прогрессии.

Р е ш е н и е. $S_4 = \dfrac{b_1(1-q^4)}{1-q} = 20$. Следующие четыре члена образуют геометрическую прогрессию, первый член которой равен b_1q^4. Их сумма равна $\dfrac{b_1q^4(1-q^4)}{1-q} = 320$.

Из этих равенств следует, что $\dfrac{b_1q^4(1-q^4)}{1-q} : \dfrac{b_1(1-q^4)}{1-q} = 320 : 20$, $q^4 = 16$. Отсюда $q = 2$ или $q = -2$.

Если $q = 2$, то из равенства $\dfrac{b_1(1-2^4)}{1-2} = 20$ находим $b_1 = \dfrac{4}{3}$.

Если $q = -2$, то из равенства $\dfrac{b_1(1-(-2)^4)}{1-(-2)} = 20$ находим $b_1 = -4$.

О т в е т. $b_1 = \dfrac{4}{3}$, $q = 2$ или $b_1 = -4$, $q = -2$.

З а д а ч а 2. Сколько членов в геометрической прогрессии, если их сумма равна 189, ее знаменатель равен 2, а последний член равен 96?

Р е ш е н и е. По формуле $S_n = \dfrac{b_nq - b_1}{q-1}$ имеем $189 = \dfrac{96 \cdot 2 - b_1}{2-1}$, откуда $b_1 = 3$. Тогда $96 = 3 \cdot 2^{n-1}$, $32 = 2^{n-1}$, $2^5 = 2^{n-1}$, $n - 1 = 5$, $n = 6$.

О т в е т. 6.

З а д а ч а 3. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна 9 дм. В него вписан второй квадрат $A_1B_1C_1D_1$, вершина A_1 которого делит отрезок AB в отношении $AA_1 : A_1B = 2 : 1$. Таким же образом во второй квадрат вписан третий, а в третий – четвертый (рисунок 43). Найти сумму площадей всех квадратов.

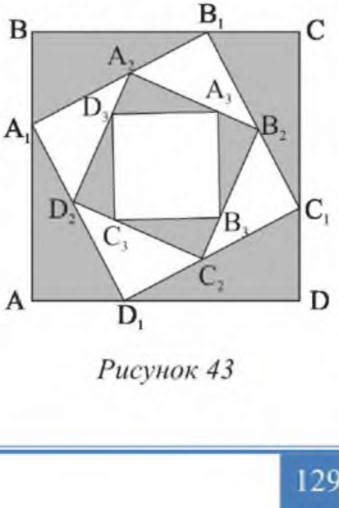


Рисунок 43

Решение. Из условия задачи следует, что вершины третьего и четвертого квадратов делят соответствующие стороны в отношении 2 : 1. Найдем стороны построенных квадратов, используя теорему Пифагора:

$A_1B_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ (дм), $\qquad A_2B_2 = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + \sqrt{5}^2} = 5,$

$A_3B_3 = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}, \qquad A_4B_4 = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{5}}{9}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{9}\right)^2} = \frac{25}{9}.$

Тогда площади всех квадратов образуют последовательность (b_n): 81, 45, 25, $\frac{125}{9}$, $\frac{625}{81}$. Эта последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{5}{9}$. (Проверьте это самостоятельно.) $S_4 = \frac{81\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^4\right)}{1-\frac{5}{9}} = \frac{81\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{5}{9}\right)^2\right)}{1-\frac{5}{9}} = 81\left(1+\frac{5}{9}\right)\left(1+\frac{25}{81}\right) =$

$= \frac{14 \cdot 106}{9} = \frac{1484}{9} = 164\frac{8}{9}.$

Ответ. $164\frac{8}{9}$ дм².

ВОПРОСЫ

Выведите формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии: а) $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$; б) $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

442. Найдите сумму:

а) $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$; $\qquad$ б) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 + 2^6$.

443. Запишите в виде дроби выражение, в котором $x \neq 1$:

а) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$; $\qquad$ б) $x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11}$.

444. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

а) S_5, если $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$; $\qquad$ в) S_{10}, если $b_1 + b_5 = 51$, $b_2 + b_6 = 102$;

б) S_7, если $b_1 = 5$, $q = 2$; $\qquad$ г) S_5, если $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$.

445. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Заполните таблицу:

	b_1	q	n	b_n	S_n
а)	3		6	96	
б)	0,2		11	204,8	
в)		0,5		2	254
г)		2	8		765
д)		3		567	847
е)	2			2^{-3}	$3\frac{7}{8}$

446. Дан равносторонний треугольник, периметр которого равен 24 см. Из его средних линий построен второй треугольник, из средних линий второго – третий и из средних линий третьего – четвертый. Найдите сумму периметров этих четырех треугольников.

447. Дан квадрат со стороной 4 см. Середины его сторон являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго – вершинами третьего. Найдите сумму площадей четырех первых квадратов, построенных таким образом.

448. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 0{,}4$, $q = \sqrt{2}$; в) $b_1 = 0{,}(3)$, $q = \sqrt{3}$;

б) $b_2 = 2\sqrt{5}$, $b_3 = 10$; г) $b_1 = 7^{-1}$, $q = \sqrt{7}$.

449. Докажите, что последовательность, заданная формулой $c_n = \frac{6^{n-1}}{18}$, является геометрической прогрессией. Найдите c_1 и S_4.

450. Сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна –45, а отношение шестого члена к третьему равно 8. Найдите номер члена этой прогрессии, равного –384.

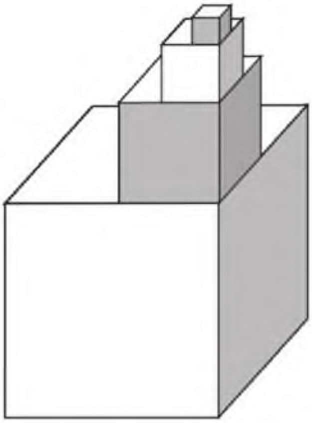


Рисунок 44

451. На куб с ребром 1 м поставили второй куб с ребром $\frac{1}{2}$ м, на второй – куб с ребром $\frac{1}{4}$ м, на третий – куб с ребром $\frac{1}{8}$ м (рисунок 44). Затем полученное тело покрасили, не снимая кубов. Найдите окрашенную площадь.

452. Между числами 1 и 256 запишите такие три числа, чтобы вместе с данными они составляли геометрическую прогрессию и найдите ее сумму.

453. Найдите сумму девяти первых членов геометрической прогрессии, если $S_3 = 80$, $S_6 = 90$.

454. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Сумма этих чисел равна $2\frac{3}{8}$, а сумма чисел, обратных им, равна $4\frac{2}{9}$. Найдите произведение этих чисел.

455. Некто продавал лошадь за 156 рублей. Но покупатель раздумал ее покупать из-за того, что посчитал: лошадь таких денег не стоит. Тогда продавец предложил другие условия: «Купи только подковные гвозди, а лошадь получишь бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего $\frac{1}{4}$ копейки, за второй – $\frac{1}{2}$ копейки, за третий – 1 копейку и т. д.» Покупатель, соблазненный низкой ценой, принял условия продавца. На сколько покупатель проторговался? (Задача из книги «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, которая в XVIII столетии была основным школьным учебником по математике в России.)

Уровень В

456. Докажите, что если сумму n первых членов последовательности (b_n) можно найти по формуле $S_n = 2^n - 1$, то (b_n) – геометрическая прогрессия.

457. Выведите формулу суммы квадратов n первых членов геометрической прогрессии.

458. Дан равносторонний треугольник, сторона которого 8 дм. Из его высот построен второй треугольник, из высот второго – третий и так далее. Докажите, что площади этих треугольников образуют геометрическую прогрессию, и найдите сумму пяти ее членов.

459. По легенде индийский царь позволил изобретателю игры в шахматы самому себе назначить награду. Тот просил, чтобы дали ему зерен пшеницы: за первую клетку – одно зерно, за вторую – два зерна и так далее до последней 64-й клетки за каждую последующую в 2 раза больше, чем за предыдущую. а) Сколько зерен пшеницы просил он? Как прочитать это число? б) Найдите примерный вес этого зерна в тоннах, если вес одного зерна ≈ 0,065 грамма.

460. Решите уравнение:
а) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 0$; б) $x^4 + x^3 + x = 1$.

Уровень С

461. Докажите, что для геометрической прогрессии (b_n) верна формула $S_n - S_k = \dfrac{b_{k+1}(q^{n-k} - 1)}{q - 1}$.

462. Установите, является ли целым числом значение выражения

$$3^{2019} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2019}\right).$$

463. Найдите значение выражения $\sqrt{1\ 111\ 111\ 111 - 22\ 222}$, используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии.

19. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятия бесконечно убывающей геометрической прогрессии и ее суммы;
- знать формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии;
- уметь применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для преобразования десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь и при решении задач.

Рассмотрим примеры бесконечных прогрессий:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$, знаменатель этой прогрессии равен $\frac{1}{2}$;

$1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots$, знаменатель этой прогрессии равен $-\frac{1}{2}$.

Модуль знаменателя каждой из этих прогрессий меньше 1. Бесконечную геометрическую прогрессию, модуль знаменателя которой меньше 1, называют *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*.

Известно, что число $\frac{1}{3}$ обращается в бесконечную десятичную периодическую дробь $0{,}333\ldots$. Если представить эту дробь в виде суммы разрядных слагаемых, то получим сумму с бесконечным числом слагаемых: $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$. Слагаемые этой суммы являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 0{,}1$. По формуле $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем: $S_n = \frac{0{,}3(1-(0{,}1)^n)}{1-0{,}1} = \frac{1-(0{,}1)^n}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 10^n}$. При n, стремящемся к бесконечности (записывают $n \to \infty$), значение дроби $\frac{1}{3\cdot 10^n}$ стремится к нулю.

Поэтому $S_n \to \frac{1}{3}$, это записывают так: $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots =$ $= \frac{1}{3}$. Число $\frac{1}{3}$ называют суммой указанной прогрессии.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому стремится сумма n первых ее членов при n, стремящемся к бесконечности.

Для вывода формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1; b_1q; …; b_1q^{n-1}; … используем формулу $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Поскольку $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1q^n}{1-q}$ и $|q| < 1$, то при $n \to \infty$ значение $q^n \to 0$ и $\frac{b_1q^n}{1-q} \to 0$. Следовательно, при $n \to \infty$ значение $S_n \to \frac{b_1}{1-q}$. Значение выражения $\frac{b_1}{1-q}$ принимают за сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формулу этой суммы записывают так: $\boldsymbol{S} = \frac{b_1}{1-q}$.

Рассмотрим геометрический вывод этой формулы, если $0 < q < 1$.

Построим квадрат *OKMN*, отметим на его сторонах единичные отрезки и выделим последовательность отрезков OC, AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, …, как показано на рисунке 45. Эти отрезки изображают члены геометрической прогрессии 1; q; q^2; q^3; … со знаменателем $q = AB$ и $b_1 = 1$. Действительно, из подобия выделенных цветом прямоугольных треугольников и свойств пропорций получаем:

$\frac{A_1B_1}{q} = \frac{q}{1}$, откуда $A_1B_1 = q^2$.

$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{A_2B_1}{A_1B}$, тогда $\frac{A_2B_2}{q^2} = \frac{q^2}{q}$,

$A_2B_2 = q^3$. И так далее.

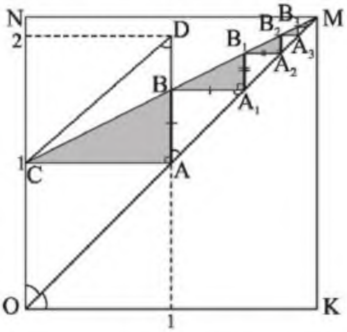


Рисунок 45

Сумма членов этой прогрессии равна стороне *KM* квадрата *OKMN*. Найдем *KM*, используя подобие соответствующих треугольников и свойства пропорций.

Из подобия треугольников CBD и MCO, ACD и KOM следует, что $\frac{BD}{OC} = \frac{CD}{OM} = \frac{AD}{KM}$. Откуда $KM = \frac{OC \cdot AD}{BD} = \frac{1 \cdot 1}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, то есть $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}$.

Если $b_1 \neq 1$, то, умножив левую и правую части последнего равенства на b_1, получим формулу $S = \frac{b_1}{1-q}$, где $0 < q < 1$.

Задача 1. Найдите третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), сумма которой равна 1,6, а второй член равен –0,5.

Решение. По условию задачи составим систему уравнений $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{5}, \\ b_1 q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Решим ее: $b_1 q : \frac{b_1}{1-q} = -\frac{1}{2} : \frac{8}{5}$; $q(1-q) = -\frac{5}{16}$;

$q^2 - q - \frac{5}{16} = 0$; $q = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{3}{2}}{2}$; $q_1 = \frac{5}{4}$ – не удовлетворяет условию $|q| < 1$; $q_2 = -\frac{1}{4}$. Тогда $b_3 = b_2 q = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Пример. Записать бесконечную периодическую десятичную дробь 5,2(7) в виде обыкновенной дроби.

Решение. Представим данное число в виде суммы разрядных слагаемых: $5{,}2(7) = 5 + 0{,}2 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots$.

Все слагаемые этой суммы, начиная с третьего, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию (b_n), в которой $b_1 = 0{,}07$, $q = 0{,}1$. Сумма этой прогрессии равна: $S = \frac{0{,}07}{1 - 0{,}1} = \frac{7}{90}$. Тогда $5{,}2(7) = 5 + \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = 5 + \frac{25}{90} = \frac{95}{18}$.

Ответ. $5{,}2(7) = \frac{95}{18}$.

Задача 2. В угол A, равный 60°, вписана окружность, расстояние от центра O_1 которой до его вершины равно d. Затем в этот угол вписано бесконечное множество окружностей, касающихся друг друга и сторон угла (рисунок 46). Найти сумму радиусов всех этих окружностей.

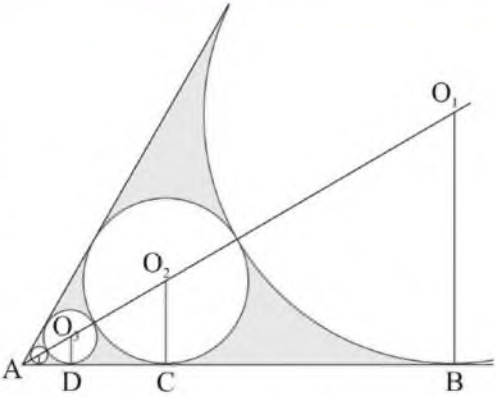


Рисунок 46

Решение. Пусть $O_2C = x$. Учитывая, что центры всех вписанных окружностей лежат на биссектрисе данного угла, и свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°, имеем: $O_1B = \frac{d}{2}$, $AO_2 = 2x$, $AO_1 = 2x + x + \frac{d}{2} = 3x + \frac{d}{2}$.

По условию задачи $AO_1 = d$, тогда $3x + \frac{d}{2} = d$, $x = \frac{d}{6}$, то есть $O_2C = \frac{d}{6}$, поэтому $\frac{O_2C}{O_1B} = \frac{1}{3}$.

Пусть $O_3D = y$, тогда $AO_3 = 2y$, $AO_2 = 2y + y + \frac{d}{6} = 3y + \frac{d}{6}$. Учитывая, что $AO_2 = \frac{d}{3}$, получим $3y + \frac{d}{6} = \frac{d}{3}$, $y = \frac{d}{18}$, то есть $O_3D = \frac{d}{18}$, тогда $\frac{O_3D}{O_2C} = \frac{1}{3}$.

Аналогично рассуждая, получаем, что радиусы всех окружностей образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{d}{2}$, а знаменатель равен $\frac{1}{3}$. Находим ее сумму: $S = \frac{d}{2} : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}d$.

Ответ. $\frac{3}{4}d$.

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2. Что принимается за сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

3. Запишите и объясните формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

464. Запишите четыре первых члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) и найдите ее сумму, если:

а) $b_1 = 1,\ q = \frac{1}{3}$; в) $b_1 = 2,\ q = \frac{1}{4}$;

б) $b_1 = 1,\ q = -\frac{1}{2}$; г) $b_1 = -3,\ q = \frac{1}{2}$.

465. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots$; в) $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$;

б) $7 - \frac{21}{4} + \frac{63}{16} - \frac{189}{64} + \ldots$; г) $-2 + \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \ldots$.

466. Упростите выражение: $\frac{1 + a + a^2 + \ldots}{a + a^3 + a^5 + \ldots}$, где числитель и знаменатель дроби – суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий.

467. Найдите сумму бесконечной прогрессии:

а) $1 + \cos 60° + \cos^2 60° + \ldots$; в) $1 - \sin 45° + \sin^2 45° - \ldots$;

б) $1 + \mathrm{tg}\, 30° + \mathrm{tg}^2 30° + \ldots$; г) $-1 - \cos 30° - \cos^2 30° - \ldots$.

468. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,4(4); в) 0,23(3); д) 0,423(7);

б) 0,3(4); г) 1,17(2); е) –21,1(5).

469. Запишите в виде дроби выражение, в котором $|x| < 1$:

а) $3 + 3x^2 + 3x^4 + \ldots + 3x^{2n} + \ldots$; б) $1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^n + \ldots$.

470. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии (c_n), для которой:

а) $S = 0{,}2$ и $q = \frac{4}{9}$; в) $S = 6{,}4$ и $c_1 + c_2 + c_3 = 6{,}3$.

б) $S = 0{,}5$ и $c_1 + c_2 = 0{,}48$;

471. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = 3$, $S = 3{,}5$; в) $b_2 = -\frac{1}{2}$, $S = 1{,}6$;

б) $S_6 = \frac{7}{8}S$; г) $19S = 27S_3$.

472. При каких значениях a сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $2a$; $a\sqrt{2}$; a; … равна: а) 8; б) $2 + \sqrt{2}$?

473. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) равна 8,75. Если взять ее члены, стоящие на нечетных местах, то получится бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна $7\frac{7}{24}$. Найдите b_3.

474. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), для которой сумма членов с нечетными номерами равна 3, а сумма членов с четными номерами равна 1.

475. Дан равносторонний треугольник со стороной, равной 8 см. От него прямой, проходящей через середины боковых сторон, отсечен второй треугольник, от второго треугольника таким же образом отсечен третий и так далее до бесконечности. Найдите сумму площадей всех таких треугольников.

476. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой 1, равна Q. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

477. Исследуйте, существует ли бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, первый член которой в 10 раз больше суммы всех остальных ее членов. Если существует, то приведите пример такой последовательности.

Уровень B

478. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}-4, \ldots$; б) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}-3, 7\sqrt{3}-12, \ldots$.

479. Запишите в виде обыкновенной дроби: а) $\frac{0{,}2(5)}{0{,}12(7)}$; б) $\frac{0{,}2(27)}{0{,}(63)}$.

480. Найдите все корни уравнения, в левой части которого записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{2}{3}$; б) $x + x^2 + \ldots = 3{,}5 - \frac{1}{x}$.

481. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой:

а) $b_3 - b_1 = 36$, $b_4 - b_3 = 18$; б) $b_1 - b_4 = 7$, $b_2 - b_3 = 2$.

Уровень C

482. Представьте в виде суммы какой-либо бесконечно убывающей геометрической прогрессии число: а) 5; б) 3,5.

483. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдите знаменатель этой прогрессии.

484. Какое наименьшее количество *n* первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии 8; 5; … надо отбросить, чтобы сумма остальных ее членов была меньше 10?

485. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (c_n), сумма которой равна 8. Причем $c_n = \frac{1}{4}$ и $\frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}}{c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots} = 30$.

Найдите номер члена прогрессии, равного $\frac{1}{4}$.

20. Упражнения на повторение раздела «Последовательности»

Уровень А

486. Выпишите пять первых членов последовательности, заданной формулой $c_n = \frac{10^n - 1}{9}$, и найдите их сумму. Является ли эта последовательность геометрической прогрессией?

487. Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Докажите, что $a_n = 2^n + 1$.

488. Докажите, что при любых $n \in N$ верно равенство $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

489. Докажите, что для любых неравных чисел a и b последовательность:

а) $(a + b)^2$; $a^2 + b^2$; $(a - b)^2$ является арифметической прогрессией;

б) $(a + b)^2$; $a^2 - b^2$; $(a - b)^2$ является геометрической прогрессией.

490. Углы некоторого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из них равен 60°.

491. Длины сторон треугольника являются последовательными членами арифметической прогрессии, разность которой равна 2 см. Найдите периметр этого треугольника, если известно, что его площадь равна 8 см^2, а угол между наибольшей и наименьшей сторонами равен 30°.

492. В арифметической прогрессии шесть членов. Сумма членов с четными номерами равна 15, а сумма членов с нечетными номерами равна 27. Найдите пятый член этой прогрессии.

493. В арифметической прогрессии $a_3 + a_{10} + a_{18} + a_{25} = 10$. Найдите S_{27}.

494. Двенадцатый член арифметической прогрессии равен –7. Найдите сумму первых двадцати трех ее членов.

495. Найдите разность и число членов арифметической прогрессии, для которой:

а) $a_1 = 9$, $a_n = 23$, $S_n = 352$; б) $a_1 = 7$, $a_n = -27$, $S_n = -180$.

496. а) За сколько часов велосипедист проедет 90 км, если он проезжает за первый час 20 км, а за каждый последующий час – на 2 км меньше?

б) В цирке в одном из секторов для зрителей кресла установили так, что в каждом следующем ряду на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько мест в этом секторе, если в его первом ряду 8 кресел, а рядов 22?

Плато Устюрт

497. Уникальный Устюртский государственный заповедник Казахстана имеет площадь, равную 223 342 га. Какое наибольшее количество n первых нечетных натуральных чисел надо сложить, чтобы их сумма не превышала числа, выражающего в гектарах площадь этого заповедника?

498. Три друга, возраст которых составляет арифметическую прогрессию с разностью 1, договорились дарить каждому на день рождения столько марок, сколько лет имениннику. Через 4 года общее количество марок у друзей стало равно 114. Сколько лет было друзьям на момент их договоренности?

499. Найдите сумму всех: а) двузначных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3; б) трехзначных чисел, делящихся на 5.

500. Исследуйте, могут ли в последовательности натуральных чисел $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$ три последних числа составлять геометрическую прогрессию.

501. Найдите два первых члена геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_3 = 36$, $b_4 = 24$; в) $b_3 = 36$, $b_6 = -972$;

б) $b_3 = 36$, $b_5 = 144$; г) $b_3 = 36$, $b_7 = 2\frac{1}{4}$.

502. а) Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите второе число.

б) Население г. Астаны (с 2019 г. – Нур-Султан) в 1998 году составляло около 300 000 человек, а в 2017 году его численность достигла 1 миллиона 32 тысячи 450 человек. Представив эти значения как первый и двадцатый члены арифметической прогрессии, найдите ее разность. Верно ли, что эта разность – ежегодный прирост населения столицы за указанные двадцать лет?

г. Нур-Султан

503. В геометрической прогрессии (b_n) найдите:

а) b_2b_4, если $b_1 = 7$, $b_5 = 56$; б) $b_6b_7b_8b_9b_{10}$, если $b_8 = 4$.

504. Дария, Рашит и Тана покупали тетради по 25 тенге и ручки. Дария купила 10 тетрадей и 3 ручки, Рашит – 20 тетрадей и 2 ручки, Тана – 30 тетрадей и 3 ручки. Оказалось, что суммы, которые уплатили Дария, Рашит и Тана, образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит ручка?

505. Докажите, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$, то $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$. (Задача французского математика П. Ферма (1601–1665).

506. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n), в которой: а) $9S = S_3$; б) $S_5 = 31$, $S = 32$; в) $7S = 16S_4$.

Уровень B

507. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена $b_n = n(2n + 1)$. Докажите, что сумму n первых ее членов можно найти по формуле $S_n = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$.

508. Докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения $6^{2n-1} + 1$ делится на 7.

509. Исследуйте, при каких значениях x является арифметической прогрессией последовательность:

а) $x^2 - 4;\ x^2 + 3;\ 2x^2 + 5$; б) $x - \sqrt{2};\ x\sqrt{2} + 2;\ 3x - \sqrt{2}$.

510. Найдите сумму всех несократимых дробей x_n со знаменателем 3, если $10 < x_n < 20$.

511. Обслуживаются 16 ткацких автоматических станков, производительность каждого из которых m метров ткани в час. Первый станок включен в 8 часов, а каждый следующий – через 5 минут. Какова выработка (м) ткани этими станками в период с 8 до 10 часов?

512. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 5. Найдите ее разность, если ее пятый член равен сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

513. В арифметической прогрессии девять членов, первый равен 1, а ее сумма равна 369. В геометрической прогрессии также девять членов, причем первый и последний члены этих прогрессий совпадают. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Уровень C

514. Докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения $n^5 - n$ делится на 10.

515. Докажите, что при любых натуральных n, больших 2, верно неравенство $4^n > 3^n + 2^n$.

516. Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу окружности, вписанной в этот треугольник.

517. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой 1, равна Q. Найдите сумму кубов членов этой прогрессии.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

518. 1A) Последовательность (a_n) начинается так: 5; 15; … . Запишите первые пять членов этой последовательности, если она является: а) арифметической прогрессией; б) геометрической прогрессией.

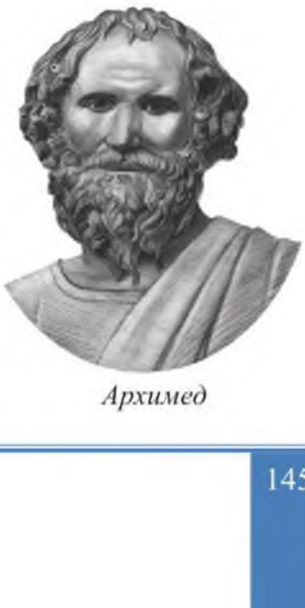
2A) Последовательность задана формулой $a_n = 7n + 3$ ее n-го члена. Установите, принадлежит ли этой последовательности число 2019.

3B) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 117 м, одновременно навстречу друг другу начали двигаться два жука. За первую минуту один из них прошел 1 м, а в каждую последующую минуту на 0,5 м больше, чем в предыдущую. Другой жук проходил за каждую минуту 6 м. Через сколько минут они встретятся?

4B) Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 7, а их произведение равно 8.

5C) Докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения $7^{2n} - 1$ делится на 24.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!



Архимед

Исследование последовательностей и метод математической индукции имеют большое значение в математике и ее применениях. Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях имелись у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречались задачи на эти прогрессии и указывались правила, как их решать. В III веке до нашей эры древнегреческими учены-

Фибоначчи

ми были сформулированы правила нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии (Диофантом) и суммы нескольких членов геометрической прогрессии (Евклидом). Архимед показал, как можно находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$. Большой вклад в развитие теории последовательностей внесли также индийские математики.

В Европе последовательности стали широко применяться после опубликования в XIII веке итальянским математиком Фибоначчи (1170–1250) сочинения «Книга об абаке». В нем он систематизировал и изложил материалы по арифметике и алгебре, известные грекам, индийцам и арабам, которые впоследствии дали большой скачок в развитии математики в Европе.

Рассуждения, приводящие к методу математической индукции, также применялись учеными в древности. В открытии этого метода значительную роль сыграли французские математики Р. Декарт (1596–1650) и Б. Паскаль (1623–1662).

Найдите в Интернете:

1) информацию о числах Фибоначчи, «задачу о кроликах» и ее решение;

2) древнеегипетскую и древневавилонскую задачи, решаемые с использованием арифметической или геометрической прогрессии.

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

В результате изучения раздела надо

знать

- понятия градусной и радианной мер углов и дуг;
- определения: синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла;
- тригонометрические функции и их свойства;
- формулы, выражающие соотношения между тригонометрическими функциями углов.

уметь

- находить значения тригонометрических функций углов, выраженных в градусной и радианной мерах;
- применять свойства тригонометрических функций в тождественных преобразованиях выражений и решении задач.

21. Градусная и радианная меры углов и дуг

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятия градусной и радианной мер произвольного угла, единичной окружности; способы перевода градусной меры угла в радианную и обратно;
- уметь отмечать на единичной окружности углы поворота, выраженные в градусной и радианной мерах;
- устанавливать соответствие между действительными числами и углами поворота, выраженными в радианной мере.

В курсе геометрии 8 класса были рассмотрены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов от 0° до 180°. В тригонометрии исследуются тригонометрические функции произвольных углов. Прежде чем изучать свойства этих функций, рассмотрим понятие произвольного угла в тригонометрии. При введении тригонометрических функций углов от 0° до 180° мы рассматривали полуокружность единичного радиуса. Теперь будем использовать окружность единичного радиуса, которую называют *координатной* или *единичной окружностью*. Отметим на ней начало отсчета – точку $A(1;\ 0)$ и условимся считать направление движения по окружности против часовой стрелки – положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

Рисунок 47

Пусть при повороте на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB, тогда величину угла AOB называют *углом поворота* (рисунок 47). Любой угол поворота α можно представить в виде $\alpha = 360° \cdot n + \varphi$, где $n \in Z$ и $0° \leq \varphi < 360°$. Если угол поворота получен при движении против часовой стрелки, то он считается положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. В зависимости от того, в какой координатной четверти находится радиус OB, угол поворота называют углом этой четверти. Углы 0°, ±90°, ±180°, ±270°, ±360° не относят ни к одной из четвертей.

Одна и та же точка B окружности может быть получена при совершении поворота на угол $\beta = \alpha + 360° \cdot n$, где $0° \le \alpha < 360°$, $n \in Z$. При прибавлении к углу α целого числа оборотов получается угол той же четверти, что и α. Например, угол в $-400°$ является углом четвертой четверти, так как $-400° = -40° + (-360°)$, угол в $870°$ является углом второй четверти, так как $870° = 150° + 360° \cdot 2$ (рисунок 48).

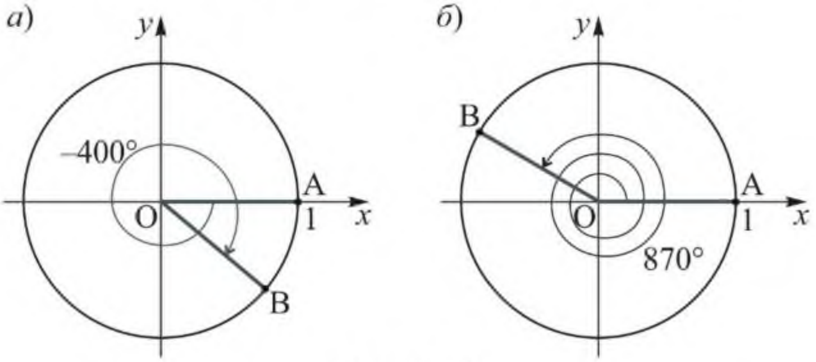


Рисунок 48

Таким образом, угол поворота – это не геометрическая фигура, а угловая величина, которая может принимать различные, как положительные, так и отрицательные, значения.

Градусная мера угла $\alpha \in [0°; 360°]$, как и дуги AB, измеряется величиной центрального угла AOB. Введем еще одну единицу измерения дуг и углов – радиан.

Углом в 1 радиан называют центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности (рисунок 49). Величина угла, выраженная в радианах, называется его *радианной мерой*. Аналогично определяется понятие *радианной меры дуги*. Слово «радиан» происходит от латинского «*radius*» – «луч».

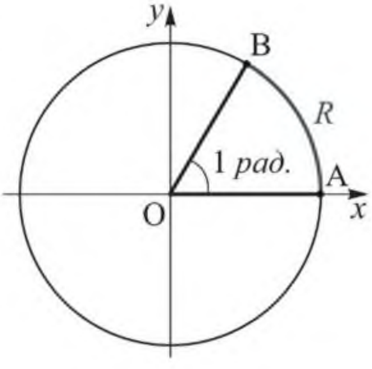


Рисунок 49

Суффикс «ан» обозначает «происхождение». Таким образом, буквальное значение термина радиан – образованный лучом. Такой угол получается вращением радиуса окружности вокруг ее центра.

Чтобы узнать, сколько радиан содержит полный угол 360°, длину окружности $2\pi R$ разделим на ее радиус R. Получим: $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ (радиан) (сокращенно рад.). Это число постоянное. Развернутый угол опирается на полуокружность, следовательно, его радианная мера равна π. Значит, радианная мера угла в $\mathbf{1^\circ} = \frac{\pi}{\mathbf{180}} \approx \frac{3{,}1416}{180} = 0{,}01745$ (рад.), тогда радианная мера угла в n° равна $\frac{\pi \cdot n}{\mathbf{180}}$,

$$\mathbf{1\ рад. = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ.}$$

Углы 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, например, имеют соответственно следующие радианные меры: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$. При записи радианной меры угла, выраженной через π, обозначение «рад.» обычно опускают. Например, пишут $72^\circ = 0{,}4\pi$.

Любой угол поворота β можно выразить в радианах так:

$\beta = \alpha + 2\pi n$, где $0 \le \alpha < 2\pi$, $n \in Z$.

Угол поворота в радианах может быть выражен любым действительным числом. На координатной окружности числу 0 ставится в соответствие начальная точка A, числу 1 – точка, обозначающая конец дуги в 1 радиан (рисунок 50, *а*), числу –1 – точка, соответствующая углу поворота в –1 радиан (рисунок 50, *б*) и так далее.

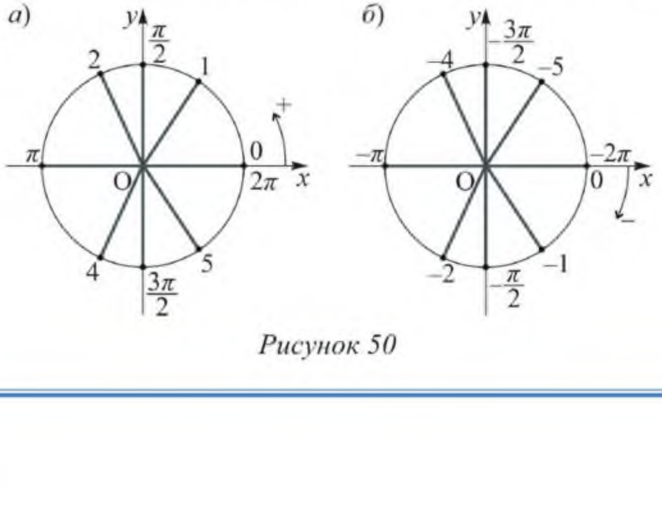


Рисунок 50

Произвольному действительному числу t ставится в соответствие точка, указывающая угол поворота в t радиан. Таким образом, каждому углу поворота, выраженному в радианах, можно поставить в соответствие единственную точку на координатной окружности. Но каждой точке единичной окружности соответствует множество углов поворота, которые выражаются формулой $\beta = \alpha + 2\pi n$, где $0 \le \alpha < 2\pi$, $n \in Z$.

Задача 1. Колесо делает 42 оборота в минуту. Какой угол опишет его спица OA (рисунок 51) через 6 секунд?

Решение. За 1 секунду колесо сделает $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$ оборота, а за 6 секунд $\frac{21}{5}$ оборота. Тогда спица OA опишет угол $\beta = \frac{360^\circ \cdot 21}{5} = 1512^\circ$, если колесо вращается против часовой стрелки или -1512°, если оно вращается по часовой стрелке.

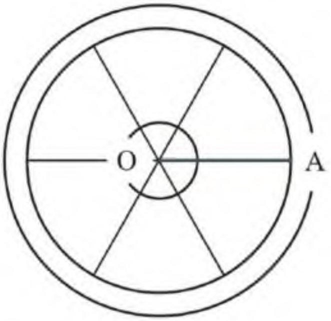


Рисунок 51

Ответ. 1512° или –1512°.

Пример 1. Выразить: а) в градусах 3,5 радиана; б) в радианах 210°.

Решение. Из условия, что π радиан равны 180°, составим и решим пропорцию:

$$\text{а) } \frac{\pi}{3{,}5} = \frac{180^\circ}{x},\ x = \frac{3{,}5 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx \frac{630^\circ}{3{,}14} \approx 201^\circ;$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{y} = \frac{180^\circ}{210^\circ},\ y = \frac{\pi \cdot 210^\circ}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}.$$

Ответ. а) $\approx 201^\circ$; б) $\frac{7\pi}{6}$.

Отметим, что радианная мера углов часто выражается через π, а при переходе к градусной мере число π заменяется его приближенным значением 3,14.

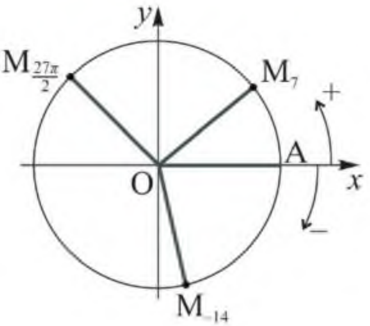


Рисунок 52

Пример 2. Отметить на единичной окружности точку M_β, если: а) $\beta = 7$; б) $\beta = -14$; в) $\beta = \frac{27\pi}{4}$.

Решение. Угол поворота задан в радианах, выразим его в градусах, получим:

а) $7 \approx 57° \cdot 7 = 399° = 360° + 39°$;

б) $-14 \approx 57° \cdot (-14) = -798° = -720° + (-78°)$;

в) $\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Точку M_7 можно получить, выполнив поворот начального радиуса OA против часовой стрелки на угол 360° и 39°. Точка M_{-14} будет получена в результате выполнения поворотов по часовой стрелке на 720° и 78°. Точку $M_{\frac{27\pi}{4}}$ отметим, совершив в положительном направлении три полных поворота и поворот на угол $\frac{3\pi}{4} = 135°$ (рисунок 52).

Задача 2. Начальный радиус OA при повороте на угол β переходит в радиус OB. Используя данные на рисунках 53, *а* и *б*, указать угол β.

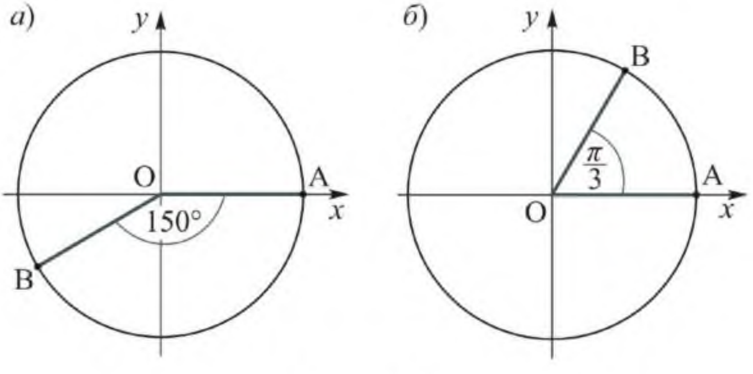


Рисунок 53

Решение. На рисунке а) $\beta = \angle AOB + 360° \cdot n$, где $n \in Z$. Если поворот совершен в положительном направлении, то $\angle AOB = 210°$, а если в отрицательном, то $\angle AOB = -150°$. Отсюда $\beta = 210° + 360° \cdot n$ или $\beta = -150° + 360° \cdot n$, где $n \in Z$.

На рисунке б) $\beta = \angle AOB + 2\pi n$, где $n \in Z$. Аналогично находим $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ или $\angle AOB = -\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3}$. Откуда $\beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $\beta = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Ответ. а) $\beta = 210° + 360° \cdot n$ или $\beta = -150° + 360° \cdot n$, где $n \in Z$;

б) $\beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $\beta = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

ВОПРОСЫ

1. Объясните, что принимается за угол поворота.
2. Что называется углом в 1 радиан?
3. Скольким радианам равен угол в 180°?
4. Чему равно приближенное значение 1 радиана в градусах?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

519. а) Спица колеса сделала $2\frac{1}{4}$ оборота по часовой стрелке. Какой угол описала спица колеса?

б) При отвинчивании гайки гаечный ключ повернули на $3\frac{1}{3}$ оборота против часовой стрелки. Выразите угол поворота в градусах.

520. а) В астрономии для определения положения небесных тел используется единица измерения углов – час, равная $\frac{1}{24}$ части окружности. Выразите угол в 1 час в градусах и радианах.

б) В некоторых морских компасах окружность разделена на румбы. Румб – $\frac{1}{32}$ часть окружности. Чему равен 1 румб в радианах и градусах?


Компас

521. Найдите радианную и градусную меры угла, смежного с углом, равным:

а) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6}$;

б) $\frac{3\pi}{5}$; г) $\frac{5\pi}{9}$.

522. В ΔABC $\angle C = \frac{\pi}{2}$. Найдите радианную и градусную меры угла B, если угол A равен:

а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{5}$; д) $\frac{2\pi}{9}$;

б) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{12}$.

523. Найдите градусную и радианную меры углов:

а) прямоугольного треугольника, острые углы которого относятся как 3 : 2;

б) равнобедренного треугольника, два угла которого относятся как 1 : 2;

в) равнобедренной трапеции, два угла которой относятся как 5 : 4.

524. Найдите радианную меру угла поворота, заданного в градусах:

а) 18°, 27°, 30°, 45°, 60°; в) 210°, 225°, 270°, 300°;

б) 90°, 120°, 135°, 150°; г) 1100°, 1440°, 3330°, 7380°.

525. Найдите градусную меру угла поворота, заданного в радианах:

а) $\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}$; в) $-\pi; \frac{\pi}{18}; -\frac{5}{6}\pi; \frac{\pi}{36}$;

б) $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{12}; \frac{4\pi}{9}; -3\pi$; г) 2; –3; 2,5; –15.

526. Установите, углом какой четверти является угол β, если

а) $\beta = -94°$; в) $\beta = 680°$; д) $\beta = 2900°$;

б) $\beta = 110°$; г) $\beta = -1040°$; е) $\beta = -3750°$.

527. Верно ли утверждение: а) если $180° < \beta < 270°$, то β – угол III четверти; б) если β – угол III четверти, то $180° < \beta < 270°$?

528. Отметьте на единичной окружности точку B_β, соответствующую углу поворота, равному: а) 315°; б) 930°; в) –1740°; г) –2025°.

529. Установите, углом какой четверти является угол поворота, равный:

а) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; д) $\frac{13\pi}{4}$;

б) $\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{5\pi}{3}$; е) $-\frac{19\pi}{6}$.

530. Отметьте на единичной окружности точку B_β и сравните с нулем ее координаты x_β и y_β, если радианная мера угла β равна:

а) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{5\pi}{6}$; г) $-\frac{\pi}{3}$.

531. Заполните таблицу и отметьте точки, соответствующие указанным углам на координатной окружности (радиуса 3 см):

0°		45°	60°	90°			150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$				$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		

532. Составьте таблицу соответствия градусной и радианной мер углов на 180° больших, чем углы, указанные в задаче 531, и отметьте соответствующие точки на координатной окружности.

533. Выразите в радианной мере больший угол треугольника, если его углы образуют: а) арифметическую прогрессию с разностью 20°; б) геометрическую прогрессию со знаменателем 1,5.

534. Укажите в радианах все углы, соответствующие точкам координатной окружности, изображенным на рисунке 54.

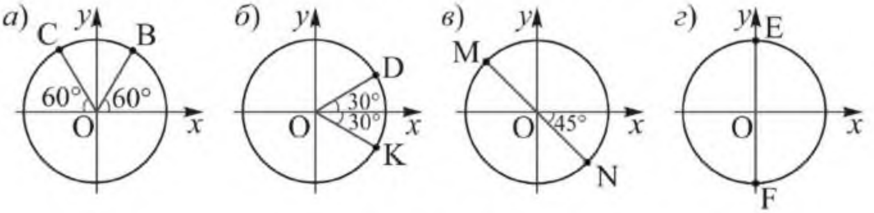


Рисунок 54

Уровень B

535. Отметьте на окружности точки A, B, C, D так, чтобы радианные меры дуг AB, BC и CD были соответственно равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Укажите величину дуги DA. Рассмотрите все возможные случаи расположения указанных точек.

536. Колесо вращается с угловой скоростью $\frac{\pi}{3}$ радиан в секунду. За сколько секунд оно сделает полный оборот?

537. Отметьте на единичной окружности точку B_β, соответствующую углу поворота, радианная мера которого равна:

а) 9;   в) –8;
б) 10;   г) –11.

538. Начальный радиус OA при повороте на угол β переходит в радиус OB. Чему равен β, если известно, что:

а) β – угол I четверти и $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$;

б) β – угол II четверти и $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$;

в) β – угол III четверти и $\angle AOB = \frac{3\pi}{4}$;

г) β – угол IV четверти и $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$?

Уровень C

539. Известно, что $\beta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$. Найдите такое значение n (если оно существует), при котором угол β равен:

а) $-\frac{5\pi}{3}$;   в) $-\frac{23\pi}{3}$;

б) $\frac{13\pi}{3}$;   г) $\frac{4\pi}{3}$.

540. Колесо, радиус которого 0,6 м, делает в минуту 240 оборотов. Найдите: а) его угловую скорость ω в радианах в секунду; б) линейную скорость (в метрах в секунду) точки, находящейся на окружности колеса. в) Докажите, что линейная скорость точки, отстоящей от центра на расстоянии r, равна ωr.

541. На координатной окружности отмечены точки A, B, C, D, соответствующие углам поворота, равным 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{3}$ соответственно (рисунок 55). Запишите двойное неравенство, которому удовлетворяют все углы β, соответствующие точкам меньшей из дуг: а) AB; б) DA; в) BC; г) CD.

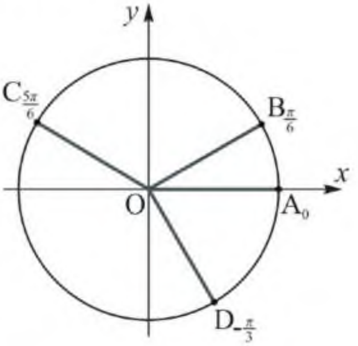


Рисунок 55

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Механические часы показывают ровно 3 часа. Какой угол между стрелками часов будет через сутки и полчаса?

2) Функция $y(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x > 0, \\ 0, \text{ при } x = 0, \\ -1, \text{при } x < 0 \end{cases}$ имеет в математике специальное обозначение: $y(x) = \operatorname{sign} x$ (читается «сигнум икс», по латыни *signum* – знак). При каких значениях x верно равенство $\sin x = \operatorname{sign} x$?

22. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла; взаимосвязь между координатами единичной окружности и синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом произвольного угла; знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла в координатных четвертях;
- уметь находить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла.

В курсе геометрии были определены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов от 0° до 180°. В тригонометрии эти понятия обобщаются для произвольных углов, выраженных как в градусах, так и в радианах.

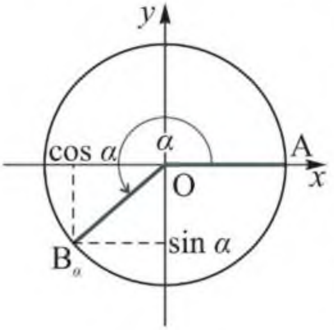


Рисунок 56

Синусом угла α называется ордината точки B_α единичной окружности, соответствующей этому углу.

Обозначается: sin α. По определению **$\sin\alpha = y$** (рисунок 56).

Косинусом угла α называется абсцисса точки B_α единичной окружности, соответствующей этому углу.

Обозначается: cos α. По определению **$\cos\alpha = x$** (рисунок 56).

Отметим, что $\sin\alpha = 0$ для углов $\alpha = \pi k$, где $k \in Z$;

$\cos\alpha = 0$, если $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, так как ординаты, равные нулю, имеют точки единичной окружности $B_0(1; 0)$ и $B_\pi(-1; 0)$, а абсциссы, равные нулю, имеют точки $B_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ и $B_{\frac{3\pi}{2}}(0; -1)$.

Тангенсом угла α называется число, равное отношению синуса α к косинусу α. Обозначается tg α. По определению **tg** $\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in Z$.

Котангенсом угла α называется число, равное отношению косинуса α к синусу α. Обозначается ctg α. По определению **ctg** $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha \neq \pi k}$, $k \in Z$. Так как $\sin\alpha = y$, а $\cos\alpha = x$, где x, y – координаты точки B_α единичной окружности, то

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}},\ \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}.$$

Дадим наглядное представление о тангенсе и котангенсе угла. Значение тангенса угла можно отметить на прямой, проходящей через точку $A(1;\,0)$ и параллельной оси ординат (рисунок 57).

Действительно, из подобия треугольников OAM и OCB_α следует, что $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{CB_\alpha}{CO}$, то есть $\dfrac{AM}{1} = \dfrac{y}{x}$. Отсюда $AM = \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, тангенс угла равен ординате точки пересечения прямой OM с прямой $x = 1$. Эту прямую называют *линией тангенсов*.

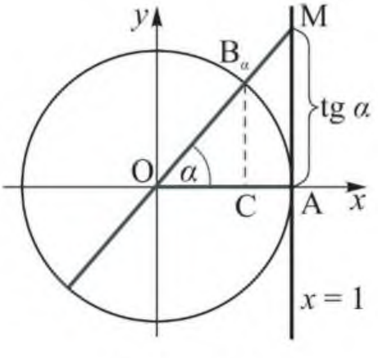


Рисунок 57

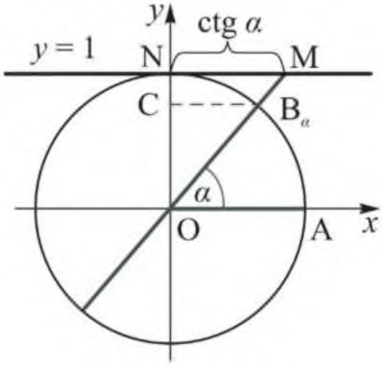


Рисунок 58

Аналогично можно показать, что котангенс угла равен абсциссе точки пересечения прямой OM с прямой $y = 1$, которую называют *линией котангенсов*. Сделайте это самостоятельно, используя рисунок 58.

В координатных четвертях синус, косинус, тангенс и котангенс угла принимают положительные или отрицательные значения. Это показано на рисунке 59. Используя определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла, объясните, почему они имеют такие знаки.

Знаки синуса

Знаки косинуса

Знаки тангенса и котангенса

Рисунок 59

Так как всем углам вида $\beta = \alpha + 360^\circ \cdot n$, где $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$, $n \in Z$ на единичной окружности соответствует одна и та же точка, то

$$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha,\ \cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \cos \alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{tg} \alpha,\ \operatorname{ctg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Пример 1. Даны углы поворота: -3460°, 1270°, $-\frac{19\pi}{9}$, $\frac{115\pi}{8}$. Расположить в порядке возрастания значения: а) синусов; б) косинусов; в) тангенсов; г) котангенсов этих углов.

Решение. Отметим на координатной окружности точки, соответствующие данным углам, и сравним их: а) ординаты; б) абсциссы (рисунок 60). Для этого представим данные углы в виде $360^\circ \cdot n + \alpha$ или $2\pi \cdot n + \alpha$, где $n \in Z$: $-3460^\circ = -360^\circ \cdot 9 + (-220^\circ)$, $1270^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 190^\circ$, $-\frac{19\pi}{9} = -2\pi + \left(-\frac{\pi}{9}\right)$, $\frac{115\pi}{8} = \frac{112\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = 2\pi \cdot 7 + \frac{3\pi}{8}$.

Для сравнения значений тангенсов и котангенсов данных углов отметим их на линии тангенсов и котангенсов (рисунок 61).

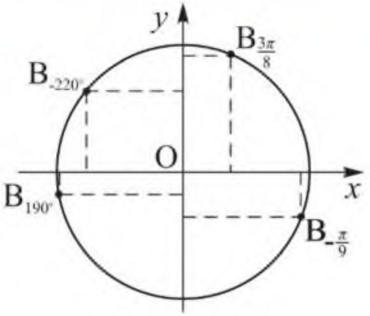


Рисунок 60

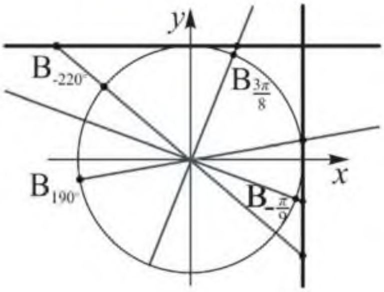


Рисунок 61

Ответ. а) $\sin\left(-\frac{19\pi}{9}\right) < \sin 1270° < \sin(-3460°) < \sin\frac{115\pi}{8}$;

б) $\cos 1270° < \cos(-3460°) < \cos\frac{115\pi}{8} < \cos\left(-\frac{19\pi}{9}\right)$;

в) $\mathrm{tg}(-3460°) < \mathrm{tg}\left(-\frac{19\pi}{9}\right) < \mathrm{tg}\, 1270° < \mathrm{tg}\frac{115\pi}{8}$;

г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{19\pi}{9}\right) < \mathrm{ctg}(-3460°) < \mathrm{ctg}\left(\frac{115\pi}{8}\right) < \mathrm{ctg}\, 1270°$.

Пример 2. Доказать, что:

а) $\mathbf{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha}$;

б) $\mathbf{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$;

в) $\mathbf{\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha}$;

г) $\mathbf{\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha}$.

Доказательство. При любом значении α точки B_α и $B_{-\alpha}$ единичной окружности симметричны относительно оси Ox, значит, их ординаты – противоположны, а абсциссы равны (рисунок 62). Следовательно, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

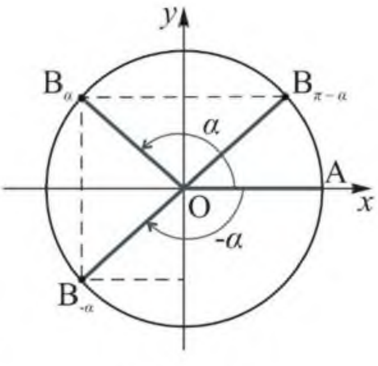


Рисунок 62

Точки $B_{-\alpha}$ и $B_{\pi-\alpha}$ симметричны относительно начала координат, значит, их координаты являются противоположными числами. Следовательно, $\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$.

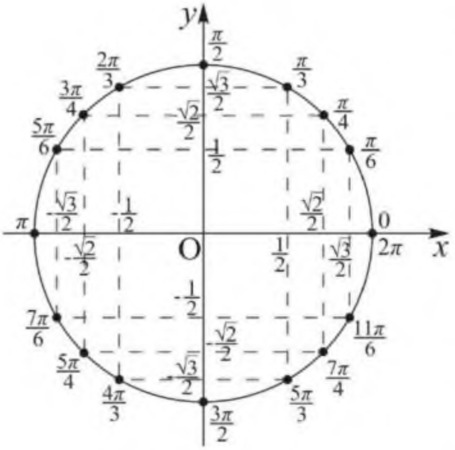


Рисунок 63

Используя известные значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов α, равных 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, и доказанные тождества, можно найти значения тригонометрических функций углов $-\alpha$, $\pi - \alpha$ и $\beta = \alpha + 2\pi n$, где $0 \le \alpha < 2\pi, n \in Z$. Например, $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рисунок 63).

Пример 3. Вычислить: а) $6\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $4\cos\frac{4\pi}{3} + 8\sin\frac{3\pi}{2}$; в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. а) $6\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -6\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$;

б) $4\cos\frac{4\pi}{3} + 8\sin\frac{3\pi}{2} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 8 \cdot (-1) = -10$;

в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} + \mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}\frac{7\pi}{4} + \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} - \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2} = -(-1) + 1 - 0 = 2$.

Пример 4. Доказать тождество $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}$.

Доказательство. Докажем, что правая часть этого равенства равна его левой части: $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha - 1} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1\right) : \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} : \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$. Тождество доказано.

Пример 5. Найти значение выражения $\frac{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}{3{,}5\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, если: а) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha \neq 0$, получим $\frac{3 + 2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{3{,}5 - 3\cdot\operatorname{tg}\alpha}$. Если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, то значение выражения равно: $\frac{3 + 2\cdot 0{,}5}{3{,}5 - 3\cdot 0{,}5} = 2$.

При $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ значение данного выражения равно: $\frac{3 + 2\cdot(-1)}{3{,}5 - 3\cdot(-1)} = \frac{1}{6{,}5} = \frac{2}{13}$.

Ответ. а) 2; б) $\frac{2}{13}$.

Пример 6. Отметить на координатной окружности множество точек B_α и записать все значения α, удовлетворяющие условию $\sin\alpha \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Данному условию удовлетворяют все точки дуги BC (рисунок 64). При этом угол α изменяется от $-\frac{2\pi}{3}$ до $-\frac{\pi}{3}$. Учитывая, что эти точки будут повторяться через $2\pi n$, все значения α, удовлетворяющие данному условию, можно записать так: $\alpha \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$. Например, при $n = 1$ получим промежуток $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, при $n = 2$ промежуток $\left[\frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$, при $n = -1$ промежуток $\left[-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}\right]$. Таких промежутков бесконечно много. Выбрав промежуток $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$, записанный меньшими по модулю числами, все их можно объединить и записать так: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$.

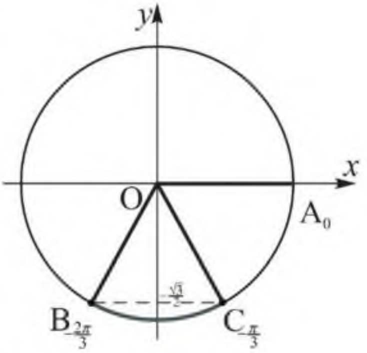


Рисунок 64

ВОПРОСЫ

1. Дайте определение: синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла.

2. Какие значения (положительные или отрицательные) принимают синус, косинус, тангенс и котангенс угла в координатных четвертях?

3. Для каких углов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса равны нулю?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

542. Может ли синус или косинус какого-либо угла быть равным:

а) –0,6; в) 2; д) –1,25;

б) 1; г) π; е) 0,2?

543. Может ли при некотором значении α быть верным равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\sin\alpha = 1 - \sqrt{2}$;

б) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$; г) $\cos\alpha = \sqrt{3} - 2$?

544. Может ли значение тангенса или котангенса какого-либо угла быть: а) больше 10; б) меньше –5?

545. Постройте координатную окружность, взяв единичный отрезок, равный 2,5 см, отметьте на ней точки B_α, соответствующие углам поворота α. Найдите приближенные значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если α равна: а) 50°; б) 155°; в) –35°; г) –170°.

546. Может ли синус отрицательного угла быть положительным? Если может, приведите пример.

547. Постройте на координатной окружности точки, соответствующие углу α, если:

а) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$;

б) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$.

548. Найдите значение выражения:

а) $2\cos 60° - \sqrt{3}\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 45°$;

б) $6\sin 60° - 2\sqrt{3}\operatorname{ctg} 60° \cdot \cos 30°$;

в) $4\sin 45° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 30° - \cos 45°$;

г) $\operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{ctg} 30° - \cos 180° + \sin 90°$.

549. Используя рисунок 63, найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ угла α, равного:

а) –30°; в) –60°; д) 225°;

б) –45°; г) 210°; е) 240°.

550. Заполните таблицу:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$										
$\cos\alpha$										
$\operatorname{tg}\alpha$										
$\operatorname{ctg}\alpha$										

551. Вычислите:

а) $\cos\frac{\pi}{6} + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\pi$;

б) $2\sin\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $2\sin\frac{\pi}{4} - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 4\sin 2\pi - 2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $4\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\pi + 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

552. Как меняется значение $\sin\alpha$, если α изменяется:

а) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; б) от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$?

553. Как меняется значение $\cos\alpha$, если α изменяется:

а) от 0 до π; б) от $-\pi$ до 0?

554. Какой знак имеет значение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если угол α равен:

а) 25°, –260°, 325°, –1120°; в) –83°, 198°, –295°, 1540°;

б) $-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{18}$, $-\frac{11\pi}{9}$, $\frac{81\pi}{20}$; г) $\frac{\pi}{15}$, $-\frac{17\pi}{14}$, $\frac{40\pi}{21}$, $-\frac{37\pi}{30}$?

555. Исследуйте, в какой четверти оканчивается угол α, если:

а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$; д) $\sin\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha > 0$;
б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$; г) $\text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha < 0$; е) $\sin\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha < 0$.

556. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\sin 121° \cdot \sin 153°$; в) $\cos 310° \cdot \sin 115°$; д) $\cos 300° \cdot \text{ctg}\,130°$;
б) $\cos 260° \cdot \cos 315°$; г) $\text{tg}\,115° \cdot \sin 172°$; е) $\text{tg}\,78° \cdot \text{ctg}\,190°$.

557. Определите знак произведения:

а) $\text{tg}\,2 \cdot \text{tg}\,3$; в) $\sin 3 \cdot \text{ctg}\,4$;
б) $\sin 4 \cdot \cos 5$; г) $\cos 2 \cdot \sin 3 \cdot \text{tg}\,4$.

558. Определите знак выражения, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

а) $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; г) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

559. Не выполняя вычислений, установите знак разности:

а) $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}$; в) $\text{tg}\frac{\pi}{3} - \text{tg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$; г) $\text{ctg}\frac{\pi}{3} - \text{ctg}\frac{\pi}{6}$.

560. Сравните тангенсы и котангенсы углов:

а) 15°, 375°, 735°; в) 100°, 120°, 140°.
б) 20°, 400°, 780°;

561. Расположите в порядке убывания:

а) $\sin 3\pi$, $\cos 5\pi$, $\cos 6\pi$; в) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\text{ctg}\frac{3\pi}{2}$, $\cos\pi$;

б) $\cos\frac{15\pi}{2}$, $\cos 17\pi$, $\sin\frac{33\pi}{2}$; г) $\text{tg}\,21\pi$, $\sin\frac{43\pi}{2}$, $\cos 100\pi$.

562. Расположите в порядке возрастания значения:

а) синусов; в) тангенсов;
б) косинусов; г) котангенсов углов $-\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{9}$.

563. Сравните:

а) $\sin 1°$ и $\sin 1$; в) $\text{tg}\,1°$ и $\text{tg}\,1$;
б) $\cos 1°$ и $\cos 1$; г) $\text{ctg}\,1°$ и $\text{ctg}\,1$.

564. Укажите три значения радианной меры угла α, при которых $\sin\alpha$ равен: а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1; г) 0.

565. Укажите три значения градусной меры угла α, при которых $\cos\alpha$ равен: а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) –1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

566. Укажите три значения градусной меры угла α, при которых $\operatorname{tg}\alpha$ равен: а) 1; б) –1; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

567. Укажите три значения радианной меры угла α, при которых $\operatorname{ctg}\alpha$ равен: а) 0; б) $\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{3}$; г) –1.

568. На рисунке 65 на единичной окружности выделена дуга, все точки которой удовлетворяют условию: а) $\sin\alpha \le \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Запишите все значения α, для которых выполняется указанное условие.

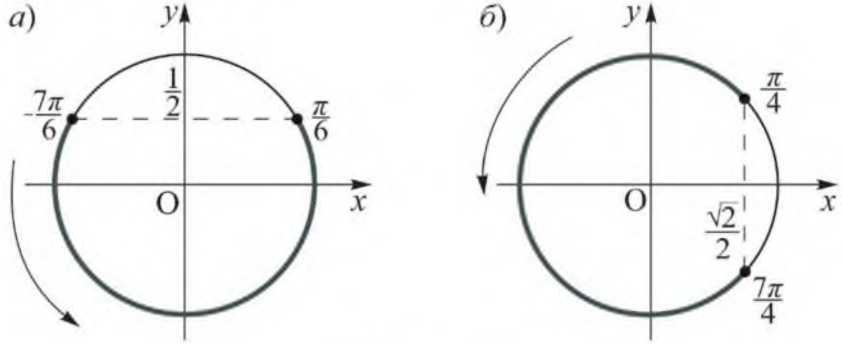


Рисунок 65

569. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;
б) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
в) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

570. Верно ли, что:

а) $\operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\alpha = -1$;
б) $\operatorname{tg}(-\alpha) - \operatorname{tg}\alpha = 0$;
в) $\operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha = 0$;
г) $\operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha) = 1$?

571. Упростите выражение:

а) $\sin\alpha + \sin(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$; в) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha)$;

б) $\cos\alpha - \cos(-\alpha) - \sin(\pi - \alpha)$; г) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha)$.

572. Упростите выражение:

а) $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

573. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \sin^2\alpha - \sin\alpha$;

б) $(\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(-\alpha))^2 - \operatorname{tg}^2(-\alpha) - \operatorname{ctg}^2(\pi - \alpha) = 2$.

574. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

б) $2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin 2\pi$;

в) $4\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\frac{3\pi}{2}$;

г) $\sin\frac{\pi}{6} - \cos(-6\pi) - 0{,}5\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

575. Вычислите:

а) $\cos\pi + \operatorname{tg}^2\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $1{,}5\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 0{,}5\operatorname{ctg}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $3\operatorname{ctg}\left(5\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $0{,}5\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{tg} 7\pi + 2\sin^2\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right)$.

576. Найдите значение выражения $\frac{3\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha}$, если:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$; б) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

577. Найдите сумму синусов углов прямоугольного треугольника, если эти углы образуют арифметическую прогрессию.

Уровень В

578. Исследуйте, углом какой четверти является угол поворота α, если:

а) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$; в) $\sin\alpha = \cos\alpha$;

б) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$; г) $|\operatorname{tg}\alpha| + \operatorname{tg}\alpha = 0$.

579. Положительным или отрицательным является значение выражения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$; в) $\operatorname{tg}(\pi + 1)$; д) $\sin 1 \cdot \cos 2$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right)$; е) $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 4$?

580. Установите знак разности:

а) $\cos 2 - \sin 1$; в) $\cos\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{7\pi}{12}$;

б) $\operatorname{tg} 4 - \operatorname{ctg} 5$; г) $\sin\frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{16\pi}{9}$.

581. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения:

а) $2\cos\alpha$; в) $3 + \cos\alpha$; д) $\sin^2\alpha + 1$;

б) $\sin\alpha - 1$; г) $4 - 2\sin\alpha$; е) $-5\cos\alpha + 2$.

582. Какие значения β удовлетворяют равенству $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если:

а) $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le 0$; б) $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2} \le \beta \le \frac{5\pi}{2}$?

583. Исследуйте, какие значения β удовлетворяют равенству $\sin\beta = -\frac{1}{2}$, если: а) $\pi \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{3\pi}{2} \le \beta \le 2\pi$; в) $-\pi \le \beta \le 0$.

584. Отметьте на координатной окружности множество точек B_α и запишите все значения α, удовлетворяющие условию:

а) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin\alpha \le -\frac{1}{2}$;

б) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; г) $\cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

585. На рисунке 66 на единичной окружности выделены дуги, все точки которых удовлетворяют условию: а) $\operatorname{tg} \alpha \leq 1$; б) $\operatorname{ctg} \alpha \leq \sqrt{3}$. Запишите все значения α, для которых выполняется указанное условие.

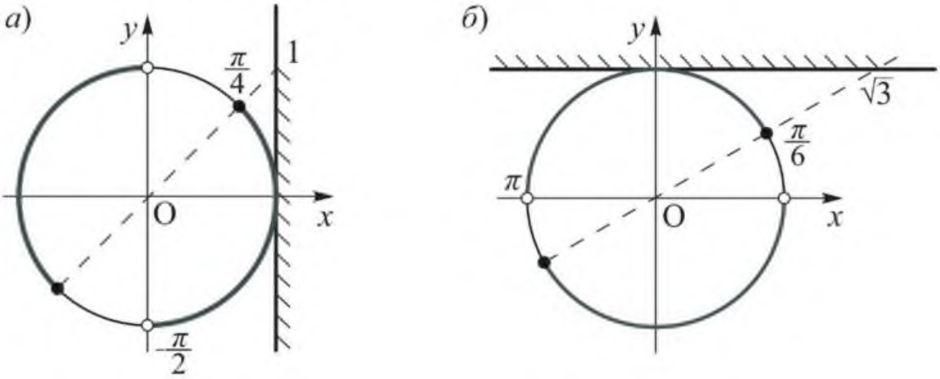


Рисунок 66

586. Докажите тождество $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

587. Упростите выражение:

а) $1 + \cos\alpha - \frac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$; б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

588. Докажите, что верно неравенство $\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} \geq 2$ для любого $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

589. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^3\frac{\pi}{3} + \ldots$;

б) $1 - \sin\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} - \sin^3\frac{\pi}{4} + \ldots$;

в) $1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6} + \ldots$;

г) $1 - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{3} + \ldots$.

Уровень С

590. Докажите, что для всех $\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$, верно равенство $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$.

591. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения, если они существуют:

а) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\operatorname{ctg}(-\alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \cos(-\alpha)$;

в) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \sin^2(-\alpha)$;

г) $\cos^2\alpha - \operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)$.

592. При каких значениях α не имеет смысла выражение:

а) $\frac{1}{\sin(-\alpha)}$;

б) $\frac{5}{\cos(-\alpha)}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$?

593. Докажите, что для любого действительного числа x верно неравенство:

а) $\sin^2 x - 5\sin x + 4 \geq 0$;

б) $\cos^4 x - 6\cos^2 x + 5 \geq 0$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Упростите выражение

$$\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right),$$

где α – острый угол.

23. Тригонометрические функции и их свойства

Учебные достижения по изучению темы:

- знать определения тригонометрических функций и их свойства;
- уметь находить значения тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ и использовать их свойства при решении задач.

В курсе геометрии рассматривались тригонометрические функции углов от 0° до 180°. Теперь, зная радианное измерение углов, можно рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Например, синус числа x – это синус угла в x радиан. Числовые функции, заданные формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, называют *основными тригонометрическими функциями*. Кратко их называют функции: синус, косинус, тангенс, котангенс.

Тригонометрические функции выделяются среди других тем, что их значения повторяются через $2\pi n$, где $n \in Z$. Такие функции называются *периодическими*.

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что при любом x из области ее определения числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и верно равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется периодом функции. Наименьший положительный период T_0 функции называют ее основным периодом, число mT_0, где $m \in Z$, также является периодом этой функции.

В предыдущем пункте свойства тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ рассматривались на примерах. Представим свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ в таблице.

	Свойства функции	$y = \sin x$	$y = \cos x$
1.	Область определения	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
2.	Множество значений	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$

3.	Четность, нечетность	$\sin(-x) = -\sin x$ нечетная	$\cos(-x) = \cos x$ четная
4.	Периодичность	$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ $n\in Z.\ T_o = 2\pi$	$\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ $n\in Z.\ T_o = 2\pi$
5.	Нули функции	$\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n\in Z$	$\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$
6.	Промежуток знакопостоянства	$\sin x > 0$ $x\in(0;\ \pi)$	$\cos x > 0$ $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$
		$\sin x < 0$ $x\in(-\pi;\ 0)$	$\cos x < 0$ $x\in\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$
7.	Промежуток возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[-\pi;\ 0]$
	Промежуток убывания	$\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$	$[0;\ \pi]$

Рассмотрите все эти свойства на единичной окружности.

Пример 1. Доказать, что наименьший положительный период функции $y = \sin x$ равен 2π.

Доказательство. Пусть T – произвольный положительный период функции $y = \sin x$. Тогда $\sin(x + T) = \sin x$ при любом $x\in R$.

Если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Так как $\sin x = 1$ лишь при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n\in Z$, то $T = 2\pi n$. Наименьшее положительное значение $2\pi n$ равно 2π.

Пример 2. Доказать, что число $T = -3\pi$ является периодом функции $y = \cos 2x$.

Доказательство.

1) Так как область определения данной функции – любое действительное число, то числа $x - 3\pi$ и $x + 3\pi$ принадлежат ей.

2) Учитывая, что период функции косинус равен $2\pi n$, получим $\cos(2(x - 3\pi)) = \cos(2x - 2\pi \cdot 3) = \cos 2x$.

Следовательно, число $T = -3\pi$ является периодом функции $y = \cos 2x$.

Пример 3. Указать промежутки возрастания и убывания функции $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Решение. Так как функция синус возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то запишем $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$. Умножив все части двойного неравенства на 2, получим $-\pi \leq x \leq \pi$. Следовательно, функция $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ возрастает на промежутке $[-\pi; \pi]$.

Аналогично найдем промежуток убывания функции $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$: $\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\pi \leq x \leq 3\pi$. Таким образом, функция $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ убывает на промежутке $[\pi; 3\pi]$.

Ответ. Функция $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ возрастает при $x \in [-\pi; \pi]$, убывает при $x \in [\pi; 3\pi]$.

Пример 4. Построить график функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Заполним таблицу значений функции $y = \sin x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рисунок 67).

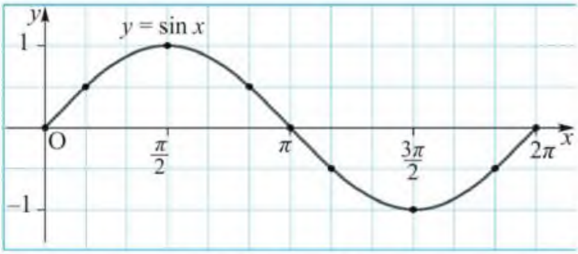


Рисунок 67

Мы построили график функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$. Повторяя эту линию на каждом следующем промежутке длиной 2π, вправо и влево от данного, получим график функции $y = \sin x$, называемый *синусоидой*.

Аналогично можно построить график функции $y = \cos x$ (сделайте это самостоятельно).

Рассмотрим основные свойства тригонометрических функций $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.

	Свойства функции	$y = \mathbf{tg}\, x$	$y = \mathbf{ctg}\, x$
1.	Область определения	$x \in R$, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$	$x \in R$, кроме чисел вида πn, где $n \in Z$
2.	Множество значений	$y \in (-\infty; +\infty)$	$y \in (-\infty; +\infty)$
3.	Четность, нечетность	$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ нечетная	$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ нечетная
4.	Периодичность	$\mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}\, x$ $n \in Z.\ T_o = \pi$	$\mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}\, x$ $n \in Z.\ T_o = \pi$
5.	Нули функции	$\mathrm{tg}\, x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in Z$	$\mathrm{ctg}\, x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
6.	Промежуток знакопостоянства	$\mathrm{tg}\, x > 0$ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,	$\mathrm{ctg}\, x > 0$ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$,
		$\mathrm{tg}\, x < 0$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\mathrm{ctg}\, x < 0$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
7.	Промежуток возрастания	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	—
	Промежуток убывания	—	$(0; \pi)$

Указанные свойства функций $y = \text{tg } x$, $y = \text{ctg } x$ применялись в предыдущих пунктах при решении примеров. Рассмотрите все эти свойства на единичной окружности.

Пример 5. Доказать, что наименьший положительный период функции $y = \text{tg } x$ равен π.

Доказательство. Пусть T – произвольный положительный период функции $y = \text{tg } x$. Тогда $\text{tg}(0 + T) = \text{tg } 0 = 0$. Так как на промежутке $(0; \pi)$ функция $y = \text{tg } x$ не имеет нулей, то $T \geq \pi$. Если $T = \pi$, то $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$. Следовательно, π – наименьший положительный период функции $y = \text{tg } x$.

Пример 6. Найти наименьший положительный период функции $y = \text{ctg } \frac{x}{5}$.

Решение. Найдем область определения данной функции: $\frac{x}{5} \neq \pi n$, $x \neq 5\pi n$, где $n \in Z$. Пусть T_o – наименьший положительный период данной функции, тогда верно равенство $\text{ctg}\frac{x}{5} = \text{ctg}\frac{x + T_o}{5}$, то есть $\text{ctg}\frac{x}{5} = \text{ctg}\left(\frac{x}{5} + \frac{T_o}{5}\right)$. Так как наименьший положительный период котангенса равен π, то получим $\frac{T_o}{5} = \pi$, $T_o = 5\pi$. Остается отметить, что если $x \neq 5\pi n$, где $n \in Z$, то и $x + T_o \neq 5\pi(n + 1)$, и $x - T_o \neq 5\pi(n - 1)$. Это означает, что числа $x + T_o$ и $x - T_o$ принадлежат области определения функции $y = \text{ctg}\frac{x}{5}$.

Ответ. 5π.

Пример 7. Построить график функции $y = \text{tg } x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Заполним таблицу приближенных значений функции $y = \text{tg } x$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{tg } x$	–	–1,7	–1	–0,6	0	0,6	1	1,7	–

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рисунок 68).

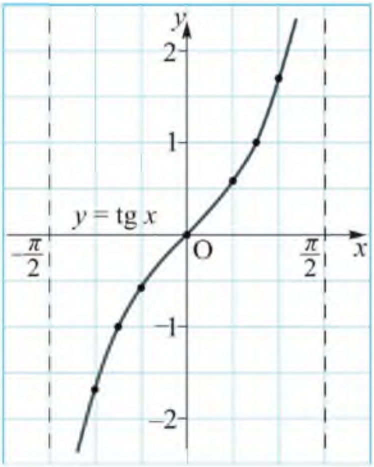


Рисунок 68

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не определена, то ее график не пересекает прямые $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Мы построили график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Повторяя эту линию на каждом следующем промежутке длиной π, вправо и влево от данного, получим график функции $y = \operatorname{tg} x$, называемый *тангенсоидой*. Построенная линия называется *ветвью тангенсоиды*. Тангенсоида состоит из бесконечного множества одинаковых ветвей.

ВОПРОСЫ

1. Перечислите основные свойства функции: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$

2. Докажите, что наименьший положительный период функции: а) $y = \cos x$ равен 2π; б) $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

594. Какие из чисел $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 15π, 20π, 142π являются периодами функции: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$?

595. Найдите область определения функции:

а) $y = \sin 2x$; в) $y = \cos x^2$;

б) $y = \cos\frac{1}{2}x$; г) $y = \sin\frac{1}{x}$.

596. Какие из чисел 0,9; –1; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{3}{\pi}$ могут быть значениями функций $y = \sin x$, $y = \cos x$?

597. Найдите область значений функции:

а) $y = \sin\frac{1}{2}x$; в) $y = 2\sin x$;

б) $y = -\cos x$; г) $y = \cos x + 2$.

598. Установите, четной или нечетной является функция:

а) $y = \sin 3x$; в) $y = \sin^2 x$;

б) $y = \cos x + 1$; г) $y = -2\cos x$.

599. Используя периодичность тригонометрических функций, запишите значение функции так, чтобы аргумент был выражен наименьшим положительным числом:

а) $\sin\frac{41\pi}{7}$; в) $\sin\left(-\frac{27\pi}{8}\right)$;

б) $\cos\frac{23\pi}{8}$; г) $\cos\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$.

600. Вычислите:

а) $\cos 15\pi$; в) $\cos\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$;

б) $\sin\frac{25\pi}{2}$; г) $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$.

601. Установите, является ли число 5π периодом функции:

а) $y = \cos 2x$; б) $y = \sin\frac{2}{5}x$.

602. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \cos\frac{x}{2}$; в) $y = \cos 4x$;

б) $y = \sin 2x$; г) $y = \sin 3x$.

603. На каждом из рисунков 69 изображена часть графика некоторой периодической функции с периодом T. Постройте график этой функции на промежутке $[-T; 2T]$.

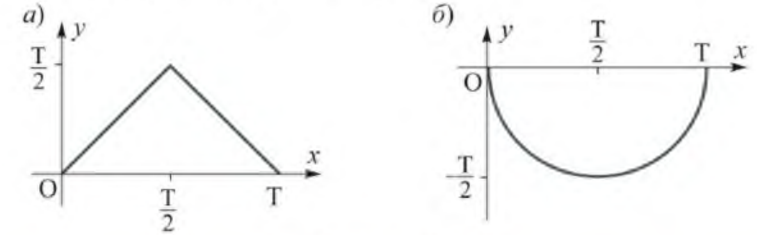


Рисунок 69

604. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sin x = 1$; в) $\sin x = -1$; д) $\cos x = 1$; ж) $\cos x = -1$;

б) $\sin x = 0$; г) $\sin x = \frac{\pi}{2}$; е) $\cos x = 0$; з) $\cos x = -\pi$?

605. Найдите нули функции:

а) $y = \sin 3x$; в) $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$; д) $y = \sin(x-2)$;

б) $y = \cos 2x$; г) $y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$; е) $y = \cos(4-x)$.

606. Укажите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = \sin 2x$; в) $y = \sin \pi x$;

б) $y = \cos 3x$; г) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

607. Укажите область определения, множество значений и нули функции:

а) $y = 3\sin x$; в) $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$; д) $y = |\sin x|$;

б) $y = \cos\frac{1}{2}x$; г) $y = -\frac{1}{3}\cos x$; е) $y = |\cos x|$.

608. Исследуйте, при каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\frac{1}{\sin x + 1}$; в) $\sqrt{\sin x}$;

б) $\frac{1}{\cos x - 1}$; г) $\sqrt{1 + \cos x}$.

609. Диагональ прямоугольника равна 1 дм, а угол между его диагоналями β. Исследуйте, при каком значении β площадь этого прямоугольника будет наибольшей.

610. Найдите область определения функции:

а) $y = \operatorname{tg} x - 2$; в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x\right)$;

б) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

611. Найдите множество значений функции:

а) $y = |\operatorname{tg} x|$; в) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

б) $y = \operatorname{ctg}^2 x$; г) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

612. Установите, четной или нечетной является функция:

а) $y = x \cdot \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$;

б) $y = 2\sin x - \operatorname{ctg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x$.

613. Используя периодичность тригонометрических функций, запишите значение функции так, чтобы аргумент был выражен наименьшим положительным числом:

а) $\operatorname{tg}\frac{39\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{58\pi}{5}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{73\pi}{4}\right)$.

614. Используя периодичность и нечетность функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, вычислите их значения при x, равном:

а) $-\frac{5\pi}{4}$; в) $-\frac{22\pi}{3}$;

б) $\frac{23\pi}{6}$; г) $-\frac{23\pi}{4}$.

615. Зная, что $\operatorname{tg} \beta = a$, где $a \neq 0$, найдите значение выражения:

а) $1 - \operatorname{tg}(2\pi - \beta)$; в) $a - \operatorname{tg}(-\beta - 3\pi)$;

б) $\operatorname{ctg}(-\beta) + a$; г) $\frac{1}{a} - \operatorname{ctg}(\beta - 2\pi)$.

616. Найдите нули функции:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = \operatorname{ctg}(\pi - 2x)$.

617. При каких значениях x не имеет смысла выражение:

а) $\frac{\pi}{\operatorname{tg}(\pi - x)}$; в) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\frac{2\pi}{\operatorname{ctg}(-x - 2\pi)}$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$?

618. Установите, каким должно быть число b, чтобы выполнялось равенство:

а) $\sin x = \frac{b}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = \frac{5}{\sqrt{b}}$;

б) $\cos x = \frac{\pi}{b}$; г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{b^2 - 25}$.

Уровень В

619. Исследуйте, как изменяется площадь треугольника с двумя данными сторонами при возрастании от 0 до π угла между ними. Существует ли значение площади треугольника: а) наибольшее; б) наименьшее?

620. Исследуйте и установите, для каких значений из промежутка $[0; \pi]$:

а) $\sqrt{1-\cos x}-\sqrt{1+\cos x}>0$;

б) $\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}<0$.

621. Установите, каким должно быть число a, чтобы выполнялось равенство:

а) $\sin x=\frac{4a-3}{2-a}$; в) $\sin x=\frac{a^2-3a+2}{a^2-1}$;

б) $\cos x=\frac{3a+2}{3-a}$; г) $\cos x=\frac{a^2-4}{a^2+a-2}$.

622. Докажите, что число $-\frac{3\pi}{2}$ является периодом функции:

а) $y=\operatorname{tg}2x$; б) $y=\operatorname{ctg}4x$.

623. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y=\operatorname{tg}4x$;

б) $y=\operatorname{ctg}2x$; г) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

624. На рисунке 70 изображена часть графика функции $y = \cos x$. Учитывая, что эта функция четная, постройте ее график на промежутке $[-\pi; \pi]$.

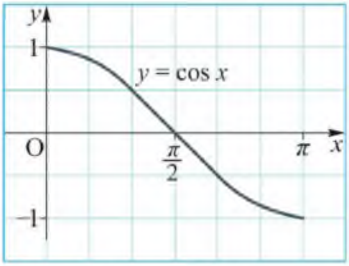


Рисунок 70

625. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{\cos x+1}{\sin x-1}$; б) $y=\frac{3\sin x}{\sqrt{2}\cos x-1}$.

626. Используя свойства функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, найдите значения x, удовлетворяющие условию:

а) $\sin \frac{2x}{3} \geq 0$;   в) $\sin 3x < 0$;

б) $\cos \frac{x}{6} < 0$;   г) $\cos 2x \geq 0$.

Уровень С

627. Установите, при каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\sin x}$;   в) $\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$.

б) $\sqrt{1 + \cos x}$;

628. Используя свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, докажите, что:

а) $\sin 136° \cdot \sin 137° \cdot \sin 138° > \frac{1}{3}$;

б) $\cos 55° \cdot \cos 57° \cdot \cos 59° > \frac{1}{9}$.

629. Докажите, что не может принимать отрицательные значения выражение: а) $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$; б) $\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\cos x - \operatorname{ctg} x}$.

630. Установите, возможно ли равенство:

а) $\sin \alpha + 3\cos \alpha = 5$;

б) $4\cos \alpha - 3\sin \alpha = 7$.

631. Докажите, что:

а) $\sin^n x \leq \sin x$, если $x \in [0; \pi]$, $n \in N$;

б) $\cos^n x \leq \cos x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in N$.

24. Основные тригонометрические тождества

Учебные достижения по изучению темы:

- знать основные тригонометрические тождества;
- доказывать основные тригонометрические тождества;
- применять их для нахождения значений тригонометрических функций по известному значению одной из них; в тождественных преобразованиях тригонометрических выражений и решении задач.

Основные тригонометрические тождества:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **2)** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; **3)** $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; **5)** $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; **6)** $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

вы знаете из курса геометрии 8 класса. Они выполняются не только для углов от 0° до 180°, но и для произвольных углов, выраженных в градусной или радианной мерах, при которых выражения, входящие в эти тождества, имеют смысл.

Три первых тождества являются независимыми, то есть ни одно из них не может быть получено с использованием другого. Так, второе и третье тождества следуют из определения понятий тангенса и котангенса углов. Первое тождество легко доказать, используя определения синуса и косинуса углов и уравнение координатной окружности $x^2 + y^2 = 1$. Поскольку $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, то $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Четвертое тождество получается из второго и третьего умножением их левых и правых частей. Пятое и шестое тождества следуют из первого делением его левой и правой частей соответственно на $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$.

По этим формулам можно находить значения тригонометрических функций по известному значению одной из них.

Пример 1. Найти $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Для любых $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ значение синуса отрицательно. Тогда из тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следует, что $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6$.

Зная синус и косинус α, находим его тангенс: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$. Тогда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{4}{3}$.

Ответ. $\sin\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

Решение. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{8}{15}$. Так как α – угол III четверти, то $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ – отрицательны. Из формулы $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ следует, что $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{64}{289}} = -\frac{8}{17}$. Тогда $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{15\cdot 8}{8\cdot 17} = -\frac{15}{17}$.

Ответ. $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

Решение. $1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$. Поскольку $0 \le \sin^2\alpha \le 1$, то $0 \le 2\sin^2\alpha \le 2$. Следовательно, наибольшее значение данного выражения 2, а наименьшее 0.

Ответ. Наибольшее значение 2, наименьшее 0.

ВОПРОСЫ

Запишите и докажите основные тригонометрические тождества.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

632. Могут ли для какого-нибудь угла α выполняться условия:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}125$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -8$;

б) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{5}$; г) $\operatorname{tg}\alpha = 2 - \sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 2 + \sqrt{3}$?

633. Упростите выражение:

а) $0{,}5 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; г) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;

б) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; д) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;

в) $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1$; е) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$.

634. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если известно, что:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $180° < \alpha < 270°$;

б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, $270° < \alpha < 360°$.

635. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; в) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$; д) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

б) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha+1}$; г) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$; е) $\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

636. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\frac{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}$ при $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$;

в) $\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot (\cos^2\alpha - 1) + 2\cos^2\alpha$ при $\alpha = \frac{7\pi}{3}$.

637. Докажите тождество:

а) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

б) $(\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha)^2 + (\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 1$;

в) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

638. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если известно, что:

а) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Бассейн реки Иртыш

639. Найдите с точностью до 0,01 значение выражения: а) $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

640. По территории Казахстана протекает одна из крупнейших рек Азии Иртыш, длина которой равна 4250 км. Какова протяженность этой реки на территории Казахстана, если отношение ее к длине всей реки равно тангенсу угла, котангенс которого равен 2,5?

641. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения:

а) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \sin^2 x$; в) $\frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

б) $\cos^2 x - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; г) $\frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

642. Упростите выражение:

а) $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ при $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

643. Найдите значения x, удовлетворяющие равенству:

а) $\sin^2 x + \cos^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 0$;

б) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin^2 x - \cos^2 x + \cos\frac{1}{2} x = 0$;

в) $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x - \cos 2x = 2$;

г) $\frac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x + \sin\frac{1}{4} x = 2$.

644. Постройте график функции:

а) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$; б) $y = -(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2$.

645. Докажите, что при всех допустимых значениях α принимает одно и то же значение выражение:

а) $-2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + 4\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

б) $\frac{1}{2}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \sin^4\alpha$;

в) $5 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$;

г) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha} \cdot 4\operatorname{ctg}^2\alpha + 4\sin^2\alpha$.

Уровень В

646. Докажите тождество:

а) $\sqrt{\frac{1}{1 + \cos\alpha} + \frac{1}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}$, где $0 < \alpha < \pi$;

б) $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} = 2\operatorname{tg}\alpha$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

647. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \sin\alpha \cdot \cos\alpha$; б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

648. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если известно, что:

а) $\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{m}$, где $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, где $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

г) $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{n}$, где $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

649. Найдите значение выражения 1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, если:
а) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}8$;
2) $\left|\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\right|$, если $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}4$.

650. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:
а) $1 + 3\cos^2 x + 4\sin^2 x$; в) $7\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - (\sin^2 x - \cos^2 x)$;
б) $2 - 5\cos^2 x - 4\sin^2 x$; г) $\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x$.

651. Вычислите значение выражения, если углы образуют арифметическую прогрессию: а) $\operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{tg} 6° \cdot \operatorname{tg} 9° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 87°$; б) $\operatorname{ctg} 84° \cdot \operatorname{ctg} 80° \cdot \operatorname{ctg} 76° \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 6°$.

Уровень С

652. Упростите выражение:
а) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$; б) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$.

653. Докажите тождество:
а) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;
б) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$.

654. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{10}$. Найдите значение выражения:
а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{ctg}\alpha$.
б) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$;

655. Найдите значение выражения $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}5$.

656. Установите, при каких значениях переменной x принимает наименьшее и наибольшее значения выражение: а) $\sin^2 x - 2\cos^2 x$; б) $5\cos^2 x + 6\sin^2 x$.

657. Исследуйте, при каких значениях $n \in N$ верно неравенство $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha < 1$, где α – острый угол.

25. Формулы приведения

Учебные достижения по изучению темы:

- знать формулы приведения и правила их запоминания;
- уметь применять их для нахождения значений тригонометрических функций произвольных углов через значения этих функций для острых углов; в тождественных преобразованиях тригонометрических выражений и решении задач.

Некоторые формулы приведения для углов $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\pi - \alpha$, где α – острый угол, вам известны из курса геометрии. Например,

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$

По этим формулам вы находили, например, $\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим все формулы приведения для углов $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$. Формулы приведения позволяют свести нахождение значений тригонометрических функций произвольных углов к вычислению значений этих функций для острых углов. Покажем в таблице соотношения между тригонометрическими функциями указанных и острых углов.

Функция	Аргумент						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

По этой таблице можно записать 28 формул приведения, например,

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Для того чтобы записать любую из этих формул, пользуются **правилом**:

1) *считая угол α острым, в правой части равенства ставят такой же знак, какой имеет выражение в левой части равенства;*

2) *для углов* $\pi \pm \alpha$ *и* $2\pi - \alpha$ *название функции не изменяется, а для углов* $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ *и* $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ *название функций изменяется:* sin *на* cos, cos *на* sin, tg *на* ctg, ctg *на* tg.

Формулы, соответствующие 1-му и 3-му столбцам, были выведены ранее. Формулы, относящиеся к 7-му столбцу, можно получить, используя периодичность и четность или нечетность тригонометрических функций. Например,

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Формулы, соответствующие 2-му и 4-му столбцам, можно получить из формул 1-го и 3-го столбцов, заменяя угол α на $-\alpha$ и используя четность или нечетность тригонометрических функций. Например, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(\pi+\alpha)=$ $=\cos(\pi-(-\alpha))=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$, $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}(\pi-(-\alpha))=-\mathrm{tg}(-\alpha)=$ $\mathrm{tg}\,\alpha$.

Формулы 6-го столбца можно получить, используя формулы 7-го и 1-го столбцов. Например, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$ $=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Формулы 5-го столбца можно получить из формул 6-го столбца, заменяя угол α на $-\alpha$ и используя четность или нечетность тригонометрических функций. Например,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+(-\alpha)\right)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+(-\alpha)\right)=-\mathrm{tg}(-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Пример 1. Выразить $\sin(-783°)$ через тригонометрическую функцию острого угла.

Решение.

$\sin(-783°) = \sin(-360° \cdot 3 + 297°) = \sin 297° = \sin(270° + 27°) =$
$= -\cos 27°$.

Ответ. $\sin(-783°) = -\cos 27°$.

ВОПРОСЫ

1. Запишите формулы приведения для углов $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\pi - \alpha$ и докажите какие-либо две из них.

2. По какому правилу можно записать любую из формул приведения? Приведите пример.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

658. Является ли тождеством равенство:

а) $\sin(90° + \alpha) = -\cos \alpha$;

б) $\sin(180° + \alpha) = -\sin \alpha$;

в) $\cos(270° - \alpha) = -\cos \alpha$;

г) $\cos(90° + \alpha) = -\sin \alpha$;

д) $\operatorname{tg}(90° + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$;

е) $\operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$?

659. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos(-\alpha) \cdot \cos(180° + \alpha)}{\sin(-\alpha) \cdot \sin(90° + \alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(-\alpha) \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180° + \alpha)}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}(180° - \alpha) \cdot \sin(270° + \alpha)}{\cos(180° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270° - \alpha)}$;

г) $\dfrac{\cos(270° + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(270° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(270° + \alpha)}$.

660. Выразите следующие тригонометрические функции через тригонометрические функции положительных углов, меньших 45°:

а) sin 70°, cos 50°, tg 68°, ctg 73°;

б) sin 175°, cos 130°, tg 165°, ctg 170°;

в) sin 220°, cos 240°, tg 190°, ctg 250°;

г) sin 320°, cos 290°, tg 340°, ctg 325°;

д) sin 560°, cos 840°, tg 760°, ctg 990°;

е) sin(–310°), cos(–500°), tg(–400°), ctg(–830°).

661. Используя формулы приведения, вычислите значения тригонометрических функций:

а) $\sin 150°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 150°$;

б) $\sin 225°$, $\cos 210°$, $\operatorname{tg} 210°$, $\operatorname{ctg} 240°$;

в) $\sin 315°$, $\cos 300°$, $\operatorname{tg} 315°$, $\operatorname{ctg} 300°$;

г) $\sin(-135°)$, $\cos(-240°)$, $\operatorname{tg}(-300°)$, $\operatorname{ctg}(-225°)$.

662. Найдите значение выражения:

а) $\sin^2 120° + \cos^2 150° + \operatorname{tg}^2 225° - \operatorname{ctg}^2 210°$;

б) $\sin^2(-330°) - \cos^2(-120°) - \operatorname{tg}^2(-240°) - \operatorname{ctg}^2(-330°)$;

в) $6\sin(-240°) \cdot \cos 315° - 4\cos 135° \cdot \operatorname{tg}(-225°) \cdot \operatorname{tg} 120°$;

г) $\dfrac{\sin(-120°)}{\sin 300°} - \dfrac{\operatorname{ctg} 120° \cdot \cos 330°}{\cos 360°} + \sin(-210°) \cdot \operatorname{tg} 150°$.

663. Замените тригонометрической функцией угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; д) $\cos(\pi + \alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; е) $\sin(2\pi - \alpha)$.

664. Преобразуйте выражение:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sin(\alpha - \pi)$; д) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\cos(\alpha - \pi)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

665. Приведите к функциям углов, заключенных в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, следующие тригонометрические функции:

а) $\sin 0{,}8\pi$; $\cos 2{,}4\pi$; $\operatorname{tg} 3{,}7\pi$; $\operatorname{ctg} 5{,}4\pi$;

б) $\sin(-1{,}2\pi)$; $\cos 3{,}6\pi$; $\operatorname{tg} 1{,}9\pi$; $\operatorname{ctg}(-1{,}7\pi)$.

666. Укажите углы из промежутка $(0; 2\pi)$:

а) синусы которых равны $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, 0$;

б) косинусы которых равны $1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) тангенсы которых равны $-1, \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0$.

667. Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

б) $\cos(\pi+\alpha)$, если $\sin\alpha=-\frac{7}{9}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

668. а) Синус острого угла параллелограмма равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите косинус тупого угла параллелограмма.

б) Докажите, что в любом треугольнике синус любого угла равен синусу суммы двух других углов.

в) Тангенс суммы двух углов треугольника равен 3. Найдите синус третьего угла треугольника.

669. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}$; в) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}$;

б) $\dfrac{2-2\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)}$; г) $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

670. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)-\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)-\cos^2(2\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}=1$;

г) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos(\alpha-2\pi)+\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\alpha-2\pi)}=-1$.

Уровень В

671. Докажите, что для углов α, β, γ треугольника верны соотношения:

а) $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

672. В угол, равный α, вписана окружность радиуса 2 см. Найдите расстояние между точками касания окружности со сторонами угла.

673. Вычислите: $\operatorname{ctg} 570° \cdot \operatorname{ctg} 760° \cdot \operatorname{ctg} 945° \cdot \operatorname{ctg} 1130° \cdot \operatorname{ctg} 1320°$.

674. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(5\pi-x)+\operatorname{tg}(10\pi-x)-\operatorname{tg}(21\pi+x)}{\sin 6{,}5\pi-\cos 15\pi+\cos 20\pi}$;

б) $\dfrac{\cos(5\pi-x)+\sin(11\pi+x)}{\operatorname{tg}(\pi-x)\cdot\operatorname{tg}(0{,}5\pi+x)+\operatorname{tg}(20\pi+x)}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2(9\pi-x)\cdot\sin^2(x-4{,}5\pi)}{\sin(19\pi-x)\cdot\sin(-x-15\pi)}$;

г) $\dfrac{\cos^2(5{,}5\pi-x)}{\operatorname{tg}^2(x-10\pi)}+\dfrac{\cos^2(-x)}{\operatorname{tg}^2(x-7{,}5\pi)}$.

675. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\frac{17\pi}{6}+\operatorname{tg}(-9{,}25\pi)}{\sin^2 4{,}75\pi\cdot\cos 9\pi}$;

б) $\dfrac{\sin^2\frac{19\pi}{7}+\sin^2\frac{59\pi}{14}}{\cos\frac{29\pi}{6}+\sin 33\pi}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{23\pi}{6}+\sin^2 11{,}5\pi}{\cos^2\frac{37\pi}{6}}+\operatorname{tg} 12{,}25\pi$;

г) $\dfrac{\sin\frac{11\pi}{18}\cdot\sin\frac{25\pi}{18}-\cos\frac{29\pi}{18}\cdot\cos\frac{43\pi}{18}}{\cos 29\pi}$.

676. Известно, что $\mathrm{tg}(0{,}5\pi + \alpha) = -2$. Найдите:

а) $\dfrac{5\sin(1{,}5\pi - \alpha) + 4\cos(3{,}5\pi + \alpha)}{7\sin(\alpha + 3\pi) - \cos(5\pi - \alpha)}$;

б) $\dfrac{8\cos^2(\pi + \alpha) - 3\sin^2(7{,}5\pi + \alpha)}{2\cos^2(2{,}5\pi - \alpha) + 9\sin(2\pi - \alpha)\cdot\cos(8\pi + \alpha)}$.

Уровень C

677. Докажите тождество $\mathrm{ctg}\ 0{,}4\pi - \dfrac{\cos 1{,}1\pi}{1 - \cos 0{,}6\pi} = \dfrac{1}{\cos 0{,}1\pi}$.

678. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{\sin^2 23^\circ - \cos^2 67^\circ \cdot \cos^2 200^\circ}}{\cos 113^\circ \cdot \sin 340^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin 100^\circ \cdot \sqrt{\sin^2 69^\circ + \cos^2 21^\circ \cdot \mathrm{tg}^2 170^\circ}}{\cos 201^\circ}$.

679. Вычислите сумму

$$1 + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^4\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \\ + \sin^5\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right).$$

680. Дана задача «Боковые стороны AB и DC трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Найти площадь этой трапеции, если $AB = 1$ дм, $\angle BAC = \angle CDA = \alpha$». Ее решение Даша начала так: площадь данной трапеции равна сумме площадей треугольников ABC и ACD (рисунок 71): $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha + \dfrac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD$. Найдем неизвестные величины AC, AD, используя теорему синусов для треугольников ABC и ADC. Продолжите ее решение.

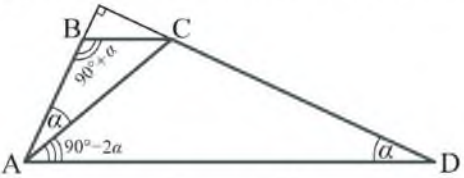


Рисунок 71

681. Докажите, что верно неравенство:
а) $\sin^2(0{,}5\pi + x) - \mathrm{tg}^2(0{,}5\pi + x) \le 0$ при всех допустимых значениях x; б) $\mathrm{tg}(1{,}5\pi - x) + \mathrm{ctg}(1{,}5\pi - x) > \sqrt{\pi}$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

26. Формулы косинуса, синуса, тангенса и котангенса суммы и разности двух углов

Учебные достижения по изучению темы:

- знать и уметь выводить формулы косинуса, синуса, тангенса и котангенса суммы и разности двух углов;
- уметь применять их для нахождения значений тригонометрических функций суммы и разности двух углов через значения тригонометрических функций этих углов; в тождественных преобразованиях выражений и решении задач.

Для тригонометрических функций суммы и разности двух углов верны формулы:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \quad (4)$$

$$(5)\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad (6)$$

$$(7)\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta} \quad (8)$$

Докажем их.

1) Пусть на координатной окружности точки $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $C(\cos\beta; \sin\beta)$ соответствуют углам α и β (рисунок 72). Тогда $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

С другой стороны, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle BOC=1\cdot1\times$ $\times\cos\angle BOC$.

Угол между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ может быть равен $\alpha-\beta$ (рисунок 72, *а*) или $2\pi-(\alpha-\beta)$ (рисунок 72, *б*). В каждом из этих случаев $\cos\angle BOC=\cos(\alpha-\beta)$. Следовательно, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+$ $+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

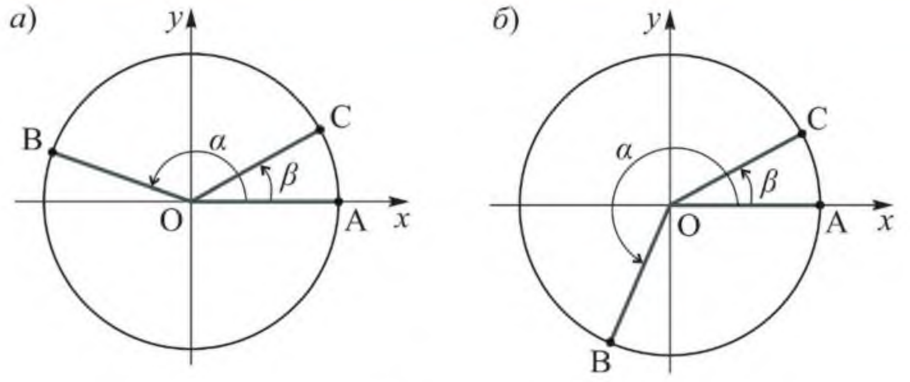


Рисунок 72

2) Представим угол $\alpha + \beta$ в виде $\alpha - (-\beta)$. Тогда $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

3) Используем формулу приведения и первое тождество: $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

4) Представим угол $\alpha + \beta$ в виде $\alpha - (-\beta)$ и используем формулу (3). (Сделайте это самостоятельно.)

5) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$. Разделив числитель и знаменатель дроби на произведение $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, получим $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

(Формулы 6–8 докажите самостоятельно.)

Задача. Синусы углов α и β треугольника равны соответственно $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найти синус третьего угла γ этого треугольника.

Решение. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то $\sin\gamma = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Найдем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \pm\frac{24}{25};\ \cos\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5}.$$

Если α и β – острые углы, то $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{7}{25}\cdot\frac{3}{5} + \frac{24}{25}\cdot\frac{4}{5} = \frac{117}{125}$.

Если угол α острый, а угол β тупой, то $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{7}{25}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{24}{25}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

Если угол α тупой, а угол β острый, то $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{7}{25}\cdot\frac{3}{5} + \left(-\frac{24}{25}\right)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{75}{125}$.

Так как синус любого угла треугольника больше нуля, то последний случай невозможен.

Ответ. $\frac{117}{125}$ или $\frac{3}{5}$.

Пример. Найти значение $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ без использования таблиц.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$.

Ответ. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

ВОПРОСЫ

Запишите формулы тригонометрических функций суммы и разности двух углов.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

682. Преобразуйте выражение с помощью формул суммы и разности двух углов:

а) $\sin(30° + \alpha)$; в) $\cos(\alpha + 45°)$; д) $\operatorname{tg}(45° + \alpha)$;
б) $\sin(60° - \alpha)$; г) $\cos(\alpha - 60°)$; е) $\operatorname{tg}(60° - \alpha)$.

683. Преобразуйте выражение к тригонометрической функции суммы или разности углов и найдите его значение (устно):

а) $\cos 105° \cdot \cos 15° + \sin 105° \cdot \sin 15°$;

б) $\cos 38° \cdot \cos 22° - \sin 38° \cdot \sin 22°$;

в) $\sin 61° \cdot \cos 29° + \cos 61° \cdot \sin 29°$;

г) $\sin 64° \cdot \cos 34° - \cos 64° \cdot \sin 34°$;

д) $\cos 58° \cdot \cos 28° + \sin 58° \cdot \sin 28°$;

е) $\sin 83° \cdot \cos 23° - \cos 83° \cdot \sin 23°$.

684. Найдите значение выражения (устно):

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 35° + \operatorname{tg} 10°}{1 - \operatorname{tg} 35° \cdot \operatorname{tg} 10°}$; в) $\dfrac{\operatorname{tg} 14° + \operatorname{tg} 46°}{1 - \operatorname{tg} 14° \cdot \operatorname{tg} 46°}$; д) $\dfrac{\operatorname{tg} 17° + \operatorname{tg} 43°}{\operatorname{tg} 17° \cdot \operatorname{tg} 43° - 1}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 65° - \operatorname{tg} 35°}{1 + \operatorname{tg} 65° \cdot \operatorname{tg} 35°}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg} 25° - \operatorname{tg} 70°}{1 + \operatorname{tg} 25° \cdot \operatorname{tg} 70°}$; е) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 75° \cdot \operatorname{tg} 45°}{\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 45°}$.

685. Замените выражение тригонометрической функцией суммы или разности углов и найдите его значение:

а) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$;

б) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{6} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$;

в) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{15} + \sin\frac{2\pi}{5} \cdot \sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} + \cos\frac{7\pi}{30} \cdot \sin\frac{4\pi}{15}}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$.

686. Дано: $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите: $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

687. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{2}{3}$, а $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$. Найдите: а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$.

688. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$, а $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{6}$. Найдите: а) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$.

689. Дано: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{3}$, α и β – углы IV четверти. Вычислите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$; б) $\cos(\alpha + \beta)$; в) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

690. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Какой четверти принадлежит угол $\dfrac{\pi}{6} + \alpha$?

691. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

692. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

б) $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$.

693. Установите, что если α и β – положительные острые углы и:

а) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, а $\sin\beta=\frac{15}{17}$, то $\alpha+\beta=90^\circ$;

б) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$, а $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{1}{3}$, то $\alpha+\beta=45^\circ$;

в) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{3}{4}$, а $\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{1}{7}$, то $\alpha+\beta=135^\circ$.

694. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$; в) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}$;

б) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}$; г) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$.

695. Вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс угла:

а) 15°; в) 105°; д) $\frac{11\pi}{12}$;

б) -75°; г) $-\frac{\pi}{12}$; е) $-\frac{7\pi}{12}$.

696. Выразите через функции угла α: а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\mathrm{tg}\,2\alpha$.

697. Найдите значение выражения $\sin 200^\circ\cdot\sin 310^\circ+\cos 340^\circ\times$ $\times\cos 50^\circ$.

Уровень B

698. Дано: $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите: а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\cos(\alpha-\beta)$. Каким четвертям принадлежат углы $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$?

699. Выразите через функции угла α: а) $\sin 3\alpha$; б) $\cos 3\alpha$; в) $\operatorname{tg} 3\alpha$.

700. Докажите тождество:

а) $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = 1$;

б) $\dfrac{\sin 90^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(45^\circ+3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ-3\alpha)} = -\operatorname{tg} 4\alpha$;

в) $1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

701. Существует ли значение α, при котором верно равенство $\sin\alpha + \cos\alpha = 2$?

702. Найдите все значения x, удовлетворяющие соотношению:

а) $\sin 3x\cdot\cos x + \cos 3x\cdot\sin x = 0$;

б) $\cos 5x\cdot\cos 3x + \sin 5x\cdot\sin 3x = 0$.

703. Докажите, что если α, β, γ – углы треугольника, то $\operatorname{ctg}\beta + \dfrac{\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Уровень C

704. Докажите, что если $\alpha\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то верно соотношение:

а) $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$; б) $\cos(\alpha-\beta) < \cos\alpha + \sin\beta$.

705. Докажите, что если для углов α, β, γ треугольника выполняется соотношение $\cos\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$, то он равнобедренный.

706. Выразите $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ через тригонометрические функции углов α, β, γ.

707. Дано $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$, где α, β, γ – положительные острые углы. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma = 45°$.

708. Найдите $\alpha + \beta$, если $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta) = 2$, причем $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

709. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$;

б) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$;

в) $\frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$.

710. Найдите значение выражения $\frac{3\operatorname{ctg}^2 15° - 1}{3 - \operatorname{ctg}^2 15°}$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Докажите, что если для ΔABC верно равенство $\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$, то $\angle C = 90°$.

2) Существует ли значение x, при котором верно равенство $(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-1} = \sqrt{2^{-4} + 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^{0}}$?

27. Формулы тригонометрических функций двойного и половинного углов

Учебные достижения по изучению темы:

- знать и уметь выводить формулы тригонометрических функций двойного и половинного углов;
- уметь применять эти формулы в тождественных преобразованиях выражений и решении задач.

Для тригонометрических функций двойного угла верны следующие формулы:

$$(1)\quad \mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;} \qquad \mathbf{\sin 2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}}\quad (5)$$

$$(2)\quad \mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;} \qquad \mathbf{\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}\quad (6)$$

$$(3)\quad \mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;} \qquad \mathbf{tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}\quad (7)$$

$$(4)\quad \mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;} \qquad \mathbf{ctg\,2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}}\quad (8)$$

Докажем их.

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

Формулы 3 и 4 докажите самостоятельно, используя формулу 2 и основное тригонометрическое тождество.

5) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$; разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\alpha$, получим $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$.

Формулу 6 докажите самостоятельно, используя формулу 2, по аналогии с выводом формулы 5.

7) $tg\,2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\alpha} = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

Восьмую формулу докажите самостоятельно.

Пример 1. Упростить выражение $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha$.

Решение. Имеем: $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\times$ $\times(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

Ответ. $\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha-\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

Пример 2. Найти значение выражения $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$, где $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $\sin 4\alpha=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=$ $=2\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{-8}{10}=-\frac{24}{25}$.

Ответ. $-\frac{24}{25}$.

Для тригонометрических функций половинного угла верны следующие формулы:

(9) $\mathbf{\sin}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\qquad$ $\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (11)

(10) $\mathbf{\cos}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\qquad$ $\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (12)

Докажем эти формулы.

Формулы 9 и 10 следуют из формул 4 и 3, сделайте это самостоятельно.

11) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Последнюю формулу докажите самостоятельно, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ на $2\sin\frac{\alpha}{2}$.

Пример 3. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, где $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $m>n>0$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, найдем $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2}}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

Тогда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $1 - \cos\alpha = 1 - \frac{2mn}{m^2+n^2} = \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$; $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} =$
$= \frac{(m-n)^2}{m^2+n^2} : \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{m-n}{m+n}$.

Ответ. $\frac{m-n}{m+n}$.

ВОПРОСЫ

Запишите формулы тригонометрических функций: а) двойного угла; б) половинного угла.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

711. Преобразуйте каждое из выражений, используя формулу двойного угла:

а) $\sin 8\alpha$, $\cos 6\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$; в) $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$;

б) $\sin 5\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\sin\frac{\alpha}{5}$, $\cos\frac{2\alpha}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{4}$.

712. Найдите значение выражения:

а) $8\sin 15° \cdot \cos 15°$; г) $\sin^2 15° - \cos^2 15°$;

б) $4\sin 22°30' \cdot \cos 22°30'$; д) $\sqrt{2}(\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°)$;

в) $\sin 15° \cdot \cos 15°$; е) $2\operatorname{tg} 15° : (1 - \operatorname{tg}^2 15°)$.

713. Сократите дробь:

а) $\frac{\sin 100°}{\sin 50°}$; в) $\frac{\cos 80°}{\cos 40° - \sin 40°}$;

б) $\frac{\sin 150°}{\cos 75°}$; г) $\frac{\cos 36° + \sin^2 18°}{\cos 18°}$.

714. Упростите выражение:

а) $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$; г) $2\sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha$;

б) $\frac{\cos 8\alpha}{\cos 4\alpha - \sin 4\alpha} - \cos 4\alpha$; д) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$;

в) $1 - 2\sin^2 2\alpha$; е) $2\cos^2 3\alpha - 1$.

715. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;	г) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$;

б) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; д) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;	е) $\cos 4\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

716. а) В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $\frac{7}{25}$. Найдите синус и косинус угла при его вершине.

б) Известно, что в ромбе $ABCD$ $\cos\angle CAD = 0{,}2$. Найдите косинус угла BAD и установите, тупым или острым является этот угол.

717. Докажите тождество:

а) $\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \sin 2\alpha$;	в) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

б) $\frac{\cos 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$;	г) $\frac{\sin 2\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

718. Упростите выражение:

а) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{\cos\alpha - 1}$;	в) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{\cos 2\alpha}$;

б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$;	г) $\frac{4\operatorname{tg}\alpha\cdot(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2}$.

719. а) Докажите, что $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

б) Докажите, что $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

720. Найдите значение выражения:

а) $\sin 4\alpha$, если $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{1}{3}$;

б) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}$.

721. Преобразуйте выражение, используя формулы половинного угла:

а) $\sin^2 6\alpha$; в) $\sin^2\left(4\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; д) $\operatorname{tg} 3\alpha$;

б) $\cos^2 4\alpha$; г) $\cos^2\left(6\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$; е) $\operatorname{ctg} 8\alpha$.

722. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

б) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$;

723. Вычислите, применяя формулы половинного угла:

а) $\sin\frac{\pi}{12}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

724. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

б) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

725. Вычислите: а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{5}{12}$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin 2\alpha = 0{,}96$.

726. Учащимся было дано задание: найти при $\alpha = 120°$ значение выражения $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$. Николай выполнил задание так: $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{(1-\cos 60°)^2 + \sin^2 60°} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Василий решал так: $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = 2\sin 60° = \sqrt{3}$. Чье решение было правильным?

Уровень В

727. Вычислите значение функции:

а) $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$, если $\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$;

б) $f(x) = a \sin 2x + b \cos 2x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$.

728. Докажите тождество:

а) $\frac{1 - 4\sin^2\alpha \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha$; в) $\cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \frac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}$;

б) $\frac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha - \sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; г) $\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha$,

если $\pi < \alpha < 2\pi$.

729. Упростите выражение:

а) $16\cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$; в) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha$;

б) $(\cos^3\alpha + \sin^3\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$; г) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha$.

730. Докажите неравенство:

а) $\sin\alpha \cos\alpha \le \frac{1}{2}$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin 4\alpha < 2\cos 2\alpha$, если $2\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\sin 3\alpha < 2\sin 1{,}5\alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

731. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c, причем катет a лежит против угла α, выполняется равенство $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b + c}{a}$.

732. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:
а) $5 - 4\sin x \cos x$; б) $3(\sin 2x + \cos 2x)^2$.

733. Найдите $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = m$ и $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

Уровень C

734. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$; в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\,\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

б) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 2 + \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

735. Найдите угол α, если $\alpha \in [0;\, 2\pi]$ и выполняется условие:

а) $\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}$; в) $\sin^2\dfrac{\alpha}{4} - \cos^2\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{1}{2}$;

б) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; г) $\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 1$.

736. Докажите, что верно равенство:

а) $\sin 10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40° = \dfrac{1}{8}$;

б) $8\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \dfrac{1}{2}$;

в) $4\cos^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{4\sin^4\alpha + \sin^2 2\alpha} =$

$= 2$ при $180° < \alpha < 270°$.

737. На диаметре окружности, равном 4 см, отмечена точка M на расстоянии 1 см от ее центра O. Через точку M проведены две перпендикулярные хорды AC и BD, причем $\angle CMO = \alpha$ (рисунок 73). Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

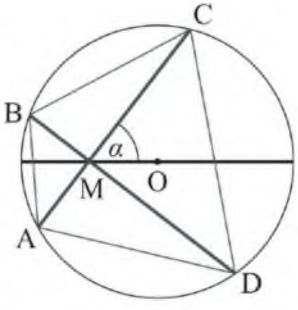


Рисунок 73

28. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

Учебные достижения по изучению темы:

- знать и уметь выводить формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение;
- уметь применять эти формулы в тождественных преобразованиях выражений и решении задач.

Для преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение используются формулы:

(1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ (5)

(2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ (6)

(3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ (7)

(4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ (8)

Докажем эти формулы.

1–2. Представим углы в виде: $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Тогда $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\beta = \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \times \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Сложив левые и правые части этих равенств, получим $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, а если вычесть эти части равенств, то получим $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Формулы 3–4 докажите самостоятельно, аналогично выводу формул 1–2.

$$5)\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Формулы 6–8 докажите самостоятельно, аналогично выводу формулы 5.

Пример. Доказать тождество $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

Доказательство.

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}:\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}=$$

$=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(90^\circ-(45^\circ-\alpha))}=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$. Что и требовалось доказать.

Задача. Доказать, что если α, β, γ углы треугольника, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$.

Доказательство. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)+$ $+\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)$. Используя формулу синуса двойного угла, можно записать: $\sin(\alpha+\beta)=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times$ $\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=4\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\times$ $\times\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$.

Что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

По каким формулам можно преобразовать сумму или разность тригонометрических функций в произведение?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

738. Представьте в виде произведения или частного выражение:

а) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha$; в) $\cos 3\alpha + \cos \alpha$; д) $\operatorname{tg} 5\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha$;

б) $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$; г) $\cos \alpha - \cos 7\alpha$; е) $\operatorname{tg} 10\alpha - \operatorname{tg} 9\alpha$.

739. Верно ли равенство:

а) $\sin 10° + \sin 50° = \cos 20°$;

б) $\sin 80° - \sin 20° = \sin 40°$;

в) $\cos \frac{7\pi}{24} + \cos \frac{\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{8}$;

г) $\cos \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{4\pi}{9} = -\sin \frac{2\pi}{9}$;

д) $\sin 40° + \sin 20° - 2\cos 10° = -\cos 10°$;

е) $\operatorname{tg} 43° + \operatorname{tg} 17° = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 47° \cdot \cos 17°}$?

740. Преобразуйте в произведение выражение:

а) $\sin 20° + \sin 40°$; г) $\cos(-50°) - \sin 20°$;

б) $\sin 55° - \sin(-65°)$; д) $\sin 255° - \sin 165°$;

в) $\cos 12° + \sin 42°$; е) $\cos 315° + \cos 225°$.

741. Вычислите:

а) $\sin 15° - \sin 75°$; в) $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$; д) $\cos\frac{17\pi}{12} - \cos\frac{11\pi}{12}$;

б) $\cos 75° + \cos 15°$; г) $\cos\frac{19\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$; е) $\sin\frac{25\pi}{12} + \sin\frac{19\pi}{12}$.

742. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sin 54° - \sin 36°}{\sin 9°}$; в) $\frac{\sin 16° + \sin 74°}{\cos 16° + \cos 74°}$; д) $\frac{\cos 40° - \cos 80°}{1 - 2\sin^2 35°}$;

б) $\frac{\cos 25° + \cos 85°}{\cos 55°}$; г) $\frac{\cos 12° - \cos 78°}{\sin 12° - \sin 78°}$; е) $\frac{\sin 37° - \sin 53°}{2\cos^2 49° - 1}$.

743. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; в) $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; г) $\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg} \alpha$.

744. Докажите, что верно равенство:

а) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$; в) $1 + \sin 2\alpha = 2\sin^2(45° + \alpha)$;

б) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - 45°)$; г) $1 - \sin 4\alpha = 2\sin^2(45° - 2\alpha)$.

745. Упростите выражение:

а) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$; б) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

746. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$; в) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sin\left(2\alpha + \frac{9\pi}{16}\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{16}\right)$.

747. Докажите тождество:

а) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$;

б) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$;

в) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$.

748. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 10\alpha - 2\sin 6\alpha \cos 6\alpha}{1 - 2\sin^2 6\alpha - \cos 10\alpha}$; в) $\frac{\sin 8\alpha + 2\sin 4\alpha}{2(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha) \cdot \cos 2\alpha}$;

б) $\frac{\cos 10\alpha + 2\cos^2 4\alpha - 1}{\sin 10\alpha + 2\cos 4\alpha \sin 4\alpha}$; г) $\frac{2\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}$.

749. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{1 - 2\sin^2 2\alpha + \cos 8\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$.

Уровень В

750. а) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник *ABC*, равен $\sqrt{2}$. Докажите, что гипотенуза *AB* этого треугольника равна $\frac{1}{\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\left(45° - \frac{A}{2}\right)}$.

Комплекс «Изумрудный квартал», г. Нур-Султан

б) Угол наклона башен комплекса «Изумрудный квартал» достигает 15°. Верно ли, что тангенс этого угла равен: 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$?

751. Верхнее основание равнобедренной трапеции равно 4 и равно его боковой стороне, которая образует с нижним основанием угол α. Докажите, что нижнее основание трапеции равно $16\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

752. Преобразуйте в произведение тригонометрических функций выражение:

а) $\frac{1}{2}+\sin 2\alpha$; в) $1+2\cos 4\alpha$; д) $3-4\sin^2 2\alpha$;

б) $\sqrt{3}-2\sin 2\alpha$; г) $\sqrt{2}-2\cos\alpha$; е) $1-4\cos^2 2\alpha$.

753. Докажите, что верно равенство:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{-2}{\cos 2\alpha}$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{\cos 2\alpha}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\sin 2\alpha$.

754. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\cos 18^\circ+\cos 36^\circ+\cos 54^\circ+\cos 72^\circ$;

б) $\sin 40^\circ+\sin 100^\circ+\sin 220^\circ+\sin 160^\circ$.

755. Представьте выражение в виде произведения и найдите его значение при $\alpha=15^\circ$:

а) $\cos 2\alpha+\cos 14\alpha+\cos 6\alpha+\cos 10\alpha$;

б) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$.

756. Докажите тождество $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$.

757. В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c известно, что $a + b - c = \sqrt{2}$. Докажите, что $c = \frac{2}{2\cos(45^\circ - \alpha) - \sqrt{2}}$, где α – острый угол треугольника.

Уровень C

758. Вычислите:

а) $\sin 6\alpha + \sin 2\alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\sin 10\alpha - \sin 6\alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

в) $\operatorname{tg} 20^\circ + 4\sin 20^\circ$.

759. Докажите тождество:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$;

б) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\, \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

760. Представьте в виде произведения выражение:

а) $1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$; в) $\cos 6\alpha + \sin 6\alpha - 1$;

б) $1 - \sin 4\alpha + \cos 4\alpha$; г) $1 - \sin 8\alpha - \cos 8\alpha$.

761. Исследуйте, при каком соотношении между α, β и γ верно равенство $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

762. Найдите все значения $x \in [0;\ \pi]$ такие, что:

а) $\cos 2x + \cos x = 0$;

б) $\sin 3x - \sin x = 0$;

в) $2\sin x \cdot \cos x + \sin 4x = 0$;

г) $2\cos^2 x - 1 - \cos 4x = 0$.

763. В прямой угол C вписана окружность радиуса 1 дм, касающаяся его сторон в точках K и M. К этой окружности проведена касательная AB, как показано на рисунке 74, причем $\angle CAB = \alpha$. Найдите AB.

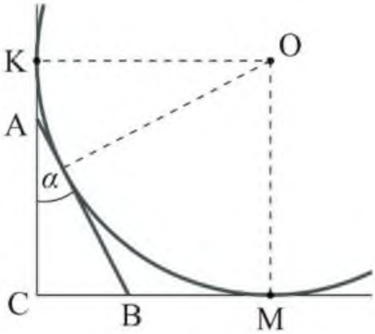


Рисунок 74

29. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и разность

Учебные достижения по изучению темы:

- знать и уметь выводить формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность;
- уметь применять эти формулы в тождественных преобразованиях выражений и решении задач.

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность применяются формулы:

$$\mathbf{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))}\qquad(1)$$

$$\mathbf{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))}\qquad(2)$$

$$\mathbf{\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))}\qquad(3)$$

Докажем их.

1–2-я. Вычитая левые и правые части равенств

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, получим

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta$, откуда

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

Сложив левые и правые части этих равенств, получим

$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$, отсюда

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$.

Третье тождество докажите самостоятельно, используя формулы для синуса суммы и разности двух углов.

Пример 1. Найти значение выражения $\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 80^\circ$.

Решение. $(\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ)\cdot\cos 80^\circ=\frac{1}{2}(\sin 70^\circ+\sin 30^\circ)\cdot\cos 80^\circ=$ $=\frac{1}{2}\sin 70^\circ\cdot\cos 80^\circ+\frac{1}{4}\cos 80^\circ=\frac{1}{4}(\sin 150^\circ-\sin 10^\circ)+\frac{1}{4}\cos 80^\circ=\frac{1}{8}-$ $-\frac{1}{4}\sin 10^\circ+\frac{1}{4}\sin 10^\circ=\frac{1}{8}$.

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Пример 2. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$.

Доказательство. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha)}=\frac{\sin\alpha(\cos2\alpha-\cos120^\circ)}{\cos\alpha(\cos2\alpha+\cos120^\circ)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos2\alpha+0{,}5\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos2\alpha-0{,}5\cos\alpha}=\frac{0{,}5(\sin3\alpha-\sin\alpha)+0{,}5\sin\alpha}{0{,}5(\cos3\alpha+\cos\alpha)-0{,}5\cos\alpha}=\frac{\sin3\alpha}{\cos3\alpha}=$$

$=\operatorname{tg}3\alpha$. Что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

По каким формулам можно преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

764. Представьте в виде суммы или разности выражение:

а) $\cos(-5^\circ)\cdot\cos35^\circ$; г) $2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha-2\beta)$;
б) $\sin32^\circ\cdot\sin28^\circ$; д) $2\cos(3\alpha+\beta)\cdot\sin(3\alpha-\beta)$;
в) $2\cos17^\circ\cdot\cos(-28^\circ)$; е) $2\sin(4\alpha-3\beta)\cdot\sin(4\alpha+3\beta)$.

765. Представьте в виде суммы произведение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{8}+2\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-2\alpha\right)$; д) $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+3\alpha\right)$; е) $2\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

766. Вычислите:

а) $\cos45^\circ\cdot\cos15^\circ$; в) $4\sin37{,}5^\circ\cdot\sin7{,}5^\circ$;
б) $\sin105^\circ\cdot\sin75^\circ$; г) $8\sin22{,}5^\circ\cdot\cos7{,}5^\circ$.

767. Верно ли равенство:

а) $2\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ=\cos20^\circ$; в) $2\sin40^\circ\cdot\cos50^\circ=1-\sin10^\circ$;

б) $\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{5\pi}{24}-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{4}$; г) $2\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}=0$?

768. Докажите тождество:

а) $\sin2\alpha-2\sin(\alpha-15^\circ)\cdot\cos(\alpha+15^\circ)=0{,}5$;
б) $\cos6\alpha+2\sin(3\alpha-15^\circ)\cdot\sin(3\alpha+15^\circ)=0{,}5\sqrt{3}$;

в) $\sin 4° \cdot \sin 86° + 0{,}5\sin 4° = \cos 2° \cdot \sin 6°$;

г) $\cos 18° \cdot \cos 72° - \sin 63° \cdot \cos 27° = -0{,}5$.

769. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha}$; б) $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 8\alpha}{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha \cdot \cos 6\alpha}$.

770. Докажите, что верно равенство:

а) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 25° = 1$;

б) $\operatorname{ctg} 10° - \operatorname{tg} 35° - \operatorname{ctg} 10° \cdot \operatorname{tg} 35° = 1$;

в) $\cos 15° \cdot \cos 7° - \sin 79° \cdot \cos 11° - \sin 86° \cdot \cos 4° = -1$;

г) $\sin 17° \cdot \sin 73° - \sin 21° \cdot \cos 13° + \sin 4° \cdot \sin 86° = 0$.

771. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$;

б) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

772. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $\sin^2 x + \cos(60° + x) \cdot \cos(60° - x)$;

б) $\sin(60° + x) \cdot \sin(60° - x) + \sin^2 x$;

в) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2 x$;

г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \cos^2 x$.

773. Найдите значение выражения:

а) $\cos 8\alpha - \cos 6\alpha - 2\cos 5\alpha \cdot \cos 3\alpha$, если $\cos \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\sin 2\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 6\alpha$, если $\sin \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\cos 7\alpha \cdot \cos 4\alpha - \cos 8\alpha \cdot \cos 3\alpha$, если $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\sin 2\alpha \cdot \cos 5\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 6\alpha$, если $\sin \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

774. Вычислите:

а) $2\sin 46° \cdot \cos 16° - \cos 28°$;

б) $2\sin(-25°) \cdot \sin 55° - \sin 10°$;

в) $\cos 10° \cdot \cos 50° \cdot \cos 70°$;

г) $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 80°$.

775. Докажите тождество:

а) $4\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \sin 3\alpha$;

б) $4\sin(45° - \alpha) \cdot \sin(15° + \alpha) \cdot \cos(15° - \alpha) = \cos(45° - 3\alpha)$.

Уровень B

776. Представьте выражение в виде суммы тригонометрических функций:

а) $4\cos\frac{\alpha}{3} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{6}$; в) $\sin^3 2\alpha$;

б) $\cos^3\alpha$; г) $4\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$.

777. Найдите значение выражения:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$, если $\cos 2\alpha \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = b$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3\alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 3\alpha\right)$, если $4\sin 3\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) +$ $+ \cos^2 3\alpha = b$.

778. Докажите, что $\cos 5° \cdot \cos 55° \cdot \cos 65° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{16}$.

779. Исследуйте, при каком $x \in [0; 2\pi]$ принимает наибольшее значение выражение

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

780. Из всех треугольников со стороной a и противолежащим ей углом α, вписанных в данную окружность (рисунок 75), найдите треугольник с наибольшим периметром.

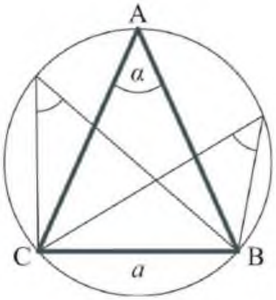


Рисунок 75

Уровень C

781. Представьте в виде суммы тригонометрических функций первой степени произведение: а) $4\sin 3\alpha \cdot \cos^2 3\alpha$; б) $6\sin^2\alpha \cdot \cos^3\alpha$; в) $32\sin^3\alpha \cdot \cos^3\alpha$.

782. Докажите тождество $4\sin^3\alpha \cdot \cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha \cdot \sin 3\alpha = 3\sin 4\alpha$.

783. Известно, что $3\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = m$. Укажите допустимые значения m и найдите произведение $\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

784. Найдите все значения x, удовлетворяющие условию:

а) $2\sin 2x \cdot \sin 3x + \cos 5x = 0$, если $x \in [0; 2\pi]$;

б) $2\sin 4x \cdot \sin 2x - \cos 2x = 0$, если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $\cos 5x \cdot \cos 7x = \cos^2 6x$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

г) $\sin x \cdot \sin 11x = \sin 3x \cdot \sin 9x$, если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Упростите выражение $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}}$,
где α – острый угол.

2) Существует ли значение x, при котором верно равенство
$\sin x \cdot \cos x = \sqrt{0{,}4\sqrt{0{,}4}}$?

3) Вычислите без использования таблиц значение выражения
$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

30. Упражнения на повторение раздела «Тригонометрия»

Уровень А

785. 1) В 2016 году на реке Есиль в городе Астане (с 2019 г. Нур-Султан) установлен уникальный фонтан «Солнце», который оснащен различными световыми эффектами. В частности, по его окружности время от времени движется световая дуга. Какой угол в радианах описывает любая ее светящаяся точка, совершая полтора оборота?

2) Точки A и B делят окружность на две дуги. Найдите радианную и градусную меры одной из них, если вторая равна:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{3\pi}{8}$; г) $\frac{2\pi}{9}$; д) $\frac{9\pi}{10}$; е) $\frac{7\pi}{12}$.

Фонтан «Солнце» на реке Есиль

786. Найдите значение выражения $\frac{\sin x + 6\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x + 2\sqrt{1-\cos^2 x}}$ при:
а) $x = 3$ рад; б) $x = 4$ рад.

787. Сравните с нулем значение выражения:
а) $(\text{tg } 30° - \sin 60°)(\sin 135° - \text{tg } 135°)$;
б) $(\cos 30° - \text{tg } 60°)(\text{tg } 150° - \sin 150°)$.

788. Верно ли равенство:
а) $\sin^2 45° - \sin^2 30° = \cos^2 60° - \cos^2 45°$;
б) $1 + 2\sin 100° \cdot \cos 100° = (\sin 100° + \cos 100°)^2$?

789. Найдите значения $x \in [0;\, 4\pi]$, при которых верно равенство:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = -1$.

790. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin x + \cos(-x)}{1 - \operatorname{tg}(-x)} = \cos x$; б) $\frac{\cos x - \sin(-x)}{1 - \operatorname{ctg}(-x)} = \sin x$.

791. Какое число является периодом всех тригонометрических функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?

792. Известно, что $\sin \alpha = a$, $\cos \alpha = b$. Выразите через a и b:

а) $\sin(\alpha + 2\pi) + \cos(2\pi - \alpha)$; в) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(\alpha - \pi)$;

б) $\cos(\alpha + 4\pi) + \sin(4\pi - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(-\pi - \alpha)$.

793. Вычислите:

а) $\sin\frac{13\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{19\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{25\pi}{6}$.

794. Докажите, что число T является периодом функции:

а) $y = \sin 2x$, $T = -5\pi$; в) $y = \sin 3x$, $T = 4\pi$;

б) $y = \cos\frac{x}{3}$, $T = -12\pi$; г) $y = \cos 4x$, $T = -\frac{7\pi}{2}$.

795. Используя формулы приведения, упростите выражение:

а) $\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\cos(\alpha - \pi) - \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\pi + \alpha)$.

796. Найдите $\sin x$, если $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

797. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin \alpha - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \beta}$;

б) $\frac{\sqrt{3} - 2\sin\beta}{2\cos\beta - 1} = \frac{1 + 2\cos\beta}{2\sin\beta + \sqrt{3}}$.

798. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{17\pi}{60}\cdot\cos\frac{\pi}{20}+\cos\frac{17\pi}{60}\cdot\sin\frac{\pi}{20}$;

б) $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{7\pi}{20}+\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{7\pi}{20}$;

в) $\sin\frac{139\pi}{90}\cdot\cos\frac{17\pi}{45}-\cos\frac{139\pi}{90}\cdot\sin\frac{17\pi}{45}$;

г) $\cos\frac{8\pi}{45}\cdot\cos\frac{29\pi}{90}-\sin\frac{8\pi}{45}\cdot\sin\frac{29\pi}{90}$.

799. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-2$.

800. Докажите, что если $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=2$, α и β – острые углы, то $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

801. Найдите:

а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$, α – угол I четверти;

б) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, α – угол III четверти;

в) $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, α – угол IV четверти;

г) $\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$, α – угол IV четверти.

802. Упростите выражение:

а) $2\sin 24°\cdot\sin 66°$; в) $\sin^2 18°-\sin^2 72°$;

б) $\sin 15°\cdot\sin 75°$; г) $(1-\operatorname{tg}^2 20°):\operatorname{tg}20°$.

803. Упростите выражение:

а) $\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$; г) $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

б) $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$; д) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\alpha$;

в) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; е) $\left(2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right):\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

804. Докажите, что для прямоугольного треугольника с острыми углами α и β верно равенство $\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

805. Докажите тождество:

а) $2\sin(45° + \alpha) \cdot \sin(45° - \alpha) = \cos 2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin(80° + \alpha)}{4\sin\left(20° + \dfrac{\alpha}{4}\right)\cdot\sin\left(70° - \dfrac{\alpha}{4}\right)} = \cos\left(40° + \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) + 1} = \sin 2\alpha$.

806. Найдите:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{2 - 3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{5}$;

в) $\dfrac{\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

807. Верно ли неравенство:

а) $\sin 75° + \sin 15° > 1$; б) $\cos 15° - \cos 45° < 0$?

808. Верно ли равенство $4\sin 40° \cdot \cos 10° = 1 + 2\cos 40°$?

809. Докажите тождество $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

810. Представьте в виде произведения: а) $\sin x + \cos x$; б) $\sin x - \cos x$.

811. Докажите тождество:

а) $4\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 6\alpha$;

б) $8\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha = 2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha$;

в) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha} = 8\cos 2\alpha$;

г) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

812. Докажите, что верно равенство:

а) $\cos^2 5 + \cos^2 1 - \cos 6 \cdot \cos 4 = 1$; б) $\cos^2 3 - \cos^2 2 + \sin 5 \sin 1 = 0$.

813. Что больше: $(\sin 165° - \sin 75°) \cdot \cos 15°$ или $(\cos 15° - \cos 75°) \times$ $\times \sin 165°$?

814. Найдите значение выражения $\cos 7\alpha \cos 4\alpha - \cos 8\alpha \cos 3\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Уровень В

815. Найдите площадь (в тыс. кв. км) разведанных нефтеносных районов Казахстана, если она составляет столько процентов от его общей площади, равной 2784,9 тыс. кв. км, скольким градусам равен угол $0{,}347(2)\pi$.

Один из нефтеносных районов Казахстана – полуостров Мангыстау

816. Найдите все значения x, при которых:

а) $2\cos 2x = 1$; в) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

б) $\sqrt{2}\sin 2x = 1$; г) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

817. Является ли тождеством равенство $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha +$ $+ 3(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1$?

818. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{8}$. Верно ли, что $\alpha + \beta + \gamma = 45°$?

819. Алихан получил задание: упростить выражение

$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\beta$. Он провел следующие преобразования этого выражения:

$$\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2} + \frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2} - (\cos\alpha + \cos\beta) \cdot \cos\beta =$$

$$= 1 - \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} - \cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos^2\beta =$$

$$= 1 - \cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos^2\beta = \sin^2\beta - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Софии было поручено проверить, получил ли Алихан правильный ответ. Она вместо α и β подставила в исходное и последнее выражение 0 и получила неверное равенство $0 = -2$.

Следовательно, ответ неправильный. Найдите ошибку в преобразованиях Алихана и выполните задание правильно.

820. Докажите, что:

а) $\sin 18° \cdot \cos 36° = \frac{1}{4}$; б) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80° = \frac{1}{8}$.

821. Найдите:

а) $\cos 20\alpha$, если $\sin 2\alpha \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7\alpha\right) - \cos 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5\alpha\right) \times$ $\times \cos 7\alpha = \frac{1}{6}$;

б) $\cos 16\alpha$, если $\sin 7\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) \cdot \cos 3\alpha + \cos 7\alpha \cdot \cos 4\alpha \times$ $\times \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) = \frac{1}{8}$.

822. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен R, а один из его острых углов равен α. Докажите, что радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $\frac{R\sin 2\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$.

823. Докажите, что для треугольника ABC со сторонами a, b, c верно равенство:

а) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$; б) $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ (формулы немецкого математика К. Моллвейде (1774–1825).

Уровень C

824. Существует ли такой угол x, при котором:

а) $\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{3}$; б) $\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \frac{3}{7}$?

825. Докажите тождество:

а) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;

б) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{12} + 3\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{12} + 3\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6\alpha$;

в) $\mathrm{tg}\, 20° + \mathrm{tg}\, 40° + \mathrm{tg}\, 50° + \mathrm{tg}\, 70° = \frac{4\sqrt{3}}{1 + 2\sin 10°}$.

826. Исследуйте, существуют ли наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{2\cos^2\alpha + \cos 4\alpha - 1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2} - \sin^4\dfrac{\alpha}{2}}$. Если существуют, то укажите их.

827. Найдите все значения $x \in [0; \pi]$, при которых выполняется условие $8\cos^4 2x - 8\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$.

828. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\dfrac{\alpha}{2}}$; б) $\sqrt{0{,}5 - 0{,}5\sqrt{0{,}5 + 0{,}5\cos\alpha}}$, если $0 < \alpha < \pi$.

829. Около окружности описана трапеция, продолжения боковых сторон которой пересекаются под углом α. Найдите радиус этой окружности, если основания трапеции равны a и b, причем $a > b$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

830. 1А) Вычислите: а) $\cos\dfrac{15\pi}{4}$; б) $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{6}\right)$; в) $\operatorname{tg} 600°$.

2А) Упростите выражение:

а) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + 4\sin 2\alpha$; б) $1 + \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$.

3А) Дано: $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Найдите: а) $\cos 2\alpha$; б) $\sin(60° + \alpha)$; в) $\operatorname{tg}(45° - \alpha)$.

4В) Докажите тождество $\dfrac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)} = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos\alpha$.

5С) Найдите значение выражения $\cos 72° \cdot \sin 54°$.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Тригонометрия возникла из необходимости решения практических задач астрономии и геометрии. В связи с этим древнегреческий астроном Гиппарх (II в. до н. э.) составил первые тригонометрические таблицы. Дальнейшее развитие тригонометрия получила в труде «Альмагест» древнегреческого ученого Птолемея (II в. н. э.). Позднее в IX–XV веках тригонометрия развивалась в разных странах как теория решения треугольников. В начале XVII столетия началось развитие нового направления тригонометрии – алгебраического.

Птолемей

аль-Баттани

Большой вклад в это направление внесли Л. Эйлер (1707–1783) и Н. И. Лобачевский (1792–1856). Леонард Эйлер впервые стал рассматривать синус, косинус и тангенс как отношение соответствующих отрезков к радиусу окружности и тем самым ввел в математику тригонометрические функции. Ему же принадлежит и введение обозначений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.

Найдите, пользуясь Интернетом:

а) теорему Птолемея, и установите ее связь с формулой суммы синусов двух углов;

б) сведения о том, какую тригонометрическую функцию называл «тенью» арабский ученый аль-Баттани (858–929) и с чем это связано.

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В результате изучения раздела надо

знать

- первоначальные понятия теории вероятностей;
- классическое и статистическое определение вероятности, понятие геометрической вероятности;
- формулу для нахождения вероятности.

уметь

- различать виды событий;
- находить вероятность события, используя классическое определение вероятности;
- устанавливать соответствие между относительной частотой и вероятностью события;
- применять первоначальные понятия теории вероятностей при решении задач.

31. Первоначальные понятия теории вероятностей. Классическое определение понятия вероятности

Учебные достижения по изучению темы:

- знать и различать понятия: случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, равновозможное и противоположное события, несовместные события, благоприятствующие исходы;
- знать классическое определение вероятности;
- уметь находить вероятность события, используя классическое определение вероятности.

Изучая элементы статистики в 7–8 классах, вы рассматривали различные события, которые уже произошли. Теперь мы будем исследовать *случайные* события, которые могут свершиться, а могут и не осуществиться. Например, при стрельбе по мишени можно промахнуться или попасть в цель; при подбрасывании монеты может выпасть герб или число (номинал монеты).

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно происходит. Например, если на Земле перевернуть открытый стакан с водой, то вода выльется.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти. Например, если производится один выстрел по мишени, то невозможны два попадания в нее.

События называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно. Например, ученик не может быть одновременно и в школе, и дома.

События называются *равновозможными*, если их наступление или ненаступление одинаково возможны и нет преимуществ в свершении одного перед другим. Например, одинаково возможны события извлечения экзаменационного билета с четным или нечетным номером. Попарно несовместные и равновозможные события называются *элементарными*.

Событие B называют *противоположным* событию A, если оно наступает лишь тогда, когда не наступает событие A. Например, выпадение четного и нечетного числа очков – противоположные события.

Исходы, из которых состоит событие, называют *благоприятствующими* ему, если они влекут за собой наступление этого события. Например, исходы: A_1, A_2 – выпадение 2, 4 соответственно очков при бросании игрального кубика благоприятствуют событию – выпадению четного числа очков.

Вероятностью события *A* называется отношение числа *m* благоприятствующих этому событию исходов к числу *n* всех равновозможных исходов.

Вероятность события A обозначается $P(A)$ – по первой букве французского слова *probabilite* (в переводе – вероятность). По определению $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число благоприятствующих исходов событию A, n – число всех равновозможных исходов, в которых может наступить событие A, причем $0 \le m \le n$.

Задача 1. В стопке 25 тетрадей. Какова вероятность того, что наугад выбранная тетрадь принадлежит девочке, если в классе 12 мальчиков?

Решение. Девочек в классе 13, поэтому число m благоприятствующих исходов равно 13. Число n всех исходов равно 25. Следовательно, $P(A) = \frac{13}{25}$.

Ответ. $\frac{13}{25}$.

Задача 2. Число выбирается случайным образом из множества всех нечетных двузначных чисел. Какова вероятность того, что выбранное число делится на 9?

Решение. Всего двузначных нечетных чисел 45, из них на 9 делятся числа: 27, 45, 63, 81, 99. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно 5, а $P(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Из классического определения вероятности следует, что $0 \le P(A) \le 1$, вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события равна 0. Если вероятность события

A больше вероятности события B, то говорят, что событие A более вероятно, чем событие B.

Из определения вероятности следует правило вычисления вероятности объединения двух событий, называемое *правилом суммы*: если события A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Действительно, если из общего числа n равновозможных исходов событию A благоприятствуют a исходов, а событию B благоприятствуют b других исходов, то событию A или B благоприятствуют $(a + b)$ исходов. Следовательно,

$$P(A \text{ или } B) = \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = P(A) + P(B).$$

Задача 3. В ящике находится 10 белых, 5 синих и 2 красных шара. Какова вероятность, что наугад извлеченный шар будет синего или красного цвета?

Решение. Всего исходов извлечения шаров 17. Событию извлечения синего или красного цвета благоприятствуют 7 исходов. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{7}{17}$.

Ответ. $\frac{7}{17}$.

Если исходы двух испытаний независимы, то вероятность, характеризующая какое-либо событие их совместного появления, равна произведению вероятностей каждого события: $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$. Например, пусть два стрелка независимо друг от друга выполняют по одному выстрелу в цель и вероятность того, что один из них не промахнется, равна 0,5, а вероятность попадания в цель другого 0,8. Тогда вероятность того, что оба попадут в цель равна: $0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$.

Задача 4. Из 15 лотерейных билетов выигрышными являются 2. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых пяти билетов: а) один билет выигрышный; б) два билета выигрышные?

Решение. а) Общее количество исходов равно числу сочетаний из 15 элементов по 5, то есть $C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$ $= 3003$. Благоприятствующими исходами будут: один выигрышный билет (таких ситуаций 2) и четыре невыигрышных билета (таких вариантов $C_{13}^4 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 715$). Следовательно, всего благоприятствующих исходов 1430. Тогда искомая вероятность равна $\frac{1430}{3003} = \frac{10}{21} \approx 0{,}48$.

б) Благоприятствующими исходами будут: два выигрышных билета (такая ситуация одна) и три невыигрышных билета (таких вариантов $C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$). Всего благоприятствующих исходов 286, а общее количество исходов 3003. Тогда искомая вероятность равна $\frac{286}{3003} = \frac{2}{21} \approx 0{,}10$.

Ответ. а) $\approx 0{,}48$; б) $\approx 0{,}10$.

ВОПРОСЫ

1. Какие события называются:

а) случайными; в) невозможными; д) равновозможными;
б) достоверными; г) несовместными; е) противоположными?

Приведите примеры.

2. Что называется вероятностью события?

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

831. Какие из следующих событий достоверные:

а) произвольно выбранное двузначное число меньше 100;

б) два попадания при трех выстрелах по мишени;

в) извлечение из купленного кулька с орехами вишневых косточек;

г) прыжок девятиклассника в длину с места на 0,5 м?

832. Какие из следующих событий являются невозможными – ничья в международных матчах:

а) по хоккею; в) по баскетболу;
б) по футболу; г) по гандболу?

833. Назовите для указанного события противоположное: а) достоверное событие; б) выигрыш партии в шахматы; в) совпадение дней рождения у двух наугад выбранных людей; г) попадание в цель из одного выстрела.

834. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру. Какова вероятность того, что наудачу набранная цифра будет правильной?

835. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика, на гранях которого имеются очки 1, 2, 3, 4, 5, 6, число выпавших очков будет:

а) кратно 3; б) простым числом; в) равно 8; г) меньше 7?

836. В партии 200 деталей, из которых 5 бракованных. Найдите вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется стандартной.

837. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число от 1 до 30 является делителем числа: а) 30; б) 45?

838. Одно из самых больших озер мира – Аральское море – обмелело за последние 50 лет более чем на половину. Вероятно ли, что за следующие 50 лет оно полностью высохнет?

839. Для дачи крови в поликлинику пришли 120 доноров, из которых 50 имеют первую группу крови, 25 % – вторую, остальные – третью. Какова вероятность того, что первый сдавший кровь донор имеет третью группу крови?

840. В школьной библиотеке 180 читателей. Из них 50 – учащиеся 1–4 классов, учащихся 5–9 классов на 80 % больше, а остальные – старшеклассники. Какова вероятность того, что наудачу взятая библиотечная карточка принадлежит старшекласснику?

841. Подбрасываются две монеты: медная и серебряная. Какова вероятность, что хотя бы на одной из них выпадет герб?

842. Окрашенный кубик распилили на 125 равных кубиков. Какова вероятность того, что наугад взятый кубик имеет три окрашенные грани?

843. Из полного набора костей домино (28 штук) выбирается одна кость. а) Какова вероятность того, что на ней сумма очков равна 6? б) Вероятность чего больше: выбора дубля или не дубля?

844. На карточках написаны натуральные числа от 1 до 20. Наугад выбираются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел на этих двух карточках равна 10?

845. Игра состоит в том, что из перемешанных букв, составляющих слово «теория», наудачу извлекаются 3. Какие известные вам два слова они могут образовать и какова вероятность получения каждого из них?

846. Из мешка с 33 жетонами, с нанесенными на них буквами русского алфавита, вынимают 6 жетонов. Какова вероятность того, что получится слово: а) Алматы; б) Москва?

847. На отрезке AB произвольно отмечены 5 точек. Какова вероятность того, что наугад выбранный отрезок из всех образовавшихся имеет одним из своих концов точку A?

Уровень B

848. Какова вероятность того, что наугад выбранный делитель числа 210 окажется простым числом?

849. Что более вероятно при игре в лото: выбор 6 номеров из 49 или 5 из 36?

850. Среди 100 ламп 4 неисправные. Какова вероятность того, что наудачу выбранные 3 лампы исправные?

851. Из пяти отрезков длиной 1 см, 3 см, 5 см, 7 см, 9 см выбираются наугад три. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?

Уровень C

852. Набирая номер телефона, человек забыл две последние цифры, которые различны. Какова вероятность того, что он выберет эти цифры?

853. Из букв слова «гипотенуза» выбираются наугад 6 букв и выкладываются по порядку. Какова вероятность того, что они образуют слово «гипноз»?

854. В первенстве по баскетболу принимают участие 10 команд, которые разбиты на две подгруппы путем жребия. Известно, что 2 команды более сильные. Какова вероятность того, что эти две команды окажутся:

а) в одной подгруппе; б) в разных подгруппах?

32. Статистическая вероятность

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятие статистической вероятности;
- иметь представление о законе больших чисел;
- уметь находить статистическую вероятность, используя относительную частоту случайного события.

Для массовых случайных событий бывает трудно найти их вероятность. В таких случаях на основе многочисленных однотипных испытаний устанавливают, какова относительная частота события, то есть чему равно отношение числа появления этого события в серии однотипных испытаний к числу всех испытаний. Эту частоту называют *статистической вероятностью* события. Например, если при контроле качества 1000 изделий обнаружено, что 5 из них с дефектами, то считают, что вероятность появления изделий с дефектами во всей многотысячной партии равна 0,005 или 0,5 %.

При бросании монеты можно опытным путем установить, какова относительная частота выпадения герба. Например, по проведенному испытанию, результаты которого показаны в таблице, можно заключить, что такая частота для серии большого количества бросаний монеты $\approx 0{,}5$.

Число бросаний монеты	Число выпадения герба	Относительная частота выпадания герба
100	49	0,49
200	101	0,505
250	127	0,508

Чем больше производится однотипных испытаний, тем ближе частота появления события к вероятности этого события. Это свойство вошло в историю под названием «закона больших чисел». Точнее оно сформулировано математиком Я. Бернулли: если в серии многочисленных независимых n испытаний вероятность события равна $P(A)$, то относительная частота $\frac{m}{n}$ события A приближенно равна $P(A)$, то есть $P(A) \approx \frac{m}{n}$, где $n \to \infty$.

ВОПРОСЫ

Объясните на примере понятие статистической вероятности.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

855. Для спортивной школы заказаны ботинки с коньками. В таблице приведена частота разных размеров ботинок. Какова вероятность того, что случайным образом взятая пара ботинок будет 39-го размера?

Размер ботинок	36	37	38	39	40	41	42
Количество	50	80	130	150	210	60	20

856. Ателье изготовило мужские головные уборы разных размеров в количестве, указанном в таблице. Какова вероятность того, что случайно взятый убор 56-го размера?

Размер	54	55	56	57	58
Частота	50	120	140	100	90

857. Конструктор при разрезании проволоки замеряет длину каждого куска и фиксирует ее в таблице частот появления куска определенной длины (в см). Какова вероятность того, что наугад взятый кусок будет иметь длину не меньшую 8 см, но меньшую 9 см?

Длина куска	[5; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
Частота	300	320	680	650	280

858. Сведения о заработной плате сотрудников одного предприятия представлены в таблице. Какова вероятность того, что зарплата случайно выбранного сотрудника больше 500, но не больше 600 у. д. е.?

Классы заработной платы (в у. д. е.)	[200; 300]	(300; 400]	(400; 500]	(500; 600]	(600; 700]	(700; 800]	(800; 900]
Количество сотрудников	54	145	310	128	79	46	15

859. Данные о возрасте жителей одного из районов представлены в интервальной таблице. Какова вероятность того, что произвольно указанный житель: а) не старше 15 лет; б) не младше 81 года; в) от 31 года до 60 лет?

Возраст (в годах)	1–15	16–30	31–45	46–60	61–75	76–80	81–95
Частота	1154	1478	1295	2576	909	543	45

860. За письменную работу по математике на подготовительных курсах учащиеся получили количество баллов, указанное в таблице. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный ученик набрал: а) наибольшее количество баллов; б) от 20 до 30 баллов?

Количество баллов	5	10	15	20	25	30	35	40
Количество учащихся	23	38	89	97	114	82	53	24

861. На одном из предприятий при контроле качества партии изделий массового спроса было произведено пять выборок по 500 изделий в каждой. Результаты проведенного контроля приведены в таблице. Какова вероятность (в %) изделий с дефектами во всей выпущенной партии?

Номер выборки	1	2	3	4	5
Количество изделий с дефектами	31	30	29	29	31

Уровень В

862. В таблице приведены сводные сведения о количестве подтягиваний на перекладине учащихся 7–11 классов одной из школ. Какова вероятность того, что случайно выбранный из них учащийся подтянулся на перекладине не менее 8 раз?

Число подтягиваний	5	6	7	8	9	10	11	12
Количество учащихся	29	43	71	65	52	40	23	11

863. На гистограмме (рисунок 76) указано распределение размеров юбок среди опрошенных женщин. Какова вероятность (в %) того, что случайно выбранная из них женщина носит юбку размера: а) 42; б) 56; в) 46 или 48, или 50?

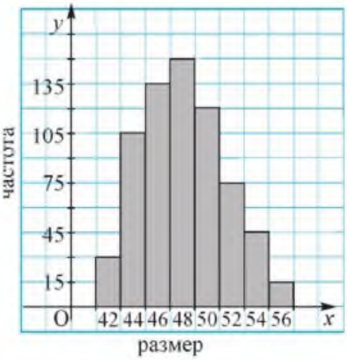


Рисунок 76

Уровень C

864. В таблице приведены данные о численности вкладчиков и их годовых вкладах. Какова вероятность того, что размер вклада случайно выбранного клиента одного или другого банка составил от 601 до 650 у. д. е.?

Размер вклада (в у. д. е.)	Численность вкладчиков	
	Банк № 1	Банк № 2
451–500	224	353
501–550	108	116
551–600	95	87
601–650	110	210
651–700	135	146
701–750	78	58

33. Геометрическая вероятность

Учебные достижения по изучению темы:

- знать понятие геометрической вероятности;
- уметь применять геометрическую вероятность при решении задач.

Для нахождения вероятности события мы рассматривали конечное число испытаний. Однако при решении многих задач для вычисления вероятности возникает необходимость рассматривать и бесконечные множества, характеризующие те или иные события. В таких случаях удобно построить геометрическую модель задачи. Вероятность, найденная с использованием такой модели, называется *геометрической вероятностью*.

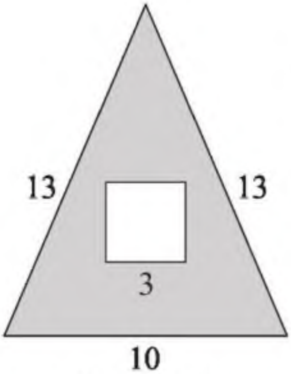


Рисунок 77

Задача 1. В равнобедренном треугольнике, основание которого равно 10 см, а боковая сторона – 13 см, содержится квадрат со стороной 3 см. Какова вероятность того, что произвольно взятая точка треугольника будет принадлежать и квадрату?

Решение. Событие состоит в том, что наудачу выбирается точка треугольника и благоприятствующим исходом будет то, что она принадлежит квадрату (рисунок 77). Поэтому за множество всех исходов принимается площадь треугольника, а множество всех благоприятствующих исходов – это площадь квадрата. Тогда искомая вероятность равна отношению площади квадрата к площади треугольника. Площадь квадрата равна 9 см^2. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{13^2 - 5^2} = 60$ (см^2). Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15$.

Ответ. 0,15.

Задача 2. Отрезок единичной длины делится произвольным образом на три отрезка. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник?

Решение. Длины отрезков могут быть выражены любыми тремя положительными числами, сумма которых равна 1. Для того чтобы из них можно было построить треугольник, надо чтобы любой из этих отрезков был меньше суммы двух других. Таких комбинаций бесконечно много. Рассмотрим промежуток [0; 1] и два числа x и y, принадлежащие ему. На координатной плоскости пара чисел $(x; y)$ – это точка, для которой $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$. Учитывая эти условия, эту точку можно рассматривать как произвольную точку квадрата со стороной 1. Исследуем, какую фигуру образуют все точки этого квадрата, удовлетворяющие условию задачи. Для этого рассмотрим два случая, когда $x \le y$ и $x \ge y$ (рисунок 78, *а*, *б*).

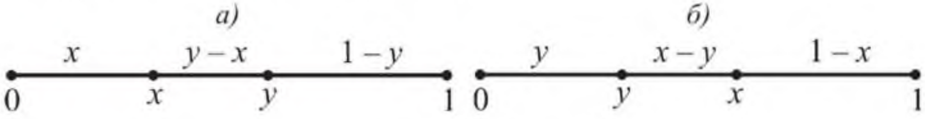


Рисунок 78

1) Пусть $x \le y$ (рисунок 78, *а*). Треугольник существует, если выполняются условия

$$\begin{cases} x < (y - x) + (1 - y), \\ y - x < x + (1 - y), \\ 1 - y < x + (y - x); \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0{,}5, \\ y < x + 0{,}5, \\ y > 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, множество благоприятствующих исходов – это все точки прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, площадь которого равна $\frac{1}{8}$ (рисунок 79).

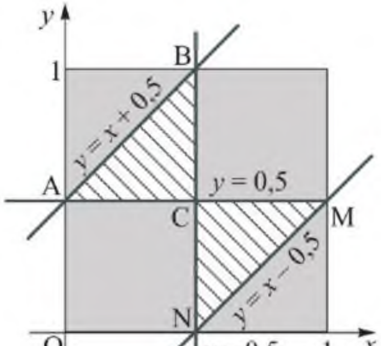


Рисунок 79

За множество всех исходов принимается площадь квадрата, равная 1. Итак, для этого случая искомая вероятность равна отношению $\frac{1}{8} : 1 = \frac{1}{8}$.

2) Пусть $x \geq y$ (рисунок 78, б). В этом случае треугольник существует, если: $\begin{cases} x > 0{,}5, \\ y < 0{,}5, \\ y > x - 0{,}5. \end{cases}$ Установите это самостоятельно.

Для данного случая искомая вероятность равна отношению площади треугольника CMN к площади квадрата и также равна $\frac{1}{8}$ (рисунок 79). Итак, вероятность того, что из образованных отрезков можно построить треугольник, равна: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ. 0,25.

ВОПРОСЫ

Объясните на примере понятие геометрической вероятности.

УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

865. Какова вероятность того, что наугад взятое решение системы неравенств $\begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ -3 \leq y \leq 2 \end{cases}$ является решением и системы неравенств $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ -2 \leq y \leq 1? \end{cases}$

866. Абонент ждет телефонного вызова с 14.00 до 15.00 часов. Какова вероятность того, что этот вызов произойдет в течение первых 10 минут?

867. В координатной плоскости построен круг радиуса 1,5 с центром в начале координат. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка этого круга с целочисленными координатами является его центром?

868. На плоскости построены две концентрические окружности, отношение радиусов которых равно 2. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка круга большего радиуса принадлежит кольцу, образованному этими окружностями?

869. Круговая мишень радиуса 12 см разделена пятью концентрическими окружностями, радиус первой из которых равен 2 см, а каждой следующей – на 2 см больше предыдущей. Какова вероятность попадания выстрела в мишень: а) в первое кольцо; б) в предпоследнее кольцо, считая от центра?

870. Какова вероятность того, что наугад взятая точка квадрата принадлежит закрашенной фигуре (рисунок 80)?

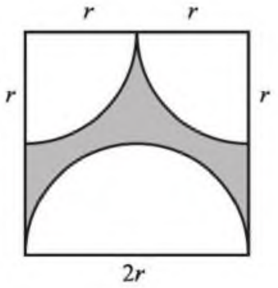


Рисунок 80

871. В круг радиуса 5 см вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что произвольно взятая точка круга принадлежит этому треугольнику?

872. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. Какова вероятность того, что случайно взятая точка круга является точкой и шестиугольника?

873. В равностороннем треугольнике, периметр которого равен 24 см, содержится квадрат со стороной 2 см. Какова вероятность того, что произвольно взятая точка треугольника не будет принадлежать квадрату?

Уровень В

874. Два действительных числа x и y выбирают наугад так, что сумма их квадратов меньше 81. Какова вероятность того, что сумма квадратов x и y окажется больше 49?

875. Вершинами квадрата являются вершины правильного восьмиугольника, взятые через одну. Какова вероятность того, что наугад взятая точка восьмиугольника принадлежит квадрату?

Уровень C

876. В равнобедренный треугольник, основание которого равно 8 см, а прилежащий к нему угол равен 30°, вписан круг. Какова вероятность того, что произвольно взятая точка треугольника принадлежит этому кругу?

877. В правильном пятиугольнике проведены все диагонали, при пересечении которых получается еще один пятиугольник. Какова вероятность того, что наугад взятая точка данного пятиугольника является точкой полученного пятиугольника?

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) В тире посетитель целится в круглую мишень радиусом 0,5 м, разделенную концентрическими окружностями на части. Найдите с точностью до 0,001 вероятность того, что он попадет в выделенный в этой мишени сектор, радиус которого 0,1 м, а центральный угол 1 радиан, если не промахнется по мишени.

Тихоходка

2) Из Антарктиды в лабораторию по микробиологии доставили в замороженном виде 5 тихоходок (микроскопических животных). Какова вероятность того, что одна из них оживет, если их разморозить? (Для ответа воспользуйтесь сведениями из Интернета о тихоходках.)

34. Упражнения на повторение раздела «Элементы теории вероятностей»

Уровень А

878. Какова вероятность того, что наугад выбранный делитель числа 15 является простым числом?

879. а) В тестовом задании приведены 5 вариантов ответов, из которых два ответа правильные. Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ правильный?

б) Гостиница «Казахстан» в Алматы насчитывает 26 этажей. Какова вероятность того, что туристу предложат номер на десятом или пятнадцатом этаже гостиницы?

Гостиница «Казахстан», Алматы

880. В сборочном цехе имеется партия валиков: первого размера – 150 штук, второго – 400 штук, третьего – 250 штук и четвертого – 150 штук. Какова вероятность того, что случайно взятый валик – третьего или четвертого размера?

881. Данные о распределении населения города по возрасту приведены в таблице. Какова вероятность (в %) того, что случайно выбранный житель младше 20 лет?

Возраст (лет)	до 10	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70 и старше
Численность (тыс. чел.)	12,3	15,4	13,5	16,2	15,7	10,9	9,3	7,7

882. Из множества всех четных двузначных чисел наугад выбирается одно. Какова вероятность того, что это число делится на 8?

883. В рукописи 202 листа. Какова вероятность того, что номер наугад взятого из нее листа делится на: а) 7; б) 13?

884. Из мешка с 33 жетонами, с нанесенными на них буквами русского алфавита, вынимают 4 жетона и располагают их в алфавитном порядке. Какова вероятность того, что получится имя Адия?

885. Асан, Бексултан, Гульдана, Дамеля случайным образом садятся за круглый стол. Какова вероятность того, что Бексултан и Дамеля окажутся рядом?

Уровень B

886. В координатной плоскости построен круг радиуса 2 с центром в начале координат. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка этого круга: а) принадлежит первой координатной четверти; б) с целочисленными координатами принадлежит биссектрисе первой координатной четверти?

887. Бекнияз и Фариза находили, чему равна вероятность того, что последняя случайно набранная цифра номера телефона равна 7 или кратна 3. У Бекнияза получился ответ 0,5, а у Фаризы 0,4. Чей ответ правильный?

888. Каждую букву слова «алгоритм» написали на карточке, а карточки перемешали. Какова вероятность того, что при случайном расположении этих карточек в ряд снова получится это слово?

Уровень C

889. Ержан запоминает одну из вершин выпуклого восьмиугольника. Зарина проводит диагональ этого восьмиугольника. Какова вероятность того, что одним из концов этой диагонали будет вершина, которую запомнил Ержан?

890. На книжной полке случайным образом расставлены 3 книги по алгебре и 2 – по геометрии. Какова вероятность того, что книги по одному предмету находятся рядом?

891. В партии 200 деталей, из которых 8 с дефектами. Какова вероятность того, что из 3 случайно выбранных деталей 1 с дефектом?

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

892. 1А) Какие из следующих событий являются достоверными?

а) Произвольно взятое простое трехзначное число не больше 998.

б) Извлечение цветного шара из набора голубых и желтых шаров.

в) Три попадания в мишень из трех выстрелов.

г) Раскрытие парашюта при прыжке.

2А) Монета подбрасывается дважды. Какова вероятность того, что герб не выпадет?

3А) В равнобедренный треугольник с основанием 3 дм и боковой стороной 2,5 дм помещен равносторонний треугольник, площадь которого равна 2 дм^2. Какова вероятность того, что произвольно отмеченная точка равнобедренного треугольника принадлежит и равностороннему треугольнику?

4В) В таблице представлены сводные сведения о достижениях учащихся 9–11 классов в беге на 100 метров. Какова вероятность (в %) того, что случайно выбранный из них учащийся пробежал эту дистанцию не медленнее, чем за 14 секунд?

Результат (сек)	14,1	14,2	14	13,8	13,5	13,1	12,8	12,3
Количество учащихся	36	45	69	60	51	43	21	9

5С) Имеется 10 заданий, среди которых 4 – самые трудные. Путем жребия учащемуся предоставляется возможность выбрать для выполнения 5 заданий. Какова вероятность того, что ему достанется только одна трудная задача?

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) На обратной стороне карточки записано двузначное число. Какова вероятность угадать, что сумма его цифр равна пяти?

2) Имеется 8 ключей от 8 дверей, к каждой из которых подходит только один ключ. Какое наименьшее количество попыток надо сделать, чтобы открыть все эти двери имеющимися ключами наверняка, если неизвестно, к какой двери какой ключ подходит?

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Задачи на нахождение вероятности события возникали давно при расчетах выгоды торговли, стратегии азартной игры. (Слово «азарт» понимается как сильное увлечение и происходит от французского слова *hasard*, что означает случай, риск.)

Теория вероятностей как наука стала бурно развиваться лишь с XVII века. Большой вклад в ее развитие внесли математики: нидерландский Х. Гюйгенс (1629–1695), опубликовавший первую известную в мире книгу по теории вероятностей «О расчетах в азартной игре», французский Б. Паскаль (1623–1662), швейцарский Я. Бернулли (1654–1705), английский А. Муавр (1667–1754), французский С. Пуассон (1781–1840), русские П. Л. Чебышев (1821–1894), А. Н. Колмогоров (1903–1987).


Х. Гюйгенс


А. Н. Колмогоров

Найдите в Интернете задачу о вероятности выпадения очков при бросании игральной кости и ее решение, которое предложил Б. Паскаль одному из игроков по его просьбе.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–9 КЛАССОВ

Числовые и алгебраические выражения и их преобразования

Уровень А

893. Запишите число противоположное и число обратное значению выражения:

а) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-1\frac{1}{15}\right):0,8+0,2$; б) $0,1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}-0,5^0+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

894. Найдите x из равенства $\left(1\frac{3}{4}:1,125-1,75:\frac{2}{3}\right)\cdot1\frac{5}{7}=x-\frac{1}{1,2}$.

895. Рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{26}-1)(\sqrt{26}+1)}$; б) $\sqrt{125}+(\sqrt{6})^2-\sqrt{(-5)^2}$?

896. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\left(\frac{1}{a+3}-\frac{6}{9-a^2}\right)\cdot\left(\frac{a-3}{a^2+9}+\frac{6a}{a^3-3a^2+9a-27}\right)$ при $a=\frac{1}{7}$;

б) $\frac{3b+2}{3b-2}:\left(\frac{18b}{27b^3-8}+\frac{6b}{9b^2+6b+4}-\frac{1}{3b-2}\right)-\frac{6b+8}{3b-2}$ при $b=-2\frac{1}{6}$;

в) $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, если $a=3^{-1}$, $b=7^{-1}$;

г) $\frac{(a+b)^{-1}+(a-b)^{-1}}{(a+b)^{-1}-(a-b)^{-1}}$, если $a=\sqrt{27}$, $b=\sqrt{48}$.

897. а) Во сколько раз 2 % от 4 больше 0,4 % от 1?

б) Сравните положительные числа m и n, если $\frac{3}{7}$ числа m равны 35 % от числа n.

898. а) Яблоки подешевели на 20 %. Сколько килограммов яблок можно купить за те же деньги, на которые прежде можно было купить 2,8 кг яблок?

б) Для покраски пола в комнате израсходовали 2 кг краски. Хватит ли 1,5 кг такой краски для покраски пола в комнате, длина которой в 1,5 раза меньше, а ширина такая же?

899. Укажите все цифры, которые можно поставить вместо знака *, чтобы четырехзначное число 379* делилось на 6.

900. Докажите, что: а) $8^5 + 4^7$ делится на 12; б) $8^4 - 4^5$ делится на 24; в) $4n^3 - 4n + 6$ делится на 3 при любом $n \in Z$.

901. Докажите, что при любом целом n верно равенство:
а) $3^{4n} + 9^{2n} + 81^n = 3^{4n+1}$; б) $9^{3n} + 9^n \cdot 81^n + 27^{2n} = 3^{6n+1}$.

902. Вычислите:

а) $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{81}}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{\dfrac{1}{\sqrt{25}} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} + (\sqrt{3})^0 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}$; б) $\dfrac{3 \cdot 9^{-2} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{64}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-4}}{\dfrac{1}{\sqrt{49}} \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2} + (\sqrt{5})^0 \cdot \left(\dfrac{1}{21}\right)^{-1}}$.

903. Упростите выражение: а) $\dfrac{(a^{12}\sqrt{a^6})^2}{a^4 \cdot a^3}$; б) $\left(-\dfrac{2a}{3b^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{a^{-2}}{4b^5}\right)^{-1}$.

904. Сократите дробь:

а) $\dfrac{25x^2 - 10xy + y^2}{y^2 - 25x^2}$; в) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$;

б) $\dfrac{x - 6\sqrt{xy} + 9y}{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}$; г) $\dfrac{8x^2 - 2x - 1}{16x^2 + 8x + 1}$.

905. Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 9, если известно, что число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, на 9 меньше искомого.

906. Произведение двух положительных чисел равно их среднему арифметическому, а разность этих чисел равна 1. Найдите эти числа.

Уровень В

907. Вычислите: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{7} + 2}$.

908. Найдите x из равенства $\dfrac{3{,}2(6)}{(5{,}5 + x) : 21\dfrac{3}{7}} - 1\dfrac{3}{8} = 5{,}625$.

909. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$, если $a = 2{,}5$, $b = -4{,}5$;

б) $\frac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+x+1}$, если $x = 0{,}5$;

в) $\frac{a^2+ab+b^2}{2ab-b^2}$, если $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

910. Выполните действия: а) $\frac{5^4 \cdot 9^2 - 3 \cdot 15^2}{45^2 + 15^3}$; б) $\frac{5{,}3^2 - 4{,}7^2}{5{,}3^2 + 10{,}6 \cdot 4{,}7 + 4{,}7^2}$.

911. Упростите выражение $x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}}$, если $x < -1$.

912. а) Бексултан купил акции и через год продал их по номинальной стоимости, получив вместе с прибылью сумму 230000 тенге. Сколько акций было куплено, если прибыль составила 15 % от стоимости акции и равна 1500 тенге?

б) Магазин продал продукцию со скидкой 10 % от первоначально назначенной цены и получил при этом 18 % прибыли. Какой процент прибыли планировалось получить вначале?

913. Из четырех данных чисел первые три относятся как $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$. Найдите эти числа, если известно, что четвертое из них составляет 15 % от второго, а второе – на 8 больше суммы остальных.

Уровень С

914. Вычислите: $\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + \ldots + \frac{7}{57 \cdot 64}$.

915. Известно, что $x + y = \sqrt{44}$, $x - y = \sqrt{52}$. Найдите $x^3 + y^3$.

916. Докажите, что верно неравенство $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$.

917. Используя метод математической индукции, докажите, что при любом $n \in N$ значение выражения $4n^3 + 8n + 3$ делится на 3.

918. Цену на товар, равную 64 у.д.е, трижды увеличивали на одно и то же число процентов. Затем полученную цену трижды уменьшали на это же число процентов. Найдите это число процентов, если цена товара стала равной 27 у.д.е.

919. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 4. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 2 и в остатке 5. Найдите исходное число.

Уравнения, неравенства и их системы

Уровень А

920. Найдите больший корень уравнения $x^2 - 100x + 2331 = 0$ и вы узнаете, сколько миллиардов киловатт часов составляют гидроэнергетические ресурсы Казахстана.

Шардаринская ГЭС

921. Найдите все значения p, при которых корень уравнения:

а) $5x + 2 = 5p$ меньше -10;

б) $7(x - p) = 3$ не меньше 5.

922. Решите уравнение:

а) $\dfrac{5x^2 - x}{x} = 1$; в) $\dfrac{5}{2 + 3x} + \dfrac{3x}{3x - 2} = \dfrac{8}{9x^2 - 4}$.

б) $\dfrac{x^2 - x}{x - 3} = \dfrac{6}{x - 3}$;

923. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{-6 - 2x}$; в) $\dfrac{\sqrt{x + 2}}{x^2 + 6x + 5}$?

б) $\sqrt{-x^2 + x + 20}$;

924. Найдите корни уравнения:

а) $y^4 - 2y^2 = 0$; в) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$;

б) $t^3 + 11t^2 + 28t = 0$; г) $k^3 + k^2 - 16k - 16 = 0$.

925. Найдите два числа, разность которых равна 2, а произведение – 195.

926. а) Площадь первого поля 47 га, второго – 39 га. С этих полей всего собрали 2220 ц ржи. Какова урожайность ржи на втором поле, если она на 4 ц/га больше, чем на первом?

б) Бригада рабочих, перевыполняя ежедневное задание по распиловке древесины на 5 м^3, выполнила недельное задание (6 рабочих дней) за 5 дней. Найдите плановое задание на один день.

927. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x - 3 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 5x - 24 \leq 0. \end{cases}$

928. Решите уравнение:

а) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$; в) $(x^2 - 9)^2 - 19(x^2 - 9) + 48 = 0$;

б) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$; г) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

929. Решите неравенство:

а) $(x^2 + 16)(x^2 - 9) \geq 0$; в) $|x^2 - 16|(x^2 - 4x + 3) \leq 0$;

б) $\dfrac{(5x-6)(x+8)}{x-2} \leq 0$; г) $(x - 3)^2(x^2 - 7x - 8) \geq 0$.

930. Используя графики уравнений, установите, имеет ли решение система уравнений, если да, то сколько:

а) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - 4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ y = x; \end{cases}$

931. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 3x + 1, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ (x + y)xy = 120; \end{cases}$

932. Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства: а) $y \leq 2x + 1$; б) $y \leq 2x - x^2$; в) $x^2 + y^2 < 9$.

933. Сколько целочисленных решений имеет система неравенств:

а) $\begin{cases} -2 < x < 2, \\ -1 < y < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y > (x - 2)^2 + 1, \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 < 25? \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ y < |x|; \end{cases}$

934. Из города в деревню, расстояние между которыми 168 км, выехали одновременно две машины. Известно, что скорость грузовой машины на 16 км/ч меньше и в пути легковая машина делала остановку на 1 час, а грузовая – на 20 минут. В деревню они прибыли одновременно. Найдите скорость каждой машины.

935. Две молотилки обмолачивают весь хлеб за 12 дней. Если бы первая молотилка обмолотила половину всего хлеба, а затем вторая – остальную часть, то они проработали бы 25 дней. За сколько дней каждая из них в отдельности могла бы выполнить эту работу?

Уровень В

936. Решите уравнение $(a^2 - 1)x = a - 1$ относительно переменной x.

937. Найдите значения c, при которых система уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 3 \\ 4x + 3y = c \end{cases}$ не имеет решений;

б) $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ cx + 2y = 12 \end{cases}$ имеет единственное решение;

в) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 4 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y = c \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

938. При каких значениях c корни уравнения $3x^2 + 2x + c = 0$ относятся как 2 : 3?

939. Найдите коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, являющиеся его корнями. Запишите эти уравнения.

940. Найдите произведение корней уравнения:

а) $(2x^2 + 2x - 5)(x - 5) = (3x^2 - 4x + 2)(x - 5)$;

б) $x(x - 2)(x - 4)(x - 6) = 33$;

в) $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47$.

941. Решите неравенство:

а) $x^2 + \sqrt{x^2} < 0{,}75$; б) $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} \geq 0$.

942. Длина основания равнобедренного треугольника – 18 см, а его периметр – не более 40 см. Какую длину может иметь боковая сторона этого треугольника?

943. Решите систему неравенств: а) $\begin{cases}|x+1| \geq 3,\\|3-x|<4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{8-7x+2x^2}{2+x^2}>1,\\x^3-x^2-6x \leq 0.\end{cases}$

944. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\x^2-49y^2=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-5y^2=-1,\\3x+7y^2=1.\end{cases}$

945. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств: а) $\begin{cases}x^2-y^2 \geq 0,\\|x| \leq 2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y>\dfrac{4}{x},\\x^2+y^2 \leq 25.\end{cases}$

Уровень С

946. Найдите, при каких значениях a решением уравнения $(a^2-3a+2)x=|a|-1$ является любое число.

947. Составьте приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен: а) $4+\sqrt{3}$; б) $3-\sqrt{5}$.

948. Решите уравнение $x^2+4x+c=0$, если сумма квадратов его корней равна 10.

949. Решите уравнение: а) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$;

б) $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

950. Решите неравенство: а) $\dfrac{9}{x^2-2x} \geq x^2-2x$; б) $\left|\dfrac{x-5}{3x^2-5x-2}\right| \geq 1$.

951. На реке, скорость течения которой 5 км/ч, расположены по направлению ее течения пристани A, B, C, причем B – середина AC. От пристани B одновременно отплывают плот к пристани C и катер к пристани A. Известно, что собственная скорость катера v км/ч. Дойдя до пристани A, катер развернулся и стал двигаться к пристани C. Найдите значения v, при которых катер прибудет к пристани C позже, чем плот.

952. При каких значениях a система уравнений:

а) $\begin{cases} y + x^2 = a, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ имеет 3 решения; б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$ имеет 4 решения?

953. Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x + y = 12, \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$

954. Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой являются решениями системы неравенств $\begin{cases} |x| + |y| \le 4, \\ |y| \le 2. \end{cases}$

Последовательности

Уровень А

955. Запишите первые четыре члена последовательности (a_n), заданной формулой n-го члена:

а) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5n-2}$; в) $a_n = (-1)^n n^2$;

б) $a_n = 2^n + (-2)^n$; г) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!}$.

956. Запишите четыре члена последовательности:

а) четных натуральных чисел, делящихся на 5;

б) нечетных натуральных чисел, делящихся на 3;

в) натуральных чисел, кратных 3 и 4;

г) натуральных чисел, которые при делении на 9 дают остаток 8.

957. Составьте формулу n-го члена для каждой из последовательностей, полученной при решении задачи 956. Являются ли эти последовательности арифметическими прогрессиями?

958. Последовательность (c_n) задана формулой $c_n = 3^n$. Установите, верно ли равенство $c_{n+1} + c_{n+2} = 12c_n$.

959. Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = n^2 + 8n + 42$. Является ли членом этой последовательности число: а) 51; б) 98?

960. Сколько положительных членов имеет последовательность (y_n), заданная формулой $y_n = -n^2 - 2n + 3$?

961. Найдите седьмой член арифметической прогрессии (a_n), если известно, что $3a_3 + 4a_{10} = 140$.

962. При каком значении переменной x числа $x + 8$, $x + 2$, $3x - 2$ будут последовательными членами: а) арифметической прогрессии; б) геометрической прогрессии?

963. Три различных числа a, b, c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа $a - b$, $b - c$, $a - c$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

964. Специалист за несколько дней заработал 50000 тенге. В первый день – 9000 тенге, а в каждый следующий на 50 тенге больше. За сколько дней он заработал эту сумму?

965. Вычислите $100 + 96 + 92 + \ldots + 8 + 4 - 98 - 94 - 90 - \ldots - 6 - 2$.

966. Купец имел 14 чарок серебряных, причем веса чарок растут по арифметической прогрессии с разностью 4. Последняя чарка весит 59 лотов. Сколько весят все чарки? (Задача из книги «Арифметика» Л. Ф. Магницкого; лот – русская древняя мера, равная 12,8 грамма.)

967. Между числами 2,5 и 20 вставьте два таких числа, чтобы они вместе с данными образовывали геометрическую прогрессию.

968. У семи лиц есть 7 кошек. Каждая кошка съедает по 7 мышей; каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя; из каждого колоса можно вырастить по 7 мер зерна. Сколько мер зерна спасают эти кошки? (Старинная задача из папируса Райнда, около 2000 лет до н.э.)

969. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (x_n), если $x_3 = 9$, $x_6 = 243$.

970. В геометрической прогрессии 6 членов. Найдите ее первый член, если сумма первых трех ее членов равна 28, а сумма трех последних равна 3,5.

971. В геометрической прогрессии первый член положителен. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых трех членов будет наименьшей?

972. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую арифметическую прогрессию, равна 24. Если третье число увеличить на 4, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите три исходных числа.

973. Сумма трех первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 19. Найдите ее пятый член, если сумма этой прогрессии равна 27.

Уровень B

974. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Найдите ее:
а) наибольший член, если $a_n = -n^2 + 10n - 21$;
б) наименьший член, если $a_n = n^2 - 16n + 44$.

975. Докажите, что если числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, то и числа a^2, b^2, c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

976. Периметр треугольника 36 см, причем длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Можно ли найти длину хотя бы одной из сторон? Какие целые значения могут принимать длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах?

977. Решите уравнение $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$, если в его левой части записана сумма членов арифметической прогрессии.

978. При каком значении разности арифметической прогрессии, шестой член которой равен 8, произведение третьего и десятого членов будет наибольшим?

Уровень C

979. Последовательность (a_n) задана рекуррентно $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 5a_n + 2$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{2}(5^n - 1)$.

980. Найдите трехзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию и которое делится на 45.

981. Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = 5n - n^2$. Найдите восьмой член этой прогрессии.

982. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 7x + a = 0$, x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 + 5x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанной последовательности арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

983. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите исходные числа.

Тригонометрия

Уровень А

984. Шкив вращается с угловой скоростью $\frac{\pi}{9}$ рад./с. За какое время он сделает полный оборот?

985. Найдите радианную меру дуги окружности, радиус которой равен 12 см, если длина этой дуги равна 2,4 дм.

986. Минутная стрелка часов имеет длину 0,6 м. Какова длина дуги, которую описывает конец стрелки в течение: а) 15 минут; б) 50 минут?

987. Найдите радианную меру углов правильного: а) пятиугольника; б) десятиугольника.

988. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же угла быть соответственно равными: а) $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$; б) $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$?

989. Найдите значение выражения $\sin 225° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 330° \times$ $\times \operatorname{ctg} 240°$.

990. Докажите тождество:

а) $\frac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 - \sin 2\alpha$;

б) $(\sin^2\alpha + 1)^2 - (\sin^2\alpha - 1)^2 = 4 - 4\cos^2\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha$;

г) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) + \sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \cos(\pi - \alpha) + \cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

991. Существует ли такой угол α, что значение выражения $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ равно: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{7}$?

992. Найдите наименьшее значение выражения $\left(\frac{2}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2$, где $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

993. Найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

б) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$.

994. Не используя таблицу значений тригонометрических функций, вычислите: а) $\sin 165°$; б) $\cos^2 12° - \sin 42° \cdot \sin 18°$.

995. Найдите значение выражения:
а) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x$, если $\mathrm{ctg}\, 2x = a$; б) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$, если $\sin 2x = b$.

996. Верно ли равенство:

а) $\cos 160° - \cos 140° = -\sin 10°$; в) $\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{5} = 0$;

б) $\cos 160° + \cos 80° = -\cos 40°$; г) $\sin 130° + \sin 110° = \cos 10°$?

997. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos 6x - \sin 6x \cdot \mathrm{ctg} 3x}{\cos 6x + \sin 6x \cdot \mathrm{tg} 3x}$; б) $\frac{\cos 10x \cdot \mathrm{tg} 5x - \sin 10x}{\cos 10x \cdot \mathrm{ctg} 5x + \sin 10x}$.

998. Докажите, что $\sin^2 5 + \sin^2 2 + \cos 7 \cdot \cos 3 = 1$.

999. Какие значения может принимать:

а) $\mathrm{tg}\, x$, если $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{2}$; б) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, если $\mathrm{tg}\, x = -2\sqrt{2}$?

Уровень В

1000. Найдите все значения x, при которых верно неравенство:
а) $\sin^2 x - 4\cos x + 4 \le 0$; б) $\cos^2 x + 5\sin x - 5 \ge 0$.

1001. Найдите значение выражения: а) $\sin\frac{13\pi}{12}$; б) $\cos\frac{23\pi}{12}$.

1002. Известно, что $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = a$. Найдите $\sin^2 2x$.

1003. В прямоугольный треугольник вписана окружность, причем точка касания делит один из его катетов на отрезки 6 см и 8 см. Найдите тангенсы острых углов этого треугольника.

1004. Докажите, что $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$.

Уровень C

1005. Тангенс угла между большей диагональю ромба и его стороной равен $2 - \sqrt{3}$. Найдите углы ромба.

1006. Не используя таблицу значений тригонометрических функций, вычислите: а) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}$; б) $\sin^6\frac{3\pi}{8} + \cos^6\frac{3\pi}{8}$.

1007. Докажите, что: а) $\operatorname{tg} 2x > 2\operatorname{tg} x$, если $0 < x < \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \geq 1 + \operatorname{ctg} x$, если $0 < x < \pi$.

Функции

Уровень A

1008. Запишите формулу, выражающую то, что:

а) длина C окружности является функцией, зависящей от длины ее радиуса R;

б) площадь S круга – функция длины его радиуса;

в) площадь правильного многоугольника со стороной, равной 1, является функцией, зависящей от числа n его сторон.

1009. Является ли графиком функции линия, изображенная на рисунке 81, *а*, *б*? Ответ объясните.

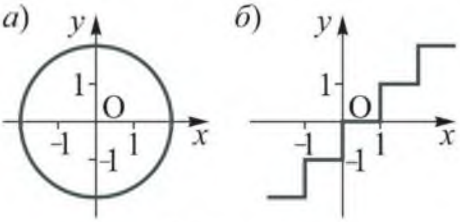


Рисунок 81

1010. График какого из уравнений $x + y = 0$, $y + 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $y - x = 4$ – это прямая, параллельная оси Oy? Является ли эта зависимость функцией?

1011. График какой из функций $y = -7x + 2$, $y = 5x - 3$, $y = 5$ образует с положительным направлением оси Ox острый угол?

1012. Для линейной функции $y = 8x - 2$ запишите какую-либо функцию, график которой: а) параллелен графику этой функции; б) пересекает график этой функции.

1013. Задайте уравнением прямую, если ее график составляет с положительным направлением оси Ox угол 135° и проходит через точку $(4; -2)$.

1014. График линейной функции проходит через точки $A(-2;\ 3)$ и $B(4;\ -3)$. Найдите все значения b, при которых точка $C(4b;\ 4 - b)$ принадлежит этому графику.

1015. Среди функций $y = 4x + 5$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = -\frac{4}{x}$, $y = -8x + 2$, $y = -\sqrt{x}$ укажите: а) возрастающие; б) убывающие на всей области определения.

1016. Вершина какой из указанных парабол принадлежит оси абсцисс: а) $y = x^2 - 3$; б) $y = x^2 - 3x$; в) $y = (x - 3)^2$; г) $y = (x - 3)^2 + 1$?

1017. Найдите координаты вершины параболы и множество значений функции: а) $y = x^2 - 4x + 8$; б) $y = -x^2 + 6x + 7$.

1018. Найдите координаты вершины параболы, фрагмент которой изображен на рисунке 82.

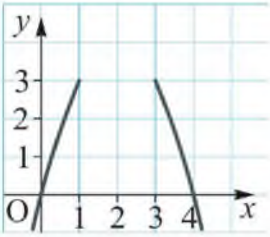


Рисунок 82

1019. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{1 - x}$;

в) $y = \sqrt{\frac{3 - x}{x^2}}$;

б) $y = \frac{7}{x^2 - 16}$;

г) $y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - x - 12}$.

1020. Укажите область определения, множество значений и постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = 2x - 1$;

в) $y = \sqrt{x + 4}$;

б) $y = -\frac{8}{x}$;

г) $y = x^2 - 2x + 3$.

Используя график, укажите промежуток, на котором функция возрастает.

1021. Ломаная $ABCDF$ является графиком функции $y = f(x)$ (рисунок 83). Найдите:

а) область определения функции;

б) множество ее значений;

в) нули функции;

г) промежутки убывания функции;

д) значения x, при которых $y < 0$.

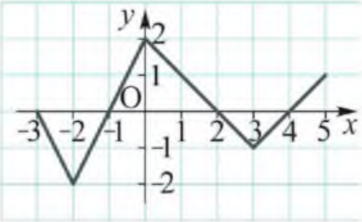


Рисунок 83

1022. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y + x = 6, \\ y = |x^2 - 8x + 12|; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y + |x| = 2, \\ y = x^2 + 6x + 8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 4, \\ y = \sqrt{x + 2}; \end{cases}$

Уровень В

1023. а) Гипотенуза прямоугольного треугольника – переменная c, а один из его острых углов равен 15°. Выразите площадь этого треугольника как функцию аргумента c.

б) Токарю по плану надо изготовить за смену 60 деталей. Он перевыполнил план на x %. Составьте формулу, выражающую зависимость числа y изготовленных токарем деталей от x. Найдите по этой формуле: 1) значение y, если $x = 10$; 2) значение x, если $y = 72$.

1024. При каком значении k графики функций $y = kx + 9$ и $y = 2x - 5$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс?

1025. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 6x + c$, если ее наименьшее значение равно 1;

б) $y = -x^2 + 4x + c$, если ее наибольшее значение равно 2.

1026. Исследуйте, четной или нечетной является функция:

а) $y = x^2 - |x| + 2$; б) $y = \dfrac{(2x-1)^3 - (2x+1)^3}{x}$.

1027. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 - \dfrac{x}{|x|}$;   в) $y = |x - |x - 4||$.

б) $y = x - \sqrt{(x+3)^2}$;

1028. Решите задачу, используя графики функций. Найдите два положительных целых числа, если второе больше квадрата первого и сумма квадрата разности первого числа и 3 и квадрата разности второго числа и 4 меньше 4.

Уровень С

1029. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, переменная r, а острый угол трапеции равен 30°. Выразите площадь этой трапеции как функцию аргумента r.

1030. Исследуйте, при каких значениях m начало координат находится на расстоянии 5 от вершины параболы: а) $y = x^2 - 6x + m$; б) $y = x^2 + 2mx + 13$.

1031. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$;   б) $y = \begin{cases} -1, \text{ если } x < -2 \text{ или } x > 2, \\ -x^2 + 3, \text{ если } -2 \le x \le 2. \end{cases}$

1032. Докажите, что функция: а) $y = x^3 + x$ возрастающая; б) $y = \dfrac{1}{x} - x$ убывает на множестве положительных чисел.

Элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей

Уровень А

1033. Сколькими способами можно рассадить на скамейке 4 учащихся?

1034. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

1035. Сколько прямых можно провести через 5 данных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

1036. Сколько различных трехцветных юбок можно сшить из тканей семи различных цветов?

1037. Сколькими способами из 10 учащихся можно составить две команды для игры в баскетбол?

1038. Сколькими способами из 20 солдат можно выбрать 4 для выполнения задания?

1039. Из 7 бегунов надо составить команду для участия в эстафете из 4 этапов: 500 м, 400 м, 200 м и 100 м. Сколькими способами это можно сделать?

1040. В чемпионате КХЛ (Континентальной хоккейной лиги) участвуют 12 команд, 8 из которых выходят в следующий этап соревнований. Сколько есть вариантов распределения первых восьми мест между ними?

1041. В «Словаре языка Пушкина» 22000 различных слов, из которых 6000 он использовал в своих произведениях более одного раза. Какова вероятность того, что случайно взятое слово из этого словаря поэт использовал только один раз?

1042. Какова вероятность того, что случайно открытый лист перекидного календаря невисокосного года соответствует 30 числу?

1043. Буквы слова «выборка», написанные на карточках, перемешали. Какова вероятность того, что, выбирая и последовательно выкладывая эти карточки, снова получим это слово?

1044. Из 200 опрошенных учащихся оказалось, что 106 из них занимаются спортом, 84 – музыкой и 30 – музыкой и спортом, а остальные увлекаются математикой. Какова вероятность того, что случайно указанный учащийся из них увлекается математикой?

Уровень B

1045. Вспомните все свои оценки за СОР по алгебре в текущем учебном году и найдите дисперсию этих данных.

1046. Найдите наибольшее возможное число элементов множества, в котором все элементы различные, если число перестановок из них не больше 10 000?

1047. В равнобедренной трапеции $ABCD$ верхнее основание BC и ее высота BH равны по 1 дм, угол A равен 15°. Докажите, что вероятность того, что случайно взятая точка этой трапеции принадлежит треугольнику ABH, равна $\frac{3+\sqrt{3}}{12}$.

Уровень С

1048. Какова вероятность того, что наугад взятое число из множества $\{-(\sqrt{7}+5); \sqrt{7}-5; -1; 3\}$ является корнем многочлена $x^4+8x^3-5x^2-66x-54$?

1049. В классе 12 мальчиков и 8 девочек. Для дежурства по жребию выбираются четверо из них. Какова вероятность того, что это будут двое мальчиков и две девочки? Ответ запишите с точностью до 0,1.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

1050. 1A) Вычислите: а) $\frac{5\cdot(3\cdot7^9-19\cdot7^8)}{7^{10}+3\cdot7^9}$; б) $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{14}}{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1)}$.

2A) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2-y^2=7,\\x^2+y^2=25.\end{cases}$

3A) Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 8 и не превышающих 142.

4B) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha$.

5C) Найдите площадь фигуры, координаты всех точек которой являются решениями системы неравенств $\begin{cases}y\geq-|x+1|-1;\\x^2+2x+2y+y^2\leq7.\end{cases}$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. б), в). **2.** а) 40,8; б) 7; в) 9; г) 143. **3.** б) $-3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$; в) $0{,}6\sqrt{0{,}4} > 0{,}8\sqrt{0{,}2}$. **4.** в) $2\sqrt{5m}$; г) $2\sqrt{10n}$. **5.** а), б) – не проходит. **6.** а) Пересекает; б) нет. **7.** а) (0,81; 0,9); б) (0,64; 0,8). **8.** а), б), д), е). **9.** а) 0; 2,5; б) 0; 25; в) ±0,7; г) ±10. **10.** Является. **11.** а) 8; –3; б) 6; 7; в) –2; г) 3. **12.** б) $x_1 + x_2 = -12$, $x_1 \cdot x_2 = 7$; в) $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = -2$. **13.** –5, $b = 12$, $x^2 + 12x + 35 = (x + 7)(x + 5)$. **14.** б) –2 и 1; в) 0. **15.** а) 15 и 16; б) 5 и 9. **16.** а) 320 м; б) 12 см, 16 см, 20 см. **17.** а) 8 см; б) 10 см. **18.** в). **19.** а) (2; 4); б) (3; 16). **20.** а) 1; б) 1. **21.** а). **22.** а) $[-8; 8]$; б) $(-\infty; -4]\cup[4; +\infty)$. **23.** а) $\frac{2}{5}$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$. **24.** а) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; б) $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; в) $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$; г) нет решений. **25.** а) $[1; 3]$; б) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$. **26.** а) $(-1; 4)$; б) $(-\infty; -3]\cup[2; +\infty)$; в) $(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$; г) $\{2\}$. **27.** а) $[-5; 5]$; б) 3. **28.** а), б) – не являются. **29.** $\left(2\sqrt{5} + \sqrt{\frac{1}{5}}\right) > \left(2\sqrt{7} - \sqrt{\frac{1}{7}}\right)$. **30.** $(\sqrt{29} - \sqrt{17}) > (\sqrt{34} - \sqrt{21})$. **31.** а) 1; б) $\frac{4}{5}$; в) 32; г) 5. **32.** а) $\frac{a^2+1}{2|a|}$; б) $\left|\frac{b^2-1}{2b}\right|$. **33.** а) 2; б) –1; в) ±5; г) 5; д) ±1; ±3; е) –0,5; 1,5. **34.** Используйте теорему Виета. **35.** а) $[-3; +\infty)$; б) $(-\infty; 4]$; в) $[5; +\infty)$; г) $(-\infty; -2]$. **36.** а) $\left(\frac{6}{19}; -1\frac{9}{19}\right)$; б) $\left(-\frac{2}{3}; -3\frac{1}{9}\right)$. **37.** 95 км; ≈ 40 км. **38.** Неверно. **39.** а) $y = -x^2 - 4x - 5$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$. **40.** 9 см. Составьте уравнение, используя свойство прямоугольного треугольника: катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу. **41.** 6 см, 8 см. Обозначьте радиус вписанной окружности x см и составьте уравнение, используя свойство касательных к окружности, проведенных из одной точки, и теорему Пифагора. **42.** 3 ч и 6 ч. **43.** а) $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$; б) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **44.** а) (1; 1); б) (4; 2). **45.** 4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе каждой дроби. **46.** а) 2; б) $2\sqrt{7}$; в) 33; г) 253. Представьте подкоренное выражение в виде квадрата суммы или разности двух чисел. **47.** 4,4. Запишите указанное выражение в виде дроби и используйте теорему Виета (учтите, что $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$). **48.** а) 0; ±7; б) ±5; в) –3; –2; г) –5. **49.** а) 1; б) 1; 2; $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$; в) –1; 7; г) ±7,5. **50.** В 5 раз. Обозначьте отрезки пути в гору x м, с горы y м и найдите отношение $\frac{y}{x}$. Для этого выразите скорость велосипедиста на соответствующих участках через x и y и составьте уравнение, учитывая, что обратный путь он преодолел за 16 минут. **51.** а) $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$; б) $(1; 3)$; в) $(-1; 0) \cup (0; 3)$; г) $\left[-\frac{1}{2}; 2\right)$. **52.** а) $[-4; -2)$; б) $(0; 4)$; в) $(-1; 0]$. **53.** б), д). **54.** $(1; 1)$, $\left(\frac{5}{8}; 0\right)$. **55.** Например, а) $(3; -2)$; б) $(18; 4)$; в) $(5\sqrt{5}; 2\sqrt{5} - 3{,}2)$. **56.** Например, а) $(2; 6)$; в) $(-2; -2)$; г) $(2; -3)$; е) $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$. **57.** а) Нет таких значений x; б) –3 или 14. **58.** $y^2 - x^2 = 2$, где y дм – длина гипотенузы, x дм – длина катета; а) и б) – могут. **59.** 27. Составьте уравнение с двумя переменными, записав двузначное число, например, в виде $10a + b$, где a и b – его цифры. **60.** 16 м. **61.** Графиками данных уравнений являются: а) парабола $y = -x^2 + 5$; б) гипербола $y = \frac{15}{x}$; в) прямая $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; г) окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 5 единиц. **62.** Например, а) $(1; 1)$; б) $(3; 2)$; в) $(3; 3)$. **63.** а) $\left(x; \pm\frac{2}{9}x\right)$; б) $(x; -x)$; в) $(4; y)$, $y \in R$ или $(x; 5)$, $x \in R$; г) $(-3; y)$, $y \geq 0$ или $(x; 1)$, $x \in R$. **64.** Существует, 37. По условию задачи составьте уравнение с двумя переменными $10a + b = 3(a + b) + 7$, где a и b – цифры двузначного числа. Далее выразите переменную b через a. **65.** а) $n = 1$, $m = 2$; б) $n = 3$, $m = 2$ или $n = 1$, $m = 6$. Выразите m через n и представьте полученную дробь в виде суммы целого числа и дроби: а) $m = \frac{3n + 2 + 5}{3n + 2} = 1 + \frac{5}{3n + 2}$; б) $m = \frac{2n - 1 + 5}{2n - 1} = 1 + \frac{5}{2n - 1}$. **66.** Существует: а) 22; б) 88. По условию задачи составьте уравнение с двумя переменными, выразите одну переменную через другую; полученную дробь представьте в виде суммы целого числа и дроби. **67.** 13 и 6 или 67 и 66.

Составьте уравнение с двумя переменными x, y и, используя разложение числа 133 на простые множители 7 и 19, рассмотрите возможные значения выражений $x - y$ и $x + y$. **68.** 11 озер, 7 рек. **69.** Множеством точек, координаты которых удовлетворяют данным соотношениям, является: а) объединение двух прямых $y = x + 2$ и $y = x - 2$; б) объединение 4 лучей с началом в точках (0; 2) и (0; –2), лежащее на прямых $y = x + 2$, $y = -x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x - 2$; в) объединение 4 отрезков, образующих квадрат с вершинами (–2; 0), (0; 2), (2; 0), (0; –2); г) объединение частей двух парабол $y = -x^2 + 4$, лежащее только в верхней полуплоскости относительно оси Ox, и $y = x^2 - 4$, лежащее только в нижней полуплоскости относительно оси Ox, включая точки (0; –2) и (0; 2); д) объединение частей двух парабол $y = x^2 + 4x + 3$, расположенное в верхней полуплоскости относительно оси Ox, и $y = -x^2 + 4x - 3$, расположенное в нижней полуплоскости относительно оси Ox, включая точки (1; 0) и (3; 0); е) объединение графиков двух функций $y = \sqrt{2x}$ и $y = -\sqrt{2x}$. **70.** 14 машин. Составьте уравнение с двумя переменными, выразив m через x и y двумя способами. **71.** Множество точек, координаты которых являются решением данных уравнений, состоит: а) из 4 точек (–4; –5), (–4; 5), (4; 5), (4; –5); б) из всех точек окружности с центром в точке (1; 0) и радиусом 3; в) из объединения двух прямых $y = x$ и $y = -x$; г) из объединения прямой $y = x$ и параболы $y = 2x^2$. **72.** а) (–3; 5); б) (2; –1); в) (4; 3); г) $(-\sqrt{2};\ 1)$. **73.** а) $n = 2$, $m = 4$ или $n = 4$, $m = 2$; б) $n = 1$, $m = 7$ или $n = 6$, $m = 2$. Выразите переменную m через n и полученную дробь представьте в виде суммы целого числа и дроби: а) $m = \dfrac{2n - 3 + n + 1}{2n - 3} = 1 + \dfrac{n + 1}{2n - 3}$. **74.** 3 м и 6 м или 4 м и 4 м. **75.** Например, (7; 5) или (8; 5). Решите уравнение как квадратное относительно переменной x. **76.** а) 17 м/мин; б) более 17 м/мин. Составьте уравнение с двумя переменными, выразив время движения плота и моторной лодки. **77.** а) Нельзя. Проведите рассуждения для чисел одинаковой и различной четности; б) 17. **78.** Множество точек, координаты которых являются решением данных уравнений, состоит: а) из одной точки (1; 1); б) из объединения двух прямых $y = 0$ и $x = 0$ без точки (0; 0); в) из объединения двух прямых $y = -\frac{1}{4}x$ и $y = \frac{2}{3}x$; г) из объединения частей двух окружностей: части окружности $x^2 + (y - 3)^2 = 5^2$, расположенной в верхней полуплоскости относительно оси Ox, и части окружности $x^2 + (y + 3)^2 = 5^2$, расположенной в нижней полуплоскости относительно оси Ox, включая точки (–4; 0) и (4; 0). **79.** а) Не является; б) является. **80.** а) (26; –24); б) (–3; –2); в) (–2; –6), (2; 6); г) нет решений. **81.** а) (–3; –1), (–3; 1), (3; –1), (3; 1); б) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2), (5; 2). **82.** а) 20 и 18; б) существуют, 8 и 1 или –1 и –8. **83.** а) (0; 3), (3; 0); б) (–1; 0), (2; 3); в) (1; 2); г) (–4; –3), (–3; –4), (3; 4), (4; 3). **84.** 3 км/ч и 35,5 км/ч. **85.** а) 40 см; б) 30 см. **86.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **87.** а) (–48; –2), (–2; –48); б) (–3; 2), (3; 2); в) (1; 3), (3; 1); г) (–1; 4), (1; 2). **88.** Так как решениями системы являются пары чисел (3; 5), 5; 3), а $3^5 = 243$, $5^5 = 3125$. **89.** 12 млн га, 44-е место. **90.** 6 и 2. **91.** а) (2; 3); б) (–9; 1), (– 1; 9), (1; –9), (9; –1); в) (–3; 3), (3; –3); г) (–1; –1), (1; 1). **92.** а) (–4; –2), (4; 2); б) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; в) (0; 1), (2; –1), (2; 3), (4; 1). **93.** а) (–1; 3); б) (≈ –2,5; ≈ –2,5), (≈ 1,5; ≈ –6,5); в) (≈ –2,7; ≈ –0,7), (1; 2), (≈ 1,6; ≈ 1,3). **94.** а) $(-a; 3a)$, $(3a; -a)$; б) $(0; a)$, $(2a - 2; 2 - a)$; в) $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, (–1; 1), (1; –1), $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$; г) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, (0; –1), (0; 1) **95.** Существуют, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **96.** $(m; n)$: а) (–3; –1), (–1; –3), (1; 3), (3; 1); б) (–1; 2), (2; –1); в) (1; 6). **97.** 2 груши, 9 яблок. **98.** а) (2; 1), (1; 2); б) $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. **99.** а) (–2; –1), (2; 1); б) (4; 2). **100.** Можно разделить все члены первого уравнения на y^2 и решить квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$, а далее использовать способ подстановки. **101.** а) $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) (–1; 1), (1; –1), (–4; 2), (4; –2). **102.** а) (1; 3); б) (–2; 3), (2; 3). **103.** $\frac{2}{3}$. **104.** а) 8 см, 15 см; б) $4\sqrt{2}$ см, $9\sqrt{2}$ см. **105.** а) 75 км/ч и 60 км/ч; б) 96 км/ч и 64 км/ч. **106.** 19 км/ч и 1 км/ч.

107. 2 ч и 3 ч. **108.** а) Существует, 64 или 46; б) 68. **109.** $\frac{3}{8}$. **110.** а) 4 дм и 3 дм; б) 30 см^2. **111.** а) $\sqrt{82}$ см; б) 0,24 дм^2. **112.** 5 см, 12 см. **113.** 5 дм и 2 дм. **114.** 80 км/ч и 60 км/ч. **115.** 40 г и 160 г. **116.** 28 или 82. **117.** 6 см и $6\sqrt{3}$ см. **118.** а) $(-4; -8)$ или $(-4; 0)$; б) $(-1; -2\sqrt{2} - 1)$ или $(-1; 2\sqrt{2} - 1)$. **119.** а) $\sqrt{kS}$, $\sqrt{\frac{S}{k}}$; б) $\frac{P^2 - 4S}{2P}$. **120.** В $\sqrt{10}$ раз. **121.** а) За 10 с; б) за 36 мин и 45 мин. **122.** а) За 10 дней; б) за 6 часов и за 9 часов. **123.** $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **124.** б). **125.** Например, а) (0; 1); б) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Приведите другие примеры. **126.** Можно построить график уравнения: а) $y = -x + 1$; б) $y = x^2 + 7$ и выбрать точки, лежащие: а) в верхней полуплоскости относительно построенной прямой; б) ниже построенной параболы. Например, $(-4; 7)$, $(0; 3)$, $(4; -1)$. **127.** Точки (1; 8) и $(-1; -4)$ принадлежат множеству пар чисел, заданному неравенством $y \le x^2 + 6x + 1$. **128.** а) $y < 0$; б) $y \ge x$; в) $y > x^2 - 1$. **129.** а) Рисунок 1, *а*; б) рисунок 1, *б*. **130.** 9. **131.** а) в I и IV; б) в III и IV. **132.** а) 13; б) 57. **133.** а) $y > |x|$; б) $y \le |x^2 - 2|$; в) $y \le -\frac{2}{x}$. **134.** г) Рисунок 2, *а*; е) рисунок 2, *б*. **135.** Неверно. **136.** а) (1; 2); б) нет решений. **137.** а) Рисунок 3, *а*; в) рисунок 3, *б*.

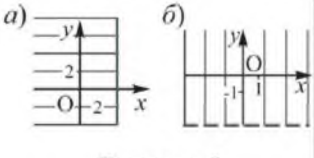


Рисунок 1

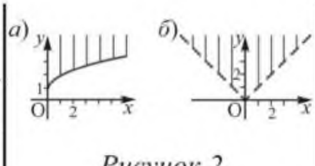


Рисунок 2

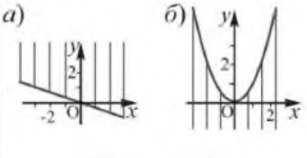


Рисунок 3

138. в) Рисунок 4. **139.** а) 50; б) 62; в) 54; г) 45. **140.** 1) в; 2) а; 3) б. **141.** а) Рисунок 5, *а*; б) рисунок 5, *б*; в) рисунок 5, *в*; г) рисунок 5, *г*. **142.** $(1; -1)$, $(2; 1)$, $(3; 3)$. **143.** а).

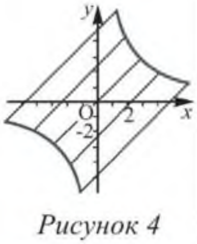


Рисунок 4

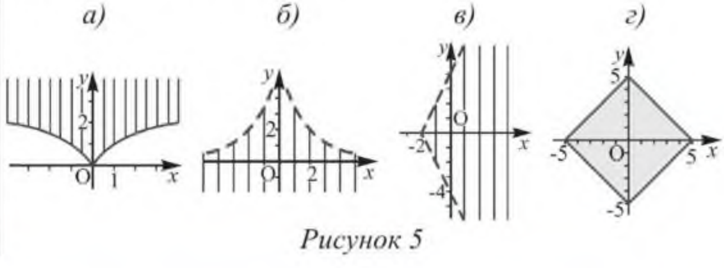


Рисунок 5

144. а) $\begin{cases} y \le -(x-3)^2+2, \\ y > -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2 < 4, \\ x \le 3. \end{cases}$ **145.** Фигура, ограниченная: а) параболой $y = -x^2 + 3$ и осью Ox; б) параболой $y = x^2 - 4$ и осью Ox. Фигура состоит из всех точек: в) круга $x^2 + y^2 = 4$, лежащих не ниже прямой $y = -1$; г) круга $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, имеющих абсциссы не меньше 1. **146.** Множество точек, расположенных внутри круга $x^2 + (y-1)^2 = 4$ и лежащих ниже параболы $y = x^2 + 1$. Из них 5 решений имеют целые значения x и y.

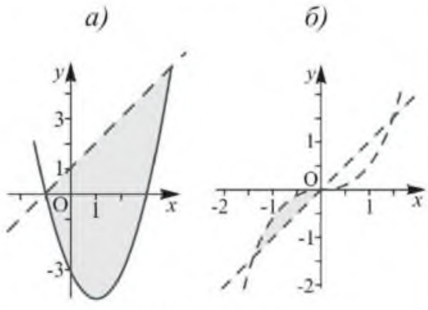


Рисунок 6

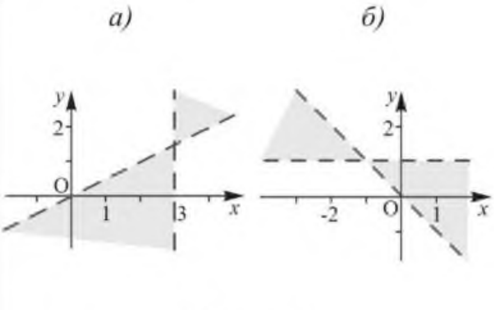


Рисунок 7

147. а) 18; б) 6. **148.** а) 4; б) 6. **149.** б) Рисунок 6, *а*; г) рисунок 6, *б*. **150.** 3 м и 1 м или 3 м и 2 м, или 2 м и 1 м. **151.** 10. Составьте систему неравенств, учитывая условие и неравенство треугольника, и решите ее графически. **152.** 10 или 11, или 20. **153.** 35. Составьте систему неравенств с двумя переменными x и y, сложив неравенства этой системы, выразите $x + y$. **154.** а) $\begin{cases} y \ge |x|, \\ y < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 \le 4, \\ y > -(x-3)^2+5. \end{cases}$

155. а) (3; 1), (3; 2), (4; 1); б) (1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2); в) нет таких пар чисел. **156.** б) Рисунок 7, *а*; г) рисунок 7, *б*. **157.** 11 пар. **158.** Не менее $16\frac{11}{54}$ м/с. Составьте систему неравенств, затем умножьте второе неравенство на $\frac{3}{4}$ и сложите неравенства системы. **159.** а) Может; б) нет. Решение аналогично решению задачи 2 пункта 5. **160.** 5 девочек и 4 мальчика. Составьте систему неравенств и решите ее графически. **161.** а) Нет; б) 2 км/ч. **162.** а) $\begin{cases} x^2+(y+2)^2<9, \\ y>-\frac{1}{3}x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geq (x+2)^2-4, \\ |\,y\,|<2. \end{cases}$

163. б) Рисунок 8, *а*; в) рисунок 8, *б*; г) рисунок 8, *в*.

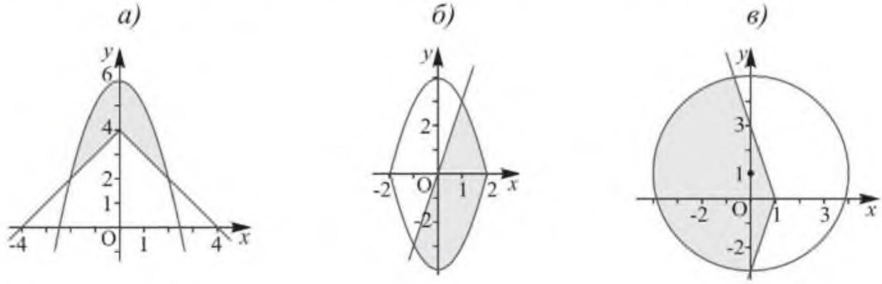

а) *б)* *в)*

Рисунок 8

164. а) 3; б) 36; в) 6; г) 3. **165.** а) 8; б) 25. **166.** а) 48; б) 89. **167.** 109. **168.** (2; 8), (8; 2). **169.** а) (–4; –3), (4; 3); б) (–3; 5), (5; –3); в) $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$; г) $\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **170.** 23. **171.** $\sqrt{82}$ см. **172.** а) (–1; –4), (–1; 4), (1; –4), (1; 4); б) (–3; –4), (–3; 4), (2; $-\sqrt{21}$), (2; $\sqrt{21}$). **173.** а) (2; 3); б) (0; –9), ($-\sqrt{17}$; 8), ($\sqrt{17}$; 8). **174.** $3\sqrt{5}$ см. Пусть медианы пересекаются в точке *O*. Используя свойство медиан и теорему Пифагора, составьте систему уравнений. Сложив уравнения системы, найдите сумму квадратов $BO^2 + AO^2$. **175.** а) (2; 1); б) (1; 2), (1; 3), (2; 1), (3; 1), решите уравнение как квадратное относительно (*xy*); в) (11; 4), (13; 8), (19; 16), (53; 52), разложите левую и правую части уравнения на множители и рассмотрите разные варианты значений $x - y$ и $x + y$. **176.** а) 499 см; б) 340 см или 1016 см. Учтите, что 997 и 677 – простые числа. **177.** Искомым множеством точек является: а) объединение прямых $y = 2x$ и $x = 3$; б) прямая $y = -\frac{1}{2}x$ без точки (4; –2). **178.** а) Может; б) нет. Составьте систему неравенств, возведите части первого неравенства в квадрат и отнимите от них части второго неравенства. **180.** а) 3 липы и 1 береза. Составьте систему неравенств и решите ее графически; б) 20 пудов. **181.** а) 6 и 30 или

10 и 10. Пусть x и y искомые числа, тогда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, $y = \frac{5x}{x-5} = \frac{5(x-5)+25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}$. б) Существуют, 51 и 50. Учтите, что 101 – простое число. **182.** 1971 год. **183.** 20. **184.** 278. Учитывая, что 277 и 281 простые числа, исследуйте оставшиеся 3 числа из указанного промежутка. **185.** Докажите, что система из двух данных уравнений имеет единственное решение. **186.** 4 и 8 Ом. Составьте систему уравнений, учитывая, что при последовательном соединении общее сопротивление (R) равно сумме сопротивлений (R_1, R_2), а при параллельном соединении $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$. **187.** 5 км/ч и 3 км/ч. **188.** а) $\left(-5; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(5; \frac{1}{2}\right)$; б) (–2; –4), (1; 2). **189.** а) (3; 6), (6; 3); б) (0; 0), (0,5; 2), (2; 0,5). **190.** а) (–1; –4), (4; 1); б) (–5; –2), (–1; –6), (1; 4), (5; 0). Рассмотрите разные значения множителей: а) x и y; б) x и $y + 1$. **191.** У Динары. Установите, что решением данной системы являются пары чисел (1; 2), (1; –2), (–3; 0), и стандартное отклонение выборки значений x равно $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, а стандартное отклонение выборки значений y равно $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **192.** а) (1; 0), (4; 3), (6; 5); б) (0; 4), (3; 1). **193.** Искомым множеством является множество: а) всех внутренних точек круга с центром (3; –3) и $R = 3$; б) точек плоскости, ограниченное графиками функций $y = \sqrt{x+2}$ и $y = -\sqrt{x+2}$. **194.** а) Не могло; б) могло. Составьте систему неравенств и решите ее графически. **195.** В 4 раза. Составьте уравнение с двумя переменными $\left(x + y = \frac{25}{4} \cdot \frac{xy}{x+y}\right)$, преобразуйте его в уравнение второй степени с двумя переменными, разделите все его члены на y^2 и решите квадратное относительно $\left(\frac{x}{y}\right)$ уравнение. **196.** При $c = \pm\sqrt{2}$. **197.** а) (–5; 10), (5; –10); б) $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$, (–1; –3), (1; 3), $(\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$. **198.** $\frac{a\sqrt{4h^2 + a^2}}{4h}$. Пусть дан ΔABC, в котором $AB = BC$, $AC = a$, высота $BH = h$, O – центр окружности, касающейся прямых BA и BC в точках A и C. Составьте систему уравнений,

используя средние пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике BOC, то есть $OC^2 = BO \cdot OH$ и $CH^2 = BH \cdot HO$. **199.** 1 дм^2 и 4 дм^2. Пусть искомые площади равны x дм^2 и y дм^2. Используя формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha$ и учитывая, что $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, установите, что $xy = 4$. **200.** Выделите в левых частях данных неравенств квадрат двучлена. **201.** Используйте системы неравенств: в) $\begin{cases} y \leq 1, \\ y \geq |x| - 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq 4 - |x|. \end{cases}$ **202.** 6 пар. **203.** 1А) б), например, (1; 19); 2А) (4; 6), (6; 4); 3В) 3,6 км/ч и 4,8 км/ч; 4В) (1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 1); 5С) 23 кв. ед. **204.** 9. **205.** 11. **206.** 8. **207.** 63. **208.** 42. **209.** 210. **210.** 120. **211.** 6. **212.** 280. **213.** 47. **214.** а) 45; б) 12. **215.** а) 2017; б) 2019. **216.** $40247 = 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$; $8568 = 2^{13} + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3$. Составьте таблицу значений 2^n для n от 1 до 16. **217.** а) 16. б) 10 способами. **218.** 6. **219.** 24. **220.** а) 120; б) 720. **221.** 362 880. **222.** 39 916 800. **223.** 87 178 291 200. **224.** а) 56; б) 105; в) 84; г) 49. **225.** а) Не больше 5; б) не больше 6. **226.** 5040. **227.** 24. **228.** а) 12; б) 5. **229.** 42. **230.** $n - 1$. **231.** а) 60; б) 24. **232.** 8. **233.** Существует, $149^2 = 22201$. Учитывая, что квадрат числа не может оканчиваться цифрой 2, рассмотрите возможные варианты пятизначных чисел и проверьте, удовлетворяют ли они условию. **234.** Преобразуйте данное выражение, выделив квадрат двучлена и разложив на множители. Далее используйте определение простого числа. **235.** 3024. **236.** 240 240. **237.** 336. **238.** 30 240. **239.** 648. **241.** а) 294; б) 100; в) 2; г) 60. **242.** 15. **243.** а) 5; б) 11. **244.** а) $D = \{4; 5; 6\}$, $E = \{1; 2; 3\}$; б) $D = \{2; 3; 4\}$, $E = \{1; 16; 72\}$. **245.** 16. **246.** 7 букв. **247.** 3. **248.** 738. **249.** 13. **250.** а) $23^2 = 529$; б) $4^4 = 256$. **251.** 10. **252.** 35. **253.** 190. **254.** 45. **255.** а), б) – верно. **257.** а) 995; б) 312; в) 16; г) 32. **258.** 3. **259.** При $n = 2$. Установите, при каком из допустимых значений n верно данное равенство. **260.** а) 66; б) 220. **261.** 21. **262.** 8 145 060. **263.** 15. **264.** а) 4; б) 3. **265.** 28. **266.** а) $n \geq 2$, $n \in N$; б) 9; в) 9; г) 2; найдите допустимые значения k и установите, при каком значении k верно равенство. **267.** а) $D = \{2; 3; 4\}$,

$E = \{1; 3; 4\}$; б) $D = \{2; 3\}$, $E = \{1\}$. **268.** а) $n \in \{5; 6; 7\}$; б) 4; установите, при каком из допустимых значений n верно данное неравенство. **269.** $\frac{n-1}{2}$ для нечетного n и $\frac{n-2}{2}$ для четного n. **270.** 8. **271.** $n = 6$, $k = 3$. Используя формулу $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ и понятие факториала, упростите каждое из уравнений, разделив их левые и правые части на одинаковые множители. **272.** б) $1 - 7b + 21b^2 - 35b^3 + 36b^4 - 21b^5 + 7b^6 - b^7$. **273.** а) 70; б) 35. **274.** а) $(x + 2)^6$; б) $(3 - y)^5$. **275.** а) 11; б) $k + 1$. **276.** 36. **277.** 10-й. **278.** а) $2^{10} = 1024$; б) 2048. **279.** а) 26-й; б) 51-й или 52-й. **280.** а) 4-й; б) 3-й. **281.** а), б) – верно. **282.** а) $\approx 1{,}05$; б) $\approx 0{,}96$; в) $\approx 1{,}27$; г) $\approx 0{,}70$. **283.** 64. **284.** $2 < \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 < 3$. **285.** а) $145\sqrt{5} + 229\sqrt{2}$; б) $208 - 120\sqrt{3}$. **286.** а) $35a^3b^4$; б) $220a^{18}$; в) $C_{2020}^2 a^{2018} b^2$. **287.** а) 70; б) 12. **288.** Верно. **289.** Может, а) при $n = 6$; б) при $n = 10$. **290.** Существует, $n = 7$. **291.** $9^7 + 10^7 < 11^7$. Используйте разложение бинома $(a + b)^7$ для определения знака разности $((10 - 1)^7 + 10^7) - (10 + 1)^7$. **292.** Сравните сумму трех первых членов разложения $(1 + 1)^n$ с выражением $\frac{n^2}{2}$. **293.** С Виктором и Тарасом. **294.** 18. **295.** а), б) – неверно; в), г) – верно. **296.** 1332. **297.** В решении задачи используются: а) сочетания, б) размещения. а) 66; б) 132. **298.** а) $\frac{10}{3}$; б) 5; в) $n + 1$; г) $\frac{(n+3)(n+2)}{n}$. **299.** 126. **300.** 252. **301.** 16. **302.** 14. **303.** 22. **304.** а) ≈ 1995; б) 1926 г. **305.** а) 49; б) 42. **306.** а) 9 или 10; б) 5; в) 8. **307.** $5\sqrt{5}$. **308.** а) $n + 1$; б) 49. **309.** Представьте число $\overline{bca}$ в виде $(100a + 10b + c) \cdot 10 - 999a$. **310.** 12. **311.** а) 6 и 15; б) 13. **312.** 1A) 35; 2A) одним; 3A) 95 040; 4B) 12; 5C) $24\frac{3}{4}$. **314.** $a_{2020} = 6059$. **315.** а) $-1; -4; -7; -10; -13$; г) 1; 8; 27; 64; 125. **316.** а) $D = \{1; 2; 3; 4\}$, $E = \{3; 9; 27; 81\}$; б) $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. **317.** а) На рисунке 32; б) на рисунке 33. **318.** а) (a_n) и (f_n); б) (b_n) и (d_n). **319.** $a_n = \frac{n}{n+1}$; $b_n = -4^n$; $c_n = (-5)^n$; $d_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n$. **320.** а) 6 членов; б) 18 членов. **321.** г) $-3; 9; -27; 81; -243$. Все данные последовательности бесконечные. **322.** б) 2; 4; –2; 6; –8; 14. **323.** б) $a_{12} = 19$; г) $a_{k+2} = 2k - 1$. **324.** а) $n = 5$; г) $n = 19$. **325.** а) 12; б) 2; в) 4; г) 1 и 3. **326.** а) и в) – не является; б) является, $n = 10$; г) $n = 28$. **327.** в) –2; 1; –1; 0; –1; –1; г) 1; 2; 2; 4; 8; 32. **328.** а) $x_n = 3 + 5(n - 1)$; б) $y_n = 50 - 9(n - 1)$. **329.** а) При $n \geq 21$, $n \in N$; б) при $n \geq 7$, $n \in N$. **330.** а) Начиная с 8-го номера; б) начиная с 6-го номера. **331.** Установите, что: а) $a_{n+1} - a_n > 0$; б) $b_{n+1} - b_n < 0$. **332.** а) $c_n = 2n + 13$; б) $c_n = 2^{n-1}$. **333.** б) Для доказательства данного равенства выразите a_{n+2} и a_{n+3} через a_n и a_{n+1}. **334.** а) $a_n = 3n$; б) $b_n = 6n$; в) $c_n = 6n - 3$. **335.** а) Да; б) $b_1 = \frac{3}{10}$; $b_8 = \frac{8}{10^8}$; $b_{15} = \frac{4}{10^{15}}$; $b_{22} = \frac{6}{10^{22}}$; в) последовательность является убывающей. **338.** Всего 45 членов. **339.** $a_n = 10n - 2$. **340.** а) На $\frac{1}{500}$; б) при $n \geq 201$, $n \in N$. **342.** Не установлено, верно ли данное утверждение при $n = 1$. **343.** При доказательстве верности формулы и при $n = k + 1$ используйте данную рекуррентную формулу и предположение верности ее при $n = k$. **344.** Учтите, что $S_{n+1} = S_k + c_{k+1}$. **348**. Верность утверждения при $n = k + 1$ нужно доказать. Для этого в данное выражение вместо n подставить $k + 1$, раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые в две группы. Первая $\left(\frac{k}{6} + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}\right)$ является натуральным числом по предположению, вторая $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k^2 + k\right)$ является натуральным числом. **349.** а), б) – аналогично примеру 1 пункта 14; в) при доказательстве верности утверждения при $n = k + 1$ после раскрытия скобок сгруппируйте слагаемые так: $(k^3 + 5k) + 3k(k + 1) + 6$, тогда первая группа слагаемых делится на 6 по предположению, вторая – является произведением 3 и двух последовательных натуральных чисел, следовательно, делится на 6 … . **350.** При доказательстве верности утверждения при $n = k + 1$ можно перемножить левые и правые части неравенств $a > b$ и $a^k > b^k$. **351.** При доказательстве верности неравенства при $n = k + 1$ умножьте левую и правую части неравенства: а) $k! > 2^k$ на $k + 1$, тогда $(k + 1)! > (k + 1)2^k > 2 \cdot 2^k$, следовательно, $(k + 1)! > 2^{k+1}$; б) $2^k > 5k$ на 2, тогда $2^{k+1} > 10k > 5(k + 1)$; в) $3^k > 2k^2$ на 3, тогда $3^{k+1} > 6k^2 > 2(k + 1)^2$, причем для доказательства того, что

$6k^2 > 2(k+1)^2$, установите знак разности $6k^2 - 2(k+1)^2$. **353.** При доказательстве верности утверждения при $n = k + 1$ представьте выражение $(k+1)^5 - (k+1)$ в виде многочлена. **354.** Пусть требуется доказать, что $((n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3) \vdots 9$. При доказательстве верности утверждения при $n = k + 1$ представьте слагаемое $(k+2)^3$ в виде $((k-1)+3)^3$ и возведите его в куб. **355.** При доказательстве верности неравенства при $n = k + 1$ умножьте левую и правую части неравенства $(1+a)^k > 1 + ka$ на $(1 + a)$ и докажите, что $(1 + ka)(1 + a) > 1 + (k + 1)a$. **356.** а) Неравенство верно при любом $n \in N$; б) при $n \geq 3$, $n \in N$; в) при $n \geq 9$, $n \in N$. **358.** При доказательстве верности утверждения при $n = k + 1$ представьте выражение $(k+1)^7 - (k+1)$ в виде многочлена. **359.** Неверно, достаточно привести пример. **360.** Нет такого свойства о неделимости суммы. Нужно использовать способ доказательства «от противного». Предположим, что выражение $n^2 + 3n + 5$ делится на 121 при каком-либо значении n, тогда $n^2 + 3n + 5 = 121k$. Найдем, при каких натуральных значениях k уравнение $n^2 + 3n + 5 - 121k = 0$ имеет натуральные корни, получим $n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4 \cdot 121k - 11}}{2}$. Подкоренное выражение $11(44k - 1)$ должно быть квадратом целого числа, то есть $44k - 1$ должно делиться на 11. Но ни при каком $k \in N$ выражение $44k - 1$ не делится на 11, следовательно, предположение неверно, значит, выражение $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком значении $n \in N$. **361.** а) При $n \geq 7$, $n \in N$; б) при $n \geq 4$, $n \in N$. **364.** б), в), д), е). **365.** в) $d = \frac{a_{18} - a_{15}}{3}$. **366.** а) 17; б) 7,6. **367.** а) –10; б) –31; в) 7,5 – 3,5k. **368.** а) $x_n = 5n - 4$; б) $x_n = 29 - 4n$; в) $x_n = -2n - 2$; г) $x_n = 6 - 5n$. **369.** а) Не является; б) является. **370.** а) 11; б) 26. **371.** а) –54; б) –27. **372.** а) 0; б) –12; в) 9 – 1,5k; г) –1,5k. **373.** в) $a_{16} = 6\frac{5}{8}$, $a_{41} = 16$, $a_n = \frac{3}{8}n + \frac{5}{8}$. **374.** а) Является, $a_n = -\frac{4}{3}n + 8$; б) нет. **376.** 8. **377.** а) и б) – семь. **378.** –1; 0; 1; 2. **379.** –6. **382.** 2 или 14. **383.** а) 147; б) –18. **384.** а) $a_1 = 0$, $d = 2$ или $a_1 = 12$, $d = -2$; б) $a_1 = -9$, $d = 5$ или $a_1 = 1$, $d = -5$. **385.** 4 см, 5 см, 6 см или 3 см, 5 см, 7 см. **387.** $a_1 = 3$. **388.** а) $n = 12$, $m = 30$; б) $n = -1\frac{1}{16}$, $m = 43\frac{15}{16}$.

389. 135 или 630. **390.** а) $3d$, $4d$, $5d$, где $d \in R$ и $d > 0$; б) 50 м/мин^2. **391.** а) При $d = 1$; б) при $d = -7{,}5$. **392.** а) 100; б) 140; в) –76, учтите, что $a_1 + a_{10} = a_5 + a_6$; г) 145. **393.** а) $a_1 = 36$, $d = -7$. **394.** а) 10; б) 120. **395.** б) $a_1 = -6{,}75$, $a_{16} = 0{,}75$. **396.** а) $n = 4$, $d = -1\frac{1}{3}$; г) $n = 7$, $a_1 = 2$. **397.** 735. **398.** 575. **399.** $n = 10$, учтите, что $\frac{a_7 + a_{13}}{2} = a_{10}$. **400.** а) 3750; б) 2295. **401.** 1300 га. **402.** 156. **403.** 20 см. **404.** а) $S_n = n^2$; б) $S_n = n(n + 1)$. **405.** Так. **406.** а) Не может; б) может, при $n = 36$. **407.** 204. **408.** а) 50; б) –80. **409.** а) 55; б) 1. **410.** 25. **411.** 28. Составьте уравнение, учитывая, что количество шаров, расположенных в виде треугольника или прямоугольника, одинаковое. **412.** 325. Используйте формулу разности квадратов. **413.** Является при $a_1 = 1 - \frac{1}{n}$ и $d = 2$. Установите, при каких условиях $n^2 - 1 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$. **414.** Преобразуйте формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии к виду $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$. **415.** а) $a_1 = -3$, $d = 10$; б) $a_1 = \frac{15}{16}$, $d = -\frac{1}{8}$. **416.** а) $\frac{x-1}{2}$, установите, что $n = x - 1$; б) $\frac{8x-108}{x}$, $n \in [10; 17]$. **419.** а), в), г) – является. **420.** а) и г) – геометрическая прогрессия; б) и в) – арифметическая прогрессия. **421.** б) $b_n = 16\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, $b_5 = 4\sqrt{2}$. **422.** а) 5; б) $-\sqrt{2}$. **423.** а) $\frac{5}{16}$; б) 1; в) 2; г) $\frac{1}{64}$. **424.** а) 2,8; б) $4\sqrt{3}$; в) $3 - \sqrt{2}$; г) 3. **425.** На рисунке 41, а. **426.** Является, а) $b_1 = 8$, $q = 4$; б) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$. **427.** 4. **428.** а) –243; б) 1024. Используйте свойство членов геометрической прогрессии. **429.** 16; 20; 24 или 34; 20; 6. Используя свойство членов арифметической прогрессии, найдите второе число и выразите третье число через первое и найденное второе. Далее по свойству геометрической прогрессии составьте уравнение и найдите первое число. **430.** Могут, например, 6, 6, 6 или 4, 6, 9. **431.** а) $b_1 = 6$, $q = 3$ или $b_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$; б) $b_1 = 5$, $q = 2$ или $b_1 = -\frac{10}{3}$, $q = -3$; в) $b_1 = 3$, $q = 2$ или $b_1 = 24$, $q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = 1$, $q = 2$ или $b_1 = 4$,

$q = \frac{1}{2}$. **432.** а) 1 024 000; б) $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. **434.** Существует, $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **435.** $b = 3\sqrt{2}$, $c = 12\sqrt{2}$ или $b = -3\sqrt{2}$, $c = -12\sqrt{2}$. **436.** 17 715,61 м³. **437.** $-\frac{1}{2}$. **439.** Не могут. **440.** 2; 6; 18 или $\frac{2}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{98}{9}$. **441.** 3; 6; 12. **442.** а) 1364; б) 41. **443.** а) $\frac{x^{12} - 1}{x^2 - 1}$; б) $\frac{x - x^{13}}{x^2 + 1}$. **444.** а) 15,5; б) 635; в) 3478,2; выразив через b_1 и q указанные в равенствах члены прогрессии, составьте систему уравнений и разделите их левые и правые части; г) –247,5 или 1089. **445.** б) $q = 2$, $S_{11} = 409{,}4$ или $q = -2$, $S_{11} = 68\frac{1}{3}$. **446.** 45 см. **447.** 30 см². **448.** а) $2{,}8(\sqrt{2} + 1)$; б) $62(\sqrt{5} + 1)$; в) $\frac{13}{3}(\sqrt{3} + 1)$; г) $\frac{57}{7}(\sqrt{7} + 1)$. **449.** $c_1 = \frac{1}{18}$, $S_4 = 14\frac{7}{18}$. **450.** 8. **451.** $6\frac{5}{16}$ м². **452.** 1, 4, 16, 64, 256; $S_5 = 341$. **453.** $91\frac{1}{4}$. **454.** $\frac{27}{64}$ или $-\frac{27}{64}$. **455.** На 41787 руб. и $3\frac{3}{4}$ коп. Учтите, что 1 руб. = 100 коп. и $2^{10} = 1024$. **457.** $S_n = \frac{a_1^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}$. **458.** $\frac{781\sqrt{3}}{16}$ дм². **459.** а) 18 446 744 073 709 551 615; 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615; б) ≈ 1,2 триллиона тонн. **460.** а) –1; 0; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; прибавьте к левой и правой части уравнения x^2, запишите сумму четырех слагаемых в виде дроби, сократите ее; далее перенесите все слагаемые в одну часть уравнения и разложите ее на множители. **463.** 33 333. Представьте числа в виде суммы разрядных слагаемых и, используя формулу суммы n первых слагаемых геометрической прогрессии, замените их дробями. Далее представьте подкоренное выражение в виде квадрата. **464.** б) $1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{2}{3}$. **465.** а) $5\frac{1}{3}$; б) 4; в) $\frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$; г) $2\sqrt{2} - 4$. **466.** $\frac{1 + a}{a}$. **467.** а) 2; б) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$; в) $2 - \sqrt{2}$; г) $-4 - 2\sqrt{3}$. **468.** а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{31}{90}$; в) $\frac{7}{30}$; г) $1\frac{31}{180}$; д) $\frac{1907}{4500}$; е) $-21\frac{7}{45}$. **469.** а) $\frac{3}{1 - x^2}$; б) $\frac{1 + x}{1 - x}$. **470.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{3}{5}$ или $\frac{2}{5}$; в) 4,8; учтите, что $(1-q)(1+q+q^2)=1-q^3$. **471.** а) $\frac{1}{7}$; б) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, при решении уравнения $q^6=\frac{1}{8}$ представьте его в виде $(q^2)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$; в) $-\frac{1}{4}$; г) $\frac{2}{3}$. **472.** а) $4-2\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **473.** 0,28. **474.** $b_1=2\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$. **475.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}$. **476.** $\frac{Q^2}{2Q-1}$. **477.** Существует, например, 11, 1, $\frac{1}{11}$, … . **478.** а) $\sqrt{2}+1$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **479.** а) 2; б) $\frac{5}{14}$. **480.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$. **481.** а) –32; б) 16. **482.** Например, а) 4 + 0,8 + … ; б) $\frac{7}{5}+\frac{21}{25}+\dots$. **483.** $-\frac{1}{2}$. **484.** Надо отбросить два первых члена. **485.** 5. **486.** 12 345. **487, 488** – используйте метод математической индукции. **491.** 18 см. **492.** 1. **493.** 67,5. **494.** –161. **495.** а) $d=\frac{2}{3}$, $n=22$; б) $d=-2$, $n=18$. **496.** а) За 6 часов; б) 407. **497.** 472. **498.** 7, 8, 9 лет. **499.** а) 1254; б) 98 550. **500.** Не могут. Используйте характеристическое свойство геометрической прогрессии. **501.** а) 81, 54; б) 9, 18 или 9, –18; в) 4, –12; г) 144, 72 или 144, –72. **502.** а) –4; б) 38 550; неверно. **503.** а) 392; б) 1024. **504.** 50 тенге. **506.** а) –2; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$. **507, 508** – используйте метод математической индукции. При доказательстве делимости значения выражения $6^{2(k+1)-1}+1$ на 7 представьте его в виде $36\cdot6^{2k-1}+1=(35+1)\times6^{2k-1}+1=\dots$. **509.** а) $\pm\sqrt{5}$; б) $3+2\sqrt{2}$. **510.** 300. **511.** $22m$ метров. **512.** $\frac{1}{4}$. **513.** $\pm\sqrt{3}$. **515.** Учтите, что $4\cdot4^k>4\cdot3^k+4\cdot2^k>3\cdot3^k+2\cdot2^k$. **516.** Используя теорему Пифагора, выразите разность арифметической прогрессии через меньшую сторону треугольника и сравните ее с радиусом $r=\frac{a+b-c}{2}$. **517.** $\frac{Q^3}{3Q^2-3Q+1}$. **519.** а) 810°; б) 1200°. **520.** а) 1 час $=15^\circ=\frac{\pi}{12}$; б) 1 румб $=\frac{\pi}{16}=11{,}25^\circ$. **521.** а) $\frac{\pi}{3}=60^\circ$; б) $\frac{2\pi}{5}=72^\circ$. **522.** а) $\frac{\pi}{6}=30^\circ$; б) $\frac{\pi}{4}=45^\circ$. **523.** а) $90^\circ=\frac{\pi}{2}$, $54^\circ=\frac{3\pi}{10}$, $36^\circ=\frac{\pi}{5}$; б) $36^\circ=\frac{\pi}{5}$ и два угла по $72^\circ=\frac{2\pi}{5}$ или $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ и два угла по 45° = $\frac{\pi}{4}$; в) 80° = $\frac{4\pi}{9}$, 100° = $\frac{5\pi}{9}$. **524.** в) 210° = $\frac{7\pi}{6}$, 225° = $\frac{5\pi}{4}$, 270° = $\frac{3\pi}{2}$, 300° = $\frac{5\pi}{3}$; г) 1100° = $\frac{55\pi}{9}$, 1440° = 8π, 3330° = $\frac{37\pi}{2}$, 7380° = 41π. **525.** г) 2 ≈ 114°, –3 ≈ –171°. **526.** в) IV; г) I. **527.** а) Верно; б) нет. **528.** в) –1740° = –360° · 4 + (–300°) – угол I четверти. **529.** д) $\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$ – угол III четверти; е) $-\frac{19\pi}{6} = -2\pi + \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ – угол II четверти. **533.** а) $\frac{4\pi}{9}$; б) $\frac{9\pi}{19}$. **534.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. **535.** $\frac{\pi}{2}$ или π, или 0. **536.** За 6 секунд. **538.** а) $\beta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ или $\beta = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$. **539.** в) –4; г) не существует. **540.** а) 8π рад/сек; б) 4,8 π м/сек. **541.** г) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le \beta \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. **542.** а), б), е) – может; в), г), д) – нет. **545.** г) sin(–170°) ≈ –0,2, cos(–170°) ≈ –0,9, tg(–170°) ≈ 0,2, ctg(–170°) ≈ 4,5. **546.** Может, например, sin(–210°) = $\frac{1}{2}$. **548.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $1{,}5\sqrt{2}$; г) 5. **551.** а) 0; б) 0; в) $\sqrt{3}$; г) 1. **555.** в) I или III; г) III или IV. **556.** в) cos 310° · sin 115° > 0. **557.** Используйте рисунок 50. **558.** Учитывая, что α – острый угол, установите, углом какой четверти является исследуемый угол. а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$, так как $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ – угол II четверти. **559.** а) $\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} < 0$, так как $\sin\frac{\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{3}$. **560.** Используйте координатную окружность и линии тангенсов и котангенсов. а) Так как точки единичной окружности, соответствующие углам 15°, 375°, 735°, совпадают, то тангенсы и котангенсы этих углов равны; б) tg 20° < tg 400° < tg 780°, ctg 780° < ctg 400° < ctg 20°; в) tg 100° < tg 120° < tg 140°, ctg 140° < ctg 120° < tg 100°. **561.** Используя координатную окружность, установите, что: а) $\sin 3\pi = 0$, $\cos 5\pi = -1$, $\cos 6\pi = 1$. **562.** Отметьте точки, соответствующие данным углам на единичной окружности. б) $\cos\frac{11\pi}{9} < \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) < \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) < \cos\frac{\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{9}\right) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{9} < \operatorname{tg}\frac{11\pi}{9} < \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$. **564.** Например, в) $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$.

565. Например, в) 180°, –180°, 540°. **566.** Например, в) 30°, –150°, 210°. **567.** Например, в) $-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. **569.** Используйте определение тангенса и котангенса угла и тождества $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. **570.** а), в), г) – верно; б) – нет. **571.** а) $-\cos\alpha$; в) 0. **572.** а) $2\operatorname{tg}\alpha$; б) $-(\sin\alpha + \cos\alpha)$. **574.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2} - 1$; в) $1 - 2\sqrt{2}$; г) 0. **575.** а) –1; б) 1; в) –1; г) 3. **576.** а) –6; б) $9 - 5\sqrt{3}$. **577.** $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **578.** а) I или IV. **579.** б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right) > 0$, так как $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\right)$ – угол I четверти. **581.** г) $2 \le 4 - 2\sin\alpha \le 6$; д) $1 \le \sin^2\alpha + 1 \le 2$. **582.** в) $\frac{7\pi}{4}$ или $\frac{9\pi}{4}$. **583.** в) $-\frac{5\pi}{6}$ или $-\frac{\pi}{6}$. **584.** в) $\alpha \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, где $n \in Z$; г) $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$. **585.** а) $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in Z$. **586.** Можно умножить числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части тождества на $\sin\alpha$, а в правой части на $\cos\alpha$. **587.** а) 0; б) 4. **588.** Докажите, что разность между левой и правой частями неравенства больше или равна нулю. **589.** б) $2 - \sqrt{2}$; в) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. **591.** а), в) 0 и 1; б), г) –1 и 0. **592.** в) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. **593.** а) Обозначив $\sin x = t$, найдите корни трехчлена, стоящего в левой части неравенства, и разложите его на множители. **595.** в) R; г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **597.** в) $[-2; 2]$; г) $[1; 3]$. **599.** а) $-\sin\frac{\pi}{7}$; б) $-\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\sin\frac{3\pi}{8}$; г) $-\cos\frac{\pi}{4}$. **600.** а) –1; б) 1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. **601.** а) и б) – является. **602.** а) 4π; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{2\pi}{3}$. **604.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$; г) нет таких значений x. **605.** а) $\frac{\pi}{3}n, n \in Z$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$; е) $4 - \frac{\pi}{2} - \pi n, n \in Z$. **606.** в) $\nearrow\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; $\searrow\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. **607.** в) $D = R, E = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], y = 0$ при $x = \frac{\pi}{3}n, n \in Z$. **608.** в) $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$; г) $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$. **609.** При $\beta = 90°$. **610.** б) $x \in R$, кроме чисел $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$. **611.** г) $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **612.** а), в) – четная; б), г) – нечетная. **613.** в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; г) $-\mathrm{ctg}\ \frac{\pi}{4}$. **614.** б) $\mathrm{tg}\frac{23\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{ctg}\ \frac{23\pi}{6} = -\sqrt{3}$. **615.** а) $1 + a$; б) $\frac{a^2 - 1}{a}$. **616.** в) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **617.** в) При $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **618.** б) $|b| > \pi$. **619.** а) $S_{наиб.} = \frac{1}{2}ab$, где a и b – стороны треугольника; б) не существует. **620.** а) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; б) $(0; \pi]$. **621.** а) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $[-2{,}5; 0{,}5]$; в) $[0{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $[1{,}5; +\infty)$. **623.** в) $\frac{\pi}{4}$; г) 3π. **624.** График четной функции симметричен относительно оси Oy. **625.** а) $x \in R$, кроме чисел $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $x \in R$, кроме чисел $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **626.** а) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $(3\pi; 9\pi)$. **627.** б) $x \in R$; в) $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$. **628.** Замените каждый множитель меньшим числом и используйте свойство неравенств: если $a > b > c$, то $a > c$. **630.** а), б) – невозможно. **632.** Проверьте, выполняется ли равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ или $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$. **633.** г) $\cos^2\alpha$; д) 0; е) $\sin^2\alpha$. **634.** в) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{2}$. **635.** б) $1 - \sin\alpha$; г) $\frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; е) $\mathrm{tg}^6\alpha$. **636.** а) $\sqrt{3} - 2$; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{4}$. **639.** а) $\approx -0{,}32$; б) $\approx 0{,}98$. **640.** 1700 км. **641.** а) 0 и 1; б) –1 и 0; в) 0 и 5; г) –1 и 2. **642.** а) $\sin\alpha + \cos\alpha$; б) $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$. **643.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; г) $2\pi + 8\pi n$, $n \in Z$. **646.** б) Умножьте числитель и знаменатель дробей, стоящих под знаком корня на $1 + \sin\alpha$ и $1 - \sin\alpha$. **647.** а) 1; б) 1. **649.** 1) а) 0,48; б) 0,18; 2) 3. **650.** а) 4 и 5; б) –3 и –2; в) 6 и 8; г) –1 и 1. **651.** а) 1; б) 1. Учтите, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(90° - \alpha)$. **652.** а) $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; б) $2\mathrm{tg}^2\alpha$. **654.** а) 8; б) $7\sqrt{10}$; в) $-\sqrt{6}$. **655.** $\frac{23}{32}$. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \ldots$. **656.** а) –2 при $x = \pi n$, $n \in Z$; 1 при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **659.** а) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; в) $-\mathrm{tg}^2\alpha$. **660.** д) –sin 20°, –sin 30°, tg 40°, tg 0°; е) cos 40°, –cos 40°, –tg 40°, tg 20°. **661.** г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$-\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$, –1. **662.** а) –0,5; б) –6; в) $\frac{7\sqrt{6}}{2}$; г) $\frac{9-\sqrt{3}}{6}$. **666.** в) $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$, π. **667.** а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; в) $\frac{3}{4}$. **668.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **669.** а) $\text{tg}^2\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\text{ctg}\,\alpha$; г) $2\cos^2\alpha$. **672.** $\sqrt{8+8\cos\alpha}$. **673.** 1. **674.** а) $-\text{tg}\,x$; б) $-\cos x$; в) 1; г) 1. **675.** а) -1; б) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, учтите, что $\frac{2\pi}{7}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}$; в) $1\frac{4}{9}$; г) 1. **676.** а) 1,2; б) –1,25. **678.** а) 1; б) –1. **679.** $1\frac{31}{32}$. **680.** $\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos2\alpha}$. **681.** б) Используйте свойства неравенств: $a+\frac{1}{a}\geq2$, $2>\sqrt{\pi}$. **684.** г) –1; д) $-\sqrt{3}$; е) $\sqrt{3}$. **685.** а) –1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1. **686.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **687.** а) $-\frac{1}{8}$; б) $\frac{7}{4}$. **688.** а) $\frac{3}{19}$; б) $\frac{9}{17}$. **689.** а) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$; б) $\frac{\sqrt{2}-4}{6}$; в) $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **690.** $\frac{25\sqrt{3}+48}{39}$; $\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$ – угол III четверти. **691.** а) 0; б) $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$; в) $\sqrt{2}\cos\alpha$; г) $\sin\alpha$. **693.** а) Найдите $\cos(\alpha+\beta)$ или $\sin(\alpha+\beta)$. **694.** а) $\text{tg}\,\alpha$; б) $-\sqrt{2}\,\text{tg}\,\alpha$; в) 2; г) 1. **695.** а) $\sin15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\text{tg}\,15°=2-\sqrt{3}$; $\text{ctg}\,15°=2+\sqrt{3}$. **697.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **698.** а) $-\frac{36}{85}$; б) $\frac{13}{85}$. Чтобы выяснить, какой четверти принадлежит угол $\alpha-\beta$, сложите левые и правые части неравенств $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ и $-2\pi<-\beta<-\frac{3\pi}{2}$. **699.** а) $3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; б) $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; в) $\frac{3\text{tg}\,\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$. **700.** б) Используя формулы приведения, установите, что $\text{ctg}(45°-3\alpha)=\text{tg}(45°+3\alpha)$. **701.** Умножьте левую и правую части данного равенства на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и замените первый такой множитель на sin 45°, а второй на cos 45°. Далее примените формулу синуса суммы двух углов и сделайте вывод, используя свойства функции синус. **702.** а) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **705.** Используя данное равенство и то, что $\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$, установите, что

$\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=0$. **708.** $\frac{5\pi}{4}$. **710.** $\operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3}$. **711.** в) $2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; $\cos^2\frac{\alpha}{6}-\sin^2\frac{\alpha}{6}$; $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{8}}$. **712.** а) 2; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) 1; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **713.** а) $2\cos 50°$; б) $2\sin 75°$; в) $\cos 40° + \sin 40°$; г) $\cos 18°$. **714.** а) $\cos 4\alpha$; б) $\sin 4\alpha$; в) $\cos 4\alpha$; г) $\frac{1}{2}\sin 12\alpha$; д) 1; е) $\cos 6\alpha$. **715.** а) $-\frac{120}{169}$; б) $-0{,}28$; в) $-3\frac{3}{7}$; г) $-0{,}8$; д) $-\frac{24}{25}$; е) $\frac{17}{81}$. **716.** а) 0,5376; –0,8432; б) –0,92. **718.** а) $-2\sin\alpha$; б) 1; в) $-1-\operatorname{tg}^2\alpha$; г) $\sin 4\alpha$. **720.** а) $-\frac{8}{9}$; б) $-\frac{1}{2}$; возведите в квадрат данное равенство. **723.** а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; в) $2-\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}-1$. **724.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{14}}{4}$, $-\frac{\sqrt{7}}{7}$, $-\sqrt{7}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{1}{2}$, -2; в) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\frac{\sqrt{2}}{10}$, 7, $\frac{1}{7}$. **725.** а) $-\frac{1}{5}$ или 5; б) –7 или 7. Используя формулу: а) тангенса, б) синуса двойного угла, составьте уравнение и найдите $\operatorname{tg}\alpha$. **727.** а) $\frac{1}{5}$; б) b. **729.** а) $2\sin 8\alpha$; б) $\cos 2\alpha-\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\cos 4\alpha$. **732.** а) 3 и 7; б) 0 и 6. **733.** $\frac{2\sqrt{1-m^2}}{m^2-1}$. Обозначьте искомое выражение A и, используя формулу $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, найдите A^2, а затем A. **735.** а) $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π. **736.** Умножьте и разделите левую часть равенства: а) на $2\cos 10°$; б) на $\sin 20°$. **737.** $\sqrt{48-\sin^2 2\alpha}$. Используйте формулу $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Чтобы найти AC и BD, из центра O к хордам AC и BD проведите перпендикуляры OK и OL соответственно. Тогда $AC = 2KC$, $BD = 2LD$. Отрезки KC и LD найдите из треугольников OKC и OLD соответственно, предварительно выразив KO и KM из ΔMKO. **739.** а), б), г), д), е) – верно; в) – нет. **740.** а) $\cos 10°$; б) $\sqrt{3}\cos 5°$; в) $\sqrt{3}\cos 18°$; г) $\sqrt{3}\sin 10°$; д) $-0{,}5\sqrt{6}$; е) 0. **741.** а), г), е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б), в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **742.** а), е) $\sqrt{2}$;

б), д) $\sqrt{3}$; в) 1; г) –1. **745.** а) $-\sin 4\alpha$; б) $\sin \alpha$. **746.** а), б) $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$; в), г) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. **748.** а) $\operatorname{ctg} 11\alpha$; б) $\operatorname{ctg} 9\alpha$; в) $\operatorname{tg} 4\alpha$; г) $2\cos 4\alpha$. **749.** –2 и 2. **750.** а) Пусть окружность касается гипотенузы в точке H, тогда $AB = AH + HB = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \ldots$; б) 1), 2) верно. **751.** Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой основания BC и AD, причем $BC = AB = CD = 4$. Проведите высоты BK и CN, тогда $AD = 2AK + KN = 2 \times 4\cos \alpha + 4 = 8\left(\cos \alpha + \frac{1}{2}\right) = \ldots$. **752.** а) Замените $\frac{1}{2}$ на $\sin 30°$; б) вынесите за скобки 2 и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ замените на $\sin 60°$; е) вынесите за скобки 4, в скобках разложите выражение на множители по формуле разности квадратов и замените $\frac{1}{2}$ на $\cos 60°$. **754.** а) $2\sqrt{2}\cos 18° \cos 9°$; б) $\sqrt{3}\sin 50°$. **755.** а) $4\cos 8\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $4\sin 4\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha$; $\frac{3}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. **758.** а) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; б) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$; в) $\sqrt{3}$. **760.** а) $2\sqrt{2}\sin \alpha \times \cos(45° - \alpha)$. Используйте формулу косинуса двойного угла для преобразования выражений вида $1 \pm \cos 2\varphi$. **761.** $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$, $n \in Z$. **762.** а) $\frac{\pi}{3}$, π; б) 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, π; в) 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, π; г) 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π. **763.** $\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$. Пусть AB касается окружности в точке D, тогда $AB = AD + DB$. Определив углы KAD и ABM, отрезки AD и DB найдите из треугольников OAD и OBD : $AB = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = \ldots$. **764.** а) $\frac{1}{2}\cos 40° + \frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $\sin 6\beta - \sin 2\beta$. **765.** в) $-\frac{1}{2}\sin 6\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $-\frac{1}{2} - \cos 4\alpha$; е) $\sin \alpha - \cos 5\alpha$. **766.** а) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$; в) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; г) $\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2$. **767.** а), г) – нет; б), в) – верно. **769.** а) $\frac{1}{2}$; б) 2. **771.** а) –1; б) 1. **772.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$. **773.** а) $-\frac{14}{27}$; б) $\frac{7\sqrt{3}}{27}$; в) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$; г) $-\frac{23\sqrt{5}}{128}$. Установите, что данные выражения приводятся к виду:

а) $-2\cos 4\alpha \cos 2\alpha$; б) $\sin \alpha \cos 4\alpha$; в) $\sin \alpha \sin 4\alpha$; г) $\cos 4\alpha \sin \alpha$. **774.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **776.** б) $\frac{3}{4}\cos \alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$. **777.** а) $b + \frac{1}{2}$; б) $\frac{5-2b}{6}$. **779.** $\frac{11\pi}{12}$. **780.** Используя теорему синусов, выразите сумму двух других сторон треугольника: $\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. Установите, при каком значении β это выражение принимает наибольшее значение. Найдите третий угол треугольника, получите: $\angle B = \angle C = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **781.** а) $\sin 3\alpha + \sin 9\alpha$; б) $\frac{3}{4}\cos \alpha - \frac{3}{8}\cos 3\alpha - \frac{3}{8}\cos 5\alpha$; в) $3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha$. **783.** $m - 2{,}75$, $m \in [2; 3]$. **784.** а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12}$; в) π; г) 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$. **785.** 1) 3π; 2) в) 292,5°, $\frac{13\pi}{8}$; е) 255°, $\frac{17\pi}{12}$. **786.** а) $\frac{7}{3}$; б) 5. **788.** а) Неверно; б) верно. **789.** а) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$; б) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{3}$. **792.** а) $a + b$; б) $b - a$; в) $\frac{2a}{b}$; г) $-\frac{2b}{a}$. **793.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\sqrt{3}$. **795.** а) $2\sin \alpha$; б) 0; в) $-2\cos \alpha$; г) $\cos^2\alpha$. **796.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **797.** Используйте свойство пропорции. **798.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0. **799.** –3. **800.** Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. **801.** г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{3}{5}$. **802.** а) $\sin 48^\circ$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) $-\cos 36^\circ$; г) $2\operatorname{ctg} 40^\circ$. **803.** а) $\frac{1}{4}\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\cos 2\alpha$; г) $\cos 2\alpha$; д) $2\cos \alpha$; е) $-\operatorname{tg} \alpha$. **805.** б) Используя формулу $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, замените $\sin\left(70^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)$. **806.** а) 4; б) 6,25; в) $-\sqrt{6}\,m$. **807.** б) Неверно. **810.** а) $\sqrt{2}\cos(x - 45^\circ)$. **811.** в) Левую часть равенства представьте в виде дроби и разложите ее числитель на множители по формуле разности квадратов, тогда получится $\frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha}{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}$ … . **813.** Значение второго выражения больше. **814.** $-\frac{16\sqrt{3}}{27}$. **815.** ≈ 1741 тыс. км^2. **816.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{\pi}{8} + \pi n$ и $\frac{3\pi}{8} + \pi n$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; г) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **821.** а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{7}{8}$. **822.** Используйте формулу $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$. **826.** Существуют, –2 и 2. **827.** Всего восемь значений, которые можно найти по формулам $x = \frac{\pi n}{5}$ и $\frac{\pi n}{3}$. **828.** а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; б) $\sin\frac{\alpha}{4}$. **829.** $\frac{ab}{a-b}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой $AD = a$, $BC = b$. Пусть $AB = x$, $CD = y$, тогда по свойству трапеции, описанной около окружности, $a + b = x + y$. Постройте отрезок $CE \parallel AB$, тогда $\angle ECD = \alpha$, $ED = a - b$. Выразите площадь ΔECD двумя способами и составьте уравнение: $xy \sin\alpha = (a - b)2r$, где r – искомый радиус окружности. Для нахождения xy используйте условие $a + b = x + y$ и теорему косинусов, то есть $(a - b)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$, записав это равенство так: $(a - b)^2 = (x + y)^2 - 2xy(1 + \cos\alpha)$. **830.** 1A) а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\sqrt{3}$. 2A) а) $3\sin 2\alpha$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. 3A) а) $\frac{7}{25}$; б) $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; в) $\frac{1}{7}$. 5C) $\frac{1}{4}$. **831.** а), г). **832.** а), в). **833.** а) Невозможное. **834.** 0,1. **835.** а) $\frac{1}{3}$; б) 0,5; в) 0; г) 1. **836.** $\frac{39}{40}$. **837.** а) $\frac{4}{15}$; б) $\frac{1}{6}$. **838.** Нет. **839.** $\frac{1}{3}$ **840.** $\frac{2}{9}$. **841.** 0,75. **842.** 0,064. **843.** а) $\frac{1}{7}$; б) вероятность выбора не дубля больше. **844.** $\frac{1}{C_{20}^2} = \frac{2}{95} \approx 0{,}02$. **845.** Например, тир, рот; $\frac{1}{C_6^3} = \frac{1}{20}$. **846.** а) 0; б) $\frac{1}{1107568}$. **847.** $\frac{6}{C_7^2} = \frac{2}{7}$. **848.** 0,25. Всего исходов: $1 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$, благоприятствующих – 4. **849.** Вероятность выбора 5 номеров из 36 больше. **850.** $\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3} \approx 0{,}88$. **851.** $\frac{3}{C_5^3} = 0{,}3$. **852.** $\frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$. **853.** $\frac{1}{A_{10}^6} = \frac{1}{5040}$. **854.** а) $\frac{C_8^3}{C_{10}^5} = \frac{2}{9}$; б) $\frac{2C_8^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{9}$. **855.** $\frac{3}{14}$. **856.** 0,28. **857.** ≈ 0,30. **858.** ≈ 0,16. **859.** а) ≈ 0,14; б) ≈ 0,006; в) ≈ 0,48. **860.** а) $\frac{3}{65}$; б) ≈ 0,56. **861.** 6 %. **862.** ≈ 0,57. **863.** а) 4 %; б) 2 %; в) 60 %. **864.** ≈ 0,19. **865.** 0,2. **866.** $\frac{1}{6}$. **867.** $\frac{1}{9}$. **868.** 0,75. **869.** а) $\frac{1}{12}$; б) 0,25. **870.** ≈ 0,22. **871.** ≈ 0,41. **872.** ≈ 0,83.

873. ≈ 0,86. **874.** ≈ 0,40. **875.** ≈ 0,71. **876.** ≈ 0,39. **877.** ≈ 0,15. Так как данный и полученный пятиугольники подобны, то отношение их площадей равно отношению квадратов их сторон. Используя теорему косинусов, установите, что указанное отношение равно $\frac{1 - \cos 36^\circ}{1 + \cos 72^\circ} \approx 0{,}15$. **878.** 0,5. **879.** а) 0,4; б) $\frac{1}{13}$. **880.** $\frac{8}{19}$. **881.** ≈ 27 %. **882.** $\frac{11}{45}$. **883.** а) ≈ 0,14; б) ≈ 0,07. **884.** $\frac{1}{C_{33}^{4}} \approx 0{,}00002$. **885.** $\frac{2}{3}$. **886.** а) 0,25; б) $\frac{2}{13}$. **887.** Фаризы. **888.** $\frac{1}{8!} \approx 0{,}00002$. **889.** 0,25. **890.** 0,2. Всего исходов 5! = 120, благоприятствующих 3! · 2! · 2 = 24. **891.** $\frac{8 \cdot C_{192}^{2}}{C_{200}^{3}} \approx 0{,}11$. **892.** 1А) а и б. 2А) 0,25. 3А) $\frac{2}{3}$. 4В) ≈ 76 %. 5С) $\frac{4 \cdot C_{6}^{4}}{C_{10}^{5}} = \frac{5}{21}$. **893.** а) 0,8 и –1,25; б) –0,75 и $1\frac{1}{3}$. **894.** 0,5. **895.** а) Рациональным; б) иррациональным. **896.** а) $\frac{1}{(a-3)^2}$, 0,1225; б) $3b + 2$, –4,5; в) $\frac{ab}{a+b}$, 0,1; г) $-\frac{a}{b}$, –0,75. **897.** а) В 20 раз; б) $m < n$. **898.** а) 3,5 кг; б) хватит. **899.** 2 или 8. **900.** а), б) представьте каждое слагаемое в виде степени 2 и вынесите за скобки общий множитель; в) учтите, что произведение трех последовательных чисел $(n - 1)\, n(n + 1)$ делится на 3. **902.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{27}$. **903.** а) a^{23}; б) $\frac{9}{b}$. **904.** а) $\frac{y - 5x}{y + 5x}$; б) $\sqrt{x} - 3\sqrt{y}$; в) $\frac{x-4}{x-5}$; г) $\frac{2x-1}{4x+1}$. **905.** 45. **906.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. **907.** 3. **908.** 4,5. **909.** а) $-\frac{1}{7}$; б) 2; в) $2\frac{3}{8}$. **910.** а) 9,25; б) 0,06. **911.** $-x(x^2 - 1)$. **912.** а) 20; б) 20 %. **913.** 48, 80, 12, 12. **914.** $\frac{63}{64}$. Представьте каждое слагаемое в виде разности двух дробей, например, $\frac{7}{8 \cdot 15} = \frac{1}{8} - \frac{1}{15}$. **915.** $100\sqrt{11}$. Выразите сумму кубов через сумму и произведение x и y. **916.** Возведите в квадрат левую и правую части неравенства. **918.** 50 %. **919.** 25. **920.** 63. **921.** а) $(-\infty; -9{,}6)$; б) $\left[4\frac{4}{7}; +\infty\right)$. **922.** а) 0,4; б) –2; в) –3. **923.** а) $(-\infty; -3]$; б) $[-4; 5]$; в) $[-2; -1) \cup \cup (-1; +\infty)$. **924.** а) 0; $\pm\sqrt{2}$; б) –7; –4; 0; в) –1; $\pm\sqrt{2}$; г) –1; ±4. **925.** –15; –13 или 13; 15. **926.** а) 28 ц/га; б) 25 м^3. **927.** а) $(-3; 2)$; б) $[2; 8] \cup \{-3\}$. **928.** а) ±3; б) –1; 2; в) ±5; $\pm 2\sqrt{3}$; г) 3; $3 \pm 2\sqrt{5}$. **929.** а) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$;

б) $(-\infty; -8]\cup[1{,}2; 2)$; в) $[1; 3]\cup\{-2\}$; г) $(-\infty; -1]\cup\{2\}\cup[8; +\infty)$. **930.** а) Не имеет решений; б) имеет два решения; в) имеет одно решение. **931.** а) $(-2; -5)$; $(1; 4)$; б) $(5; 3)$, замените одно из уравнений системы уравнением, полученным в результате деления их левых и правых частей; в) $(2; 3)$; $(3; 2)$. **933.** а) 9; б) 5; в) 11. **934.** 72 км/ч, 56 км/ч. **935.** 30 дней и 20 дней. **936.** $\frac{1}{a+1}$ при $a \neq \pm 1$; $x \in R$ при $a = 1$; нет корней при $a = -1$. **937.** а) При $c \in (-\infty; 18)\cup(18; +\infty)$; б) $c \in (-\infty; -1{,}5)\cup(-1{,}5; +\infty)$; в) при $c = \frac{4}{3}$. **938.** 0,32. **939.** $x^2 = 0$ или $x^2 + x - 2 = 0$. **940.** а) 35; б) –33; в) 1. **941.** а) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; б) $\{-2\}\cup\left(-\frac{1}{2}; 1\right]\cup[5; +\infty)$. **942.** Больше 9 см, но не больше 11 см. **943.** а) $[2; 7)$; б) $(-\infty; -2]\cup[0; 1)\cup\{3\}$. **944.** а) $(-7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $(7\sqrt{2}; \sqrt{2})$; б) $(-2; -1)$; $(-2; 1)$; $\left(-\frac{1}{7}; -\frac{\sqrt{10}}{7}\right)$; $\left(-\frac{1}{7}; \frac{\sqrt{10}}{7}\right)$. **945.** а) Рисунок 9, *а*; б) рисунок 9, *б*. **946.** При $a = 1$. **947.** а) $x^2 - 8x + 13 = 0$. **948.** –1; –3.

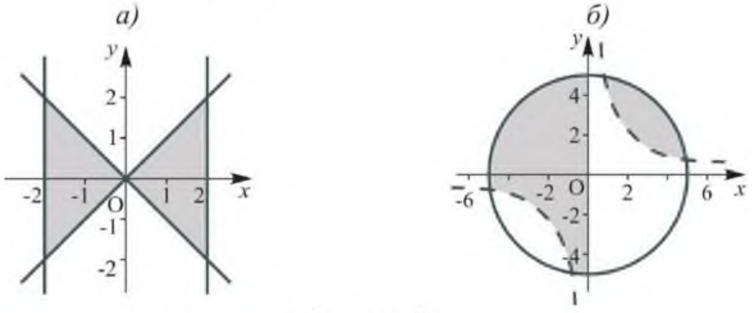

а) *б)*

Рисунок 9

949. а) 1; б) 3, $\frac{2}{3}$; разделите все члены уравнения на $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$, далее используйте замену переменной, обозначив $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = t$. **950.** а) $[1; 0)\cup(2; 3]$; б) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3}; 2\right)\cup\left(2; 2\frac{1}{3}\right]$. **951.** $5 < v < 15$. **952.** а) При $a = 3$; б) $a = 2$. Используйте геометрическую интерпретацию решения системы уравнений. **953.** а) $(4; 8)$, $(8; 4)$; б) $(-3; -1)$, $(-1; -3)$, используйте замену переменной, например, $x + y = a$, $xy = b$. **954.** 24 кв.ед. **955.** а) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{13}, \frac{1}{18}$; г) $2, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{24}$. **957.** а) $a_n = 10n$; б) $a_n = 6n - 3$;

в) $a_n = 12n$; г) $a_n = 9n + 8$. Эти последовательности являются арифметическими прогрессиями. **958.** Верно. **959.** а) Является; б) нет. **960.** 6 членов. **961.** 20. **962.** а) При $x = -1$; б) –10 или 1. **963.** 2. **964.** За 5 дней. **965.** 50. **966.** 462 лота. **967.** 5 и 10. **968.** 2401 мера зерна. **969.** 121. **970.** 16. **971.** –0,5. **972.** 4; 8; 12. **973.** $\frac{16}{9}$. **974.** а) 4; б) –20. **976.** Можно, одна из сторон равна 12 см. Другие стороны могут быть равны (в см): 12 и 12, 11 и 13, 10 и 14, 9 и 15, 8 и 16, 7 и 17. **977.** 25. **978.** $\frac{1}{3}$. **979.** Используйте метод математической индукции. **980.** 135 или 630, или 765. **981.** –10. **982.** $a = 10, b = 4$. **983.** 1; 3; 9 или $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$. **984.** 18 с. **985.** 0,2 рад. **986.** а) ≈ 0,94 м; б) ≈ 3,14 м. **987.** а) $\frac{3\pi}{5}$; б) $\frac{4\pi}{5}$. **988.** а) Могут; б) нет. Проверьте, выполняется ли равенство $\mathrm{tg}\,\alpha \times \times \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$. **989.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **991.** а) Не существует; б) существует. Используйте формулу синуса двойного угла и учтите, как изменяется синус угла. **992.** 2. **993.** а) $-\frac{56}{65}$; б) $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **994.** а) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{3}{4}$. **995.** а) $-2a$; б) $\frac{2}{b}$. **996.** а), б), в) – верно; г) нет. **997.** а) –1; б) $-\mathrm{tg}^2 5\alpha$. **999.** а) $-2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$ или $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, используя формулу тангенса двойного угла, составьте уравнение и найдите $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **1000.** Используя основное тригонометрическое тождество, запишите квадратное неравенство относительно одной тригонометрической функции. Далее используйте замену переменной. а) $x = 2\pi n, n \in Z$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. **1001.** а) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. **1002.** $\frac{4}{a^2}$. **1003.** $\frac{7}{24}$ и $\frac{24}{7}$. **1004.** Представьте $\cos^3 x$ как $\cos x \cos^2 x$ и замените $\cos^2 x$ на $\frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ … . **1005.** 30° и 150°. **1006.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{5}{8}$. **1007.** Используя единичную окружность, установите, что $0 < \mathrm{tg}\, x < 1$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ и докажите, что $\mathrm{tg}\, 2x - 2\mathrm{tg}\, x > 0$.

1008. в) $S = \frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. **1009.** а), б) – не является графиком функции. **1010.** $x + 4 = 0$. **1011.** $y = 5x - 3$. **1012.** Например, а) $y = 8x + 3$; б) $y = 3x - 2$. **1013.** $y = -x + 2$. **1014.** $b = -1$. **1015.** а) $y = 4x + 5$, $y = x^3$; б) $y = -8x + 2$, $y = -\sqrt{x}$. Функция $y = -\frac{4}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$, но не является возрастающей на всей области определения. Убедитесь в этом, сравнив значения этой функции в точках –1 и 4, например. **1016.** в). **1017.** а) (2; 4), $D = [4; +\infty)$; б) (3; 16), $D = (-\infty; 16]$. **1018.** (2; 4). **1019.** а) $(-\infty; 1]$; б) $(-\infty; -4)\cup(-4; 4)\cup\cup(4; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 3]$; г) $[-5; -3)\cup(-3; 4)\cup(4; 5]$. **1020.** б) Возрастает при $x\in(-\infty;0)$ и при $x\in(0; +\infty)$; в) возрастает при $x\in[-4; +\infty)$; г) возрастает при $x\in[1; +\infty)$. **1021.** а) [–3; 5]; б) [–2; 2]; в) –3, –1, 2, 4; г) [–3; –2] и [0; 3]; д) $(-3; -1)\cup(2; 4)$. **1022.** (1; 5), (3; 3), (6; 0). **1023.** а) $S = \frac{c^2}{8}$; б) 1) 66 деталей; 2) 20 %. **1024.** При $k = -3{,}6$. **1025.** Установите, что: а) $c = 10$; б) $c = -2$. **1026.** а) Четная; б) нечетная. **1027.** Постройте график:

а) $y=\begin{cases} x^2 - 1, \text{при } x > 0, \\ x^2 + 1, \text{при } x < 0; \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} -3, \text{при } x \geq 3, \\ 2x + 3, \text{при } x < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2x + 4, \text{при } x < 2, \\ 2x - 4, \text{ при } 2 \leq x < 4, \\ 4, \text{при } x \geq 4. \end{cases}$

1028. (2; 5). **1029.** $S = 6r^2$. **1030.** а) 5 или 13; б) ±4; ±3. **1031.** а) График – парабола $y = x^2 + 1$, на которой нет двух точек (–2; 5) и (2; 5). **1032.** а) Пусть $a < b$, докажите, что $y(a) < y(b)$, то есть разность $y(a) - y(b) < 0$. Получите $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = (a - b) \times \times \left(\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 1\right)$. **1033.** 24. **1034.** 120. **1035.** 10. **1036.** 35. **1037.** 252. **1038.** 4845. **1039.** 840. **1040.** 11 880. **1041.** $\frac{8}{11}$. **1042.** $\frac{11}{365}$. **1043.** $\frac{1}{5040}$. **1044.** 0,2. **1046.** 7. **1048.** 1. Установите, что все числа данного множества являются корнями многочлена. **1049.** ≈ 0,4. **1050.** 1A) а) $\frac{1}{7}$; б) 1. 2A) (–4; –3), (–4; 3), (4; –3), (4; 3). 3A) 1224. 4B) $-1 \leq \sin(60^\circ - \alpha) \leq 1$. 5C) $\frac{27\pi}{4}$ кв. ед.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тренировочные упражнения

I. Уравнения, неравенства с двумя переменными и их системы

Нелинейные уравнения с двумя переменными

1. Какие из точек $A(2; 3)$, $B(-1; 1)$, $C(0; 0)$, $D(2; 4)$, $E(0{,}1; 0{,}01)$ принадлежат графику уравнения $x^2 - y = 0$?

2. Графики каких из уравнений проходят через начало координат:

а) $xy - 4 = 0$; в) $x^3 - 2y = 0$;

б) $2x + y = 0$; г) $x^2 - y^2 = 0$?

3. Объясните, почему не имеет решений уравнение:

а) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = -1$;

б) $(x - 10)^2 + (y + 0{,}1)^2 = -0{,}5$.

4. Объясните, почему уравнение $(x + 14)^2 + (y - 15)^2 = 0$ имеет только одно решение и найдите его.

5. Проверьте, является ли пара чисел $(-5; 6)$ решением уравнения:

а) $x^2 - y = 19$; б) $-2x^2 + 7y = -8$.

6. Найдите какую-либо пару чисел, являющуюся решением уравнения:

а) $(x - 3)(y + 2) = 0$; в) $x^2 + y^2 = 64$;

б) $x^2 - y^2 = 64$; г) $x^3 - y = 2$.

7. Выразите из уравнения переменную y через x и найдите два каких-либо решения уравнения:

а) $xy = 16$; б) $10xy - y = 1$.

8. Найдите все пары натуральных чисел, являющихся решениями уравнения:

а) $xy = 4$; б) $xy = -4$.

9. Найдите три пары натуральных чисел, являющихся решениями уравнения:

а) $(2x - y)^2 = 0$; б) $(x + 3y)^2 = 0$.

10. Решите уравнение:

а) $9x^2 - 16y^2 = 0$; в) $81x^2 + 49y^2 = 0$;

б) $100x^2 - 36y^2 = 0$; г) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{25}y^2 = 0$.

11. Сколько решений имеет уравнение:

а) $(x^2 - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$; б) $(x + 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$?

12. Постройте график уравнения:

а) $4xy = 12$; б) $-2xy = 16$.

13. Заполните таблицу:

Уравнение	График уравнения
$x - y = 8$	прямая $y = x - 8$
$2x + 5 = 3y$	
$x^2 + y^2 = 16$	
$y - x^2 + 4 = 0$	
$xy = 10$	
$2x^2 - y = 3$	

14. Заполните таблицу:

Уравнение окружности	Координаты центра	Радиус
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$		
$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$		
	$(-3; 3)$	5
	$(0; 0)$	$\sqrt{3}$

15. Не выполняя построения графика уравнения, найдите координаты точек его пересечения с осями координат:

а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Системы нелинейных уравнений с двумя переменными

16. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x + 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 3. \end{cases}$

17. Объясните, почему не существует пары чисел, являющейся решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

18. Является ли пара чисел (3; –1) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} y - x = 6, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y = 8, \\ 3x - y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = -4, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2xy = -6, \\ 2x^2 - y^2 = 16? \end{cases}$

19. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 9, \\ (x-1)(y+1) = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 10, \\ x - 5xy = 160; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 8, \\ (x+2)(y-4) = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = 7, \\ xy + y = 42. \end{cases}$

Решение текстовых задач с использованием систем нелинейных уравнений с двумя переменными

Составьте систему уравнений по условию задачи (№ 20–23).

20. Одна сторона прямоугольника на 7 см больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его диагональ равна 13 см.

21. Если от числителя и знаменателя обыкновенной дроби отнять по единице, то дробь уменьшится на $\frac{5}{56}$. Если же к числителю и знаменателю прибавить по единице, то дробь увеличится на $\frac{5}{72}$. Найдите эту дробь.

22. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 4 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Через 30 минут им осталось пройти до встречи 500 м. Если бы пешеход из пункта В вышел на 10 минут позже, то встреча произошла бы на середине пути. С какой скоростью шел каждый пешеход?

23. Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объем земельных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить эту работу на 4 часа быстрее, чем другой. За сколько часов каждый экскаватор в отдельности может выполнить этот объем земельных работ?

24. Найдите два положительных числа, если их сумма равна 11, а произведение равно 30.

25. Найдите размеры цветочной клумбы прямоугольной формы, периметр которой равен 12 м, а площадь 5 м^2.

26. Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 8, а их произведение равно 15. Рассмотрите все возможные случаи.

27. Найдите два числа, если одно из них равно квадрату другого, а их сумма равна 0.

Неравенства с двумя переменными

28. Объясните, почему не имеет решений неравенство:

а) $x^2 + y^2 < -1$; б) $|x| + |y| < 0$.

29. Какие из пар чисел: $(0; 0)$, $(2; -1)$, $(1; 2)$, $(2020; 0)$ являются решениями неравенства $xy > -2$?

30. Подберите две какие-либо пары чисел, являющиеся решениями неравенства:

а) $\frac{1}{x} - y > 0$; б) $x^2 - y^2 > 4$; в) $x^2 + y^2 \le 15$; г) $-2x^2 + y \ge 0$.

31. Решением какого из неравенств является пара чисел $(-2; 5)$:

а) $x^2 + y^2 \ge 0{,}81$;

б) $x^2 - (y - 3)^2 \le 0$?

32. Сколько пар целых чисел являются решениями неравенства:

а) $x^2 + y^2 \le 0$; б) $x^2 + y^2 < 1$; в) $x^2 + y^2 \le 2$; г) $|x| + |y| \le 0$?

33. Запишите неравенство, множество решений которого показано на рисунке 1.

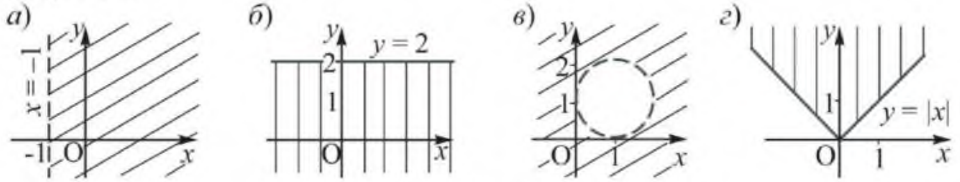


Рисунок 1

34. Изобразите на координатной плоскости множество всех решений неравенства:

а) $y \ge x^2$; б) $x^2 + y^2 \le 2\frac{1}{4}$; в) $y > x - 2$; г) $y < -|x|$.

35. Сколько пар целых чисел являются решениями неравенства $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 \le 4$? Покажите их точками на координатной плоскости.

Системы неравенств с двумя переменными

36. Какие из пар чисел: $(1; 1)$, $(4; 5)$, $(16; -17)$, $(2020; 2019)$ являются решениями системы неравенств $\begin{cases} xy > 3, \\ x - y < 5? \end{cases}$

37. Подберите две какие-либо пары чисел, являющиеся решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 \ge 4, \\ x < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 < x < 5, \\ y \ge x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -10 \le y \le -4, \\ x^2 \le y^2. \end{cases}$

38. Объясните, почему не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x + 4y \geq 0, \\ x^2 + y^2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 0, \\ y > x. \end{cases}$

39. Составьте систему неравенств, множество решений которой изображено на рисунке 2.

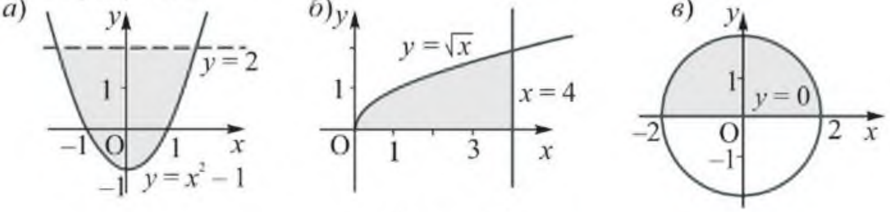


Рисунок 2

40. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых являются решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ y \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y > 0, \\ xy \leq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y < 0, \\ xy \geq 0. \end{cases}$

41. Сколько пар целых чисел являются решениями системы неравенств (покажите их точками на координатной плоскости):

а) $\begin{cases} |\,x\,| < 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |\,y\,| < 2, \\ x^2 + y^2 < 4? \end{cases}$

II. Элементы комбинаторики

Основные понятия и правила комбинаторики

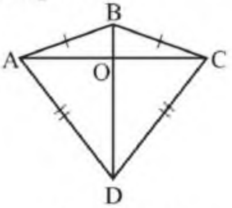


Рисунок 3

42. В дельтоиде (так называют четырехугольник, изображенный на рисунке 3) проведены диагонали. Сколько всего получилось на этом рисунке: а) треугольников; б) пар равных треугольников?

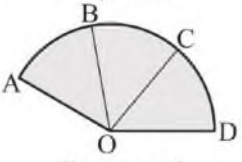


Рисунок 4

43. Из вершины угла *AOD* проведены два луча *OB* и *OC*, делящие его на три равных угла (рисунок 4). Сколько всего получилось на этом рисунке: а) углов; б) пар равных углов?

А	Й	Ф
Й	Ф	О
Ф	О	Н

44. Сколькими способами, двигаясь последовательно по буквам таблицы, можно прочитать слово «АЙФОН»?

45. Из поселка А в поселок В ведут три дороги, а из В в поселок С – две дороги. Сколько существует маршрутов поездки из А в С через В туда и обратно?

46. В меню кафе 2 первых, 3 вторых и 4 третьих блюда, а в меню столовой 2 первых, 5 вторых и 2 третьих блюда. Где больше способов выбора обеда, включающего первое, второе и третье блюда, в кафе или столовой?

47. Сколько анаграмм (подряд записанных букв) можно составить: а) из всех букв имени АННА; б) из всех букв слова ГРАФ?

48. Используя графы, составьте вашу родословную.

Перестановки без повторений

49. Сколько анаграмм можно составить из всех букв слова СХЕМА?

50. Составьте все возможные перестановки из элементов множества: а) $\{1; 2\}$; б) $\{3; 4; 5\}$; в) $\{C; O; M\}$.

51. Найдите значение выражения: а) P_3; б) P_4; в) $\dfrac{P_4}{P_2}$.

52. Вычислите: а) $3! + 4!$; б) $\dfrac{5!}{3!}$; в) $4! - 2!$; г) $6^2 - (3!)^2$.

53. Четыре спортсмена занимают 4 беговые дорожки произвольным образом. Сколькими способами они могут это сделать?

Размещения без повторений

54. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 3, 5, 8, не повторяя их в числе?

55. Найдите значение выражения: а) A_5^3; б) A_7^4; в) $A_4^2 \cdot P_3$.

56. Сколькими способами можно выбрать двух человек на две различные должности из четырех кандидатов?

57. В соревнованиях по плаванию участвуют 6 человек. Сколько существует вариантов распределения трех первых мест между ними?

Сочетания без повторений

58. В библиотеке из четырех понравившихся книг Лейла может выбрать только две. Сколькими способами она может это сделать?

59. Из пяти различных вещей составляется посылка, в которую можно вместить только три из них. Сколько существует вариантов составления посылки?

60. Найдите значение выражения: а) C_3^2; б) C_4^3; в) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^5$.

61. Сколькими способами можно распределить 6 человек по парам?

62. Встретились n друзей, и каждый из них пожал руку другу. Сколько было рукопожатий, если n равно: а) 5; б) 7?

III. Последовательности

Числовая последовательность, способы ее задания и свойства

63. Какой член последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$:

а) следует за членом a_{72}; a_{101}; a_n; a_{n+1};

б) предшествует члену a_{72}; a_{100}; a_n; a_{n-2};

в) расположен между членами a_{n+1}; a_{n+5}?

64. Последовательность задана формулой n-го члена $a_n = 5n - 4$. Найдите a_1; a_3; a_{n+1}.

65. Запишите пять первых членов последовательности, заданной формулой $a_n = n^2 - n$. Чему равен десятый ее член?

66. Последовательность задана рекуррентной формулой $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. а) Найдите четвертый член этой последовательности. б) Можно ли по этой формуле сразу найти a_{100}?

67. Последовательность задана формулой $a_n = 3n$. Установите, является ли членом этой последовательности число а) 27; б) 35; в) 123; г) 200. Если является, то укажите его номер.

68. Сколько отрицательных чисел содержит последовательность, заданная формулой $a_n = 3n - 15$?

69. Сколько положительных чисел содержит последовательность, заданная формулой $a_n = 42 - 5n$?

70. Запишите формулу n-го члена последовательности:

а) четных чисел;

б) нечетных чисел;

в) чисел, кратных 5;

г) квадратов натуральных чисел.

71. Запишите рекуррентную формулу последовательности чисел (a_n), если известно, что:

а) $a_1 = 100$, а каждый ее следующий член на 5 меньше предыдущего;

б) $a_1 = -1$, а каждый ее следующий член больше предыдущего в 5 раз.

72. Составьте ряд из пяти любых последовательных натуральных чисел. Объясните, почему сумма этих чисел делится на 5.

Метод математической индукции

Заполните пропуски в доказательстве утверждений методом математической индукции (№ 73–74).

73. Последовательность чисел (a_n) задана формулой n-го члена. Докажите, что сумму n первых членов этой последовательности S_n можно найти по формуле:

а)	$a_n = 4n$	$S_n = 2n(n + 1)$
б)	$a_n = 2n - 1$	$S_n = n^2$
в)	$a_n = 6n$	$S_n = 3n(n + 1)$

Доказательство. а)

1) При $n = 2$ имеем: $a_1 + a_2 =$ __________ ; $S_2 = 2 \cdot 2(2 + 1) = 12$. При $n = 2$ формула $S_n = 2n(n + 1)$ верна.

2) Допустим, что эта формула верна при $n = k$, то есть

$S_k =$ ____________________ .

3) Докажем, что и при $n = k + 1$ верна формула суммы, то есть $S_{k+1} = 2(k + 1)(k + 2)$.

Действительно, учитывая предположение, получим: $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = 2k(k + 1) + 4(k + 1) =$ ___________________ .

Следовательно, формула $S_n = 2n(n + 1)$ суммы n первых членов последовательности $a_n = 4n$ верна при любом $n \in N$.

Доказательство. б)

1) При $n = 3$ имеем: $a_1 + a_2 + a_3 =$ __________ ; $S_3 =$ __________ . При $n = 3$ формула $S_n = n^2$ верна.

2) Допустим, что эта формула верна при $n = k$, то есть

$S_k =$ ____________________ .

3) Докажем, что и при $n = k + 1$ верна формула суммы, то есть $S_{k+1} = (k + 1)^2$.

Действительно, учитывая предположение, получим: $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} =$ ____

____ .

Следовательно, формула $S_n = n^2$ суммы n первых членов последовательности $a_n = 2n - 1$ верна при любом $n \in N$.

Доказательство. в)

1) При $n = 2$ имеем: $a_1 + a_2 =$ _________ ; $S_2 =$ _________ . При $n = 2$ формула $S_n = 3n(n + 1)$ верна.

2) Допустим, что эта формула верна при $n = k$, то есть

$S_k =$ _________ .

3) Докажем, что и при $n = k + 1$ верна формула суммы, то есть $S_{k+1} = 3(k + 1)(k + 2)$.

Действительно, учитывая предположение, получим:

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} =$ ____ .

Следовательно, формула $S_n = 3n(n + 1)$ суммы n первых членов последовательности $a_n = 6n$ верна при любом $n \in N$.

74. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $9^n + 3$ делится на 4;

б) $13^n + 5$ делится на 6;

в) $7^{2n} - 1$ делится на 24.

Доказательство. а)

1) При $n = 1$ имеем: _________________ делится на 4.

2) Допустим, что при $n = k$ выражение $9^k + 3$ делится на 4.

3) Докажем, что и при $n = k + 1$ выражение _________________ делится на 4.

Действительно, $9^{k+1} + 3 = 9 \cdot 9^k + 3 = (8 + 1)9^k + 3 = 8 \cdot 9^k + (9^k + 3)$. Так как каждое слагаемое делится на 4 (объясните почему), то и сумма делится на 4. Следовательно, при любом $n \in N$ выражение $9^n + 3$ делится на 4.

Доказательство. б)

1) При $n = 1$ имеем: _________________ делится на 6.

2) Допустим, что при $n = k$ выражение ____________ делится на 6.

3) Докажем, что при и $n = k + 1$ выражение _____________ делится на 6.

Действительно, $13^{k+1} + 5 =$ ____

____

____ .

Так как каждое слагаемое делится на 6 (объясните почему), то и сумма делится на 6. Следовательно, при любом $n \in N$ выражение $13^n + 5$ делится на 6.

Доказательство. в)

1) При $n = 1$ имеем: _________________ делится на 24.

2) Допустим, что при $n = k$ выражение __________ делится на 24.

Докажем, что и при $n = k + 1$ выражение _________________ делится на 24.

Действительно, $7^{2(k+1)} - 1 =$ ____

____

____ .

Так как ____

____

Следовательно, при любом $n \in N$ выражение $7^{2n} - 1$ делится на 24.

Арифметическая прогрессия и ее свойства

75. Укажите последовательность, которая является арифметической прогрессией:

а) 3; 6; 12; 24; …;
б) 3; 6; 9; 12; … ;
в) 3; 0; –3; –6; … ;
г) 3; –9; 27; –81; … ;
д) 3; 3; 3; 3; … ;
е) 3; 9; 15; 21; … .

76. Назовите три следующих члена арифметической прогрессии:

а) 5; 7; … ; б) 12; 8; … ; в) –4; 1; … ; г) –9; –9; … .

77. Укажите формулу *n*-го члена арифметической прогрессии:

а) $a_{n+1} = a_n + d$; б) $a_{n+1} = a_n - d$; в) $a_n = a_1 + nd$; г) $a_n = a_1 + n(d - 1)$.

78. Запишите формулу *n*-го члена арифметической прогрессии, указанной в № 76.

79. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_2 = 4, a_3 = 10$; б) $a_3 = 5, a_5 = 9$; в) $a_7 = 20, a_{10} = 35$; г) $a_{10} = 32, a_{14} = 16$.

80. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Заполните таблицу:

	a_1	d	n	a_n
а)	5	2	8	
б)	20	–4	12	
в)	–3	5	7	
г)		–3	11	–24

81. Установите, является ли число 100 членом арифметической прогрессии, если является, то укажите его номер:

а) 4; 14; 24; … ; б) 4; 16; 28; … .

Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

82. Укажите формулу суммы *n* первых членов арифметической прогрессии:

а) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$;

б) $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$;

в) $S_n = \dfrac{a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

г) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

83. Запишите сумму первых n членов арифметической прогрессии:

а) 2; 6; 10; … ;　　в) 4; 12; 20; … ;

б) 2; –4; –10; … ;　　г) –4; –20; –36; … .

84. Найдите сумму шести первых членов арифметической прогрессии:

а) 2; 4; … ;　　в) 1; –2; … ;

б) 5; 5; … ;　　г) –4; 1; … .

85. Найдите сумму всех: а) четных чисел от 10 до 50; б) чисел от 1 до 100; в) двузначных чисел, кратных 5.

86. Что больше и на сколько: сумма всех четных чисел первой сотни или нечетных?

87. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Заполните таблицу:

	a_1	d	n	a_n	S_n
а)	3			11	25
б)	4		5		30
в)		3	7		70
г)		–1		–10	–22

88. Найдите сумму всех отрицательных членов прогрессии: –15; –11; … .

Геометрическая прогрессия и ее свойства

89. Является ли геометрической прогрессией последовательность: а) 9; 90; 900; 9000; б) 9; 99; 999; 9999?

90. Укажите последовательность, которая является геометрической прогрессией:

а) 2; 4; 9; 16; … ;　　в) 2; –4; 8; –16; … ;

б) 2; 4; 8; 16; … ;　　г) 4; 4; 4; 4; … .

91. Найдите три следующих члена геометрической прогрессии:

а) 3; 6; … ;　　в) 3; 1; … ;

б) –3; 6; … ;　　г) 1; –1; … .

92. Укажите формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n):

а) $b_n = b_1 \cdot q^n$;　　в) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;

б) $b_{n+1} = b_n \cdot q$;　　г) $b_{n+1} = \frac{b_n}{q}$.

93. Запишите формулу n-го члена каждой геометрической прогрессии, приведенной в № 91.

94. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 2$, $b_2 = 8$; в) $b_3 = 5$, $b_6 = 5$;
б) $b_2 = 4$, $b_4 = 16$; г) $b_4 = -2$, $b_6 = -18$.

95. Является ли число 16 членом геометрической прогрессии:

а) $\frac{1}{2}$; 2; … ; в) –2; 4; … ;
б) $\frac{1}{8}$; 1; … ; г) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; … ?

96. Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = 1$, $q = 2$; в) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$;
б) $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = -2$; г) $b_1 = 10$, $b_2 = -10$.

97. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Заполните таблицу:

	b_1	q	n	b_n
а)	1	2	4	
б)	$\frac{1}{3}$	–3	4	
в)	4	–1	8	
г)		–2	5	8

Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии

98. Укажите формулу суммы *n* первых членов геометрической прогрессии:

а) $S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$; в) $S_n = \dfrac{b_n(1 - q^n)}{1 - q}$;
б) $S_n = \dfrac{b_1 \cdot q - b_n}{q - 1}$; г) $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

99. Запишите сумму первых *n* членов геометрической прогрессии:

а) 2; 6; 18; … ; в) 3; 12; 48; … ;
б) 2; 4; 8; … ; г) 4; 20; 100; … .

100. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -1$, $q = 2$; в) $b_1 = \frac{1}{11}$, $q = 3$;
б) $b_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$; г) $b_1 = 81$, $q = 1$.

101. Выберите формулу, выражающую сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

а) $S = \frac{b_1 + b_n}{2} \cdot n$; в) $S = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, где $q \neq 1$;

б) $S = \frac{b_1}{1 - q}$, где $q \neq 1$; г) $S = \frac{b_1}{1 - q}$, где $|q| < 1$.

102. Представьте число в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(3); б) 0,(7); в) 0,(23); г) 0,(37).

IV. Тригонометрия

Градусная и радианная меры углов и дуг

103. При повороте около точки *O* на угол β начальный радиус *OA* переходит в радиус *OB*. Каким может быть угол поворота β, если $\angle AOB$ равен:

а) 45°; в) 180°;
б) 120°; г) 0°?

104. При повороте около точки *O* на угол $\beta = \alpha + 360° \cdot k$, где $k \in Z$, начальный радиус *OA* переходит в радиус *OB*. Каким может быть угол α, если точка *B* принадлежит:

а) I четверти; в) III четверти;
б) II четверти; г) IV четверти?

105. Установите, углом какой четверти является угол поворота, равный:

а) 200°; в) –250°; д) 400°; ж) –560°;
б) 330°; г) –380°; е) 480°; з) –700°.

106. Выразите угол в радианах:

$n°$	20°	45°	90°	135°	210°	270°	300°	360°
α рад.								

107. Выразите угол в градусах:

α рад.	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$n°$								

108. Укажите положение точки B – образа точки $A(1;\ 0)$ при повороте вокруг начала координат на угол, равный:

а) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{2}$; д) $-\pi$; ж) $-\frac{\pi}{4}$; и) $-\frac{3\pi}{2}$; л) 2π;

б) 45°; г) –30°; е) 180°; з) –360°; к) 270°; м) 150°.

109. На единичной окружности длина дуги в 1 радиан равна 1. Совершая поворот начального луча OA вокруг начала координат, точка A проходит по окружности некоторое расстояние. Оно равно углу поворота, выраженному в радианах. Найдите это расстояние, если угол поворота равен:

а) 420°; б) 540°; в) 750°; г) 810°.

110. Укажите точку B на единичной окружности, соответствующую углу:

а) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\pi$; д) $\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{3\pi}{2}$; г) -2π; е) $-\frac{2\pi}{3}$.

111. На единичной окружности укажите точки, соответствующие углам:

а) $\frac{\pi}{8}$ и $-\frac{\pi}{8}$; в) 2π и 4π;

б) $\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{3\pi}{4}$; г) π и 3π.

112. Совпадают ли на единичной окружности точки, соответствующие углам:

а) $12\frac{1}{5}\pi$ и $\frac{31}{5}\pi$; б) $12\frac{1}{3}\pi$ и $\frac{7}{3}\pi$?

113. Укажите на единичной окружности точки, соответствующие углам:

а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$; в) πk, где $k \in Z$;

б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

114. Как расположены на единичной окружности точки, соответствующие углам (α – радианная мера угла поворота):

а) α и $-\alpha$; в) α и $\alpha + \pi$;

б) α и $\alpha + 2\pi k$, где $k \in Z$; г) $\alpha + \pi$ и $\alpha - \pi$?

115. Запишите множество чисел, которым соответствует на единичной окружности точка B, если $\angle AOB$ равен:

а) 30°; б) 90°; в) 300°; г) 0°.

Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла

116. Укажите значения sin α, cos α, tg α, ctg α, если точка B_α единичной окружности, соответствующая углу α, имеет координаты:

а) $(x; y)$; в) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$;

б) $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; г) $\left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$; е) $(0; -1)$.

117. Найдите значение sin α и tg α, если угол α равен:

а) 180°; б) 90°; в) 270°; г) 360°.

118. На единичной окружности отметьте точку B_α и сравните значения sin α и cos α, если угол α равен:

а) 15°; в) 170°; д) 250°;
б) 75°; г) 180°; е) 300°.

119. Найдите угол α ($0° < \alpha < 360°$), при котором все тригонометрические функции имеют те же значения, что и для угла, равного:

а) 780°; б) 990°; в) –560°; г) –690°.

120. Заполните таблицу, указав знак (+ или –) значения функции:

	64°	125°	220°	305°
sin α	+			
cos α				
tg α				
ctg α				

121. Вместо многоточия запишите одноименную функцию противоположного угла, чтобы равенство было верным:

а) $\sin(-\alpha) = \ldots$; б) $\cos(-\alpha) = \ldots$; в) $\mathrm{tg}(-\alpha) = \ldots$; г) $\mathrm{ctg}(-\alpha) = \ldots$.

122. Найдите значение угла α, если α – угол I четверти и:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$;

б) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}$.

123. Найдите значение выражения:

а) sin(–30°), cos(–30°), tg(–30°), ctg(–30°);
б) sin(–45°), cos(–45°), tg(–45°), ctg(–45°);
в) sin(–60°), cos(–60°), tg(–60°), ctg(–60°).

124. Вычислите:

а) sin 135°, cos 135°, tg 135°, ctg 135°;

б) sin(–120°), cos(–120°), tg(–120°), ctg(–120°);

в) sin(–150°), cos(–150°), tg(–150°), ctg(–150°).

Тригонометрические функции и их свойства

125. Заполните таблицу:

Функция	Область определения	Множество значений
$y = \sin x$		
$y = \operatorname{tg} x$		

126. Укажите наибольшее и наименьшее значение функции, если они существуют:

а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

127. Существует ли угол, синус которого равен:

а) –0,8; в) $\frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; г) $\sqrt{3}$?

128. Укажите, можно ли построить угол, косинус которого равен следующим значениям. Если можно, то постройте его, используя единичную окружность.

а) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{3}{4}$;

б) $\frac{5}{2}$; г) $-\frac{3}{2}$.

129. Укажите точки на единичной окружности, имеющие ординату, равную:

а) $\frac{1}{2}$; в) 0;

б) $-\frac{1}{2}$; г) –1.

130. Укажите точки на единичной окружности, имеющие абсциссу, равную:

а) 0; в) $\frac{1}{2}$;

б) –1; г) $-\frac{1}{2}$.

131. Заполните таблицу:

Функция	Знаки функции в четвертях			
	I	II	III	IV
$y = \sin x$				
$y = \cos x$				
$y = \operatorname{tg} x$				
$y = \operatorname{ctg} x$				

132. Определите знак выражения:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; в) $\sin 2$; д) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; ж) $\operatorname{tg} 4$;

б) $\cos\frac{2\pi}{3}$; г) $\cos(-3)$; е) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; з) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3}$.

133. Объясните, почему верно равенство:

а) $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{25\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} = \operatorname{tg}\frac{22\pi}{7}$;

б) $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{32\pi}{5}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

134. Вычислите:

а) $\sin 330°$; в) $\operatorname{tg} 315°$; д) $\cos 4\pi$; ж) $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3}$;

б) $\cos 1110°$; г) $\operatorname{ctg} 495°$; е) $\sin\frac{7\pi}{2}$; з) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{2}$.

135. Запишите все углы поворота, которым на единичной окружности соответствуют точки:

а) с ординатой $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Основные тригонометрические тождества

136. Напишите основные тригонометрические тождества:

а) $\sin^2 x + \cos^2 x = \dots$; г) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \dots$;

б) $\operatorname{tg} x = \dots$; д) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dots$;

в) $\frac{\cos x}{\sin x} = \dots$; е) $\frac{1}{\sin^2 x} = \dots$.

137. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2 x$; в) $1 - \cos^2 x$; д) $2 - \sin^2 x - \cos^2 x$;

б) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; г) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x$; е) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

138. Вычислите: а) $\cos^2 x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$; б) $\sin^2 x$, если $\operatorname{ctg} x = 2$.

139. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если известно, что:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$; в) $\sin x = -\frac{1}{2}$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg} x = -1$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; г) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

140. Найдите значения остальных тригонометрических функций, если известно, что:

а) $\cos x = \frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; в) $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

б) $\operatorname{tg} x = 2$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg} x = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

141. Верно ли равенство:

а) $\sin^2 15° + \cos^2 15° = \sin^2 40 + \cos^2 40$;

б) $\sin^2 18° - \cos^2 47° = \sin^2 47 - \cos^2 18$?

142. Дано: $\sin x = 1$. Верно ли, что $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$?

143. Вычислите: а) $\operatorname{tg} 38° \cdot \operatorname{tg} 52°$; б) $1 - \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 50°$.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

144. Напишите формулы приведения, дописав правые части равенств:

а) $\sin(\pi - x) = \ldots$; д) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ldots$;

б) $\cos(\pi + x) = \ldots$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \ldots$;

в) $\operatorname{tg}(2\pi - x) = \ldots$; ж) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \ldots$;

г) $\operatorname{ctg}(2\pi + x) = \ldots$; з) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \ldots$.

145. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi + x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - x)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$;

в) $\frac{\sin(\pi - x) \cdot \cos(-x)}{\cos(\pi - x)}$; г) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \operatorname{tg}(-x)}{\cos(\pi + x)}$.

146. Используя формулы приведения, упростите выражение:

а) $\sin 250°$; в) $\operatorname{tg} 200°$;
б) $\cos 110°$; г) $\operatorname{ctg} 340°$.

147. Найдите значение выражения:

а) $4 - \sin 330°$; в) $\operatorname{tg} 570°$;
б) $\cos 4110°$; г) $\operatorname{ctg} 4560°$.

148. Верно ли равенство:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = 3$; б) $\dfrac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = -1$?

149. Допишите часть равенства так, чтобы получилась формула тригонометрической функции суммы или разности двух углов:

а) $\sin(x - y) = \ldots$;
б) $\cos(x - y) = \ldots$;
в) $\operatorname{tg}(x - y) = \ldots$.

150. Упростите выражение:

а) $1 - \sin 69° \cdot \cos 39° + \cos 69° \cdot \sin 39°$;
б) $2 - \cos 47° \cdot \cos 17° - \sin 47° \cdot \sin 17°$;
в) $\dfrac{\operatorname{tg} 16° + \operatorname{tg} 44°}{1 - \operatorname{tg} 16° \cdot \operatorname{tg} 44°}$;
г) $\dfrac{\operatorname{tg} 85° - \operatorname{tg} 25°}{1 + \operatorname{tg} 85° \cdot \operatorname{tg} 25°}$.

151. Вычислите:

а) $1 + \sin 10° \cdot \cos 20° + \cos 10° \cdot \sin 20°$;
б) $1 + \cos 36° \cdot \cos 24° - \sin 36° \cdot \sin 14°$;
в) $\dfrac{\operatorname{ctg} 22° \cdot \operatorname{ctg} 23° - 1}{\operatorname{ctg} 22° + \operatorname{ctg} 23°}$;
г) $\dfrac{\operatorname{ctg} 67° \cdot \operatorname{ctg} 37° + 1}{\operatorname{ctg} 67° - \operatorname{ctg} 37°}$.

152. Дано: $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, причем α и β – острые углы. Найдите: а) $\cos(\alpha + \beta)$; б) $\sin(\alpha - \beta)$.

153. Допишите часть равенства так, чтобы получилась формула тригонометрической функции двойного угла:

а) $\sin 2x = \dots$;

б) $\cos 2x = \dots$;

в) $\operatorname{tg} 2x = \dots$.

154. Верно ли равенство:

а) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

б) $\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

в) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

г) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$?

155. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2x}{\sin x}$; в) $\frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$;

б) $\frac{2\cos^2 x}{\sin 2x}$; г) $\frac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x}$.

156. Найдите значение выражения $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg} x = 0{,}7$.

157. Вычислите:

а) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$; в) $4\sin 75° \cdot \cos 75°$;

б) $\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$; г) $\frac{2\operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg}^2 30°} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 15°}{2\operatorname{tg} 15°}$.

158. Упростите выражение:

а) $2\sin 50° \cdot \sin 40°$; в) $2\cos^2 25° - 2\cos^2 65°$;

б) $\frac{4\operatorname{tg} 40°}{1 - \operatorname{ctg}^2 50°}$; г) $\frac{\operatorname{tg} 25°}{1 - \operatorname{ctg}^2 65°}$.

159. Дано: $\operatorname{tg} x = 3$. Найдите: а) $\operatorname{ctg} 2x$; б) $\cos 2x$.

160. Допишите часть равенства так, чтобы получилась формула суммы или разности тригонометрических функций:

а) $\sin\alpha + \sin\beta = \dots$; в) $\sin\alpha - \sin\beta = \dots$;

б) $\cos\alpha + \cos\beta = \dots$; г) $\cos\alpha - \cos\beta = \dots$.

161. Представьте выражение в виде произведения:

а) $\cos 2x + \cos 4x$; в) $\cos 20° - \cos 12°$;

б) $\sin x + \sin 5x$; г) $\sin\frac{\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}$.

162. Сократите дробь:

а) $\frac{\cos 3x + \cos 5x}{\sin 2x}$; б) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 4x}$.

163. Вычислите:

а) $\sin 75° - \sin 15° - \sin 45°$;

б) $\cos 15° - \cos 75° - \cos 45°$;

в) $\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 135°$.

164. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin 37° - \sin 53°}{1 - 2\cos^2 4°}$; б) $\dfrac{\cos 50° - \cos 70°}{2\sin^2 40° - 1}$.

V. Элементы теории вероятностей

Первоначальные понятия теории вероятностей. Классическое определение понятия вероятности

165. В книге 1000 страниц. Какова вероятность того, что номер наугад открытой ее страницы оканчивается двумя нулями?

166. Какова вероятность того, что наугад взятое число из первых 20 натуральных чисел является делителем:

а) числа 10; б) каждого из этих чисел?

167. Какова вероятность того, что наугад взятый арифметический квадратный корень из двузначного числа окажется натуральным числом?

168. Из цифр 0, 1, 2 составили все возможные двузначные числа второго десятка. Какова вероятность того, что наугад взятое из них число делится на 5?

Статистическая вероятность

169. 2000 девятиклассников одного из регионов Казахстана выполняли проверочную работу, состоящую из 5 заданий. Оказалось, что 400 учащихся правильно выполнили все задания. Какова вероятность того, что случайным образом указанный девятиклассник выполнил все задания?

170. При проведении контроля качества продукции среди 500 случайно выбранных деталей оказалось 5 бракованных. Сколько бракованных деталей могло оказаться в партии из 1500 деталей?

171. При проверке выбранных случайным образом 200 лампочек две оказались неисправными. Сколько могло быть неисправных лампочек в партии из 1000 лампочек?

172. В партии из 1000 телевизоров были проверены 50, из которых один телевизор оказался с дефектом. Сколько телевизоров с дефектами можно было ожидать во всей партии?

Геометрическая вероятность

173. На перекладине с концами в точках *A* и *B* в точке *C* сидит птица. Какова вероятность того, что другая птица сядет между серединами отрезков *AC* и *BC*?

174. В первом треугольнике содержится второй, подобный ему треугольник, периметр которого вдвое меньше. Какова вероятность того, что случайно отмеченная точка в первом треугольнике окажется и во втором треугольнике?

175. Клумба имеет форму правильного треугольника со стороной 3 м. На клумбе выложен цветочный круг диаметром 1 м. Какова вероятность того, что случайно отмеченная точка треугольника окажется в круге?

176. Даны две концентрические окружности с радиусами 1 м и 2 м. Какова вероятность того, что наугад взятая точка круга большего радиуса окажется в кольце, образованном этими окружностями?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений тригонометрических функций углов от 0° до 90°

α	**sin** α	**tg** α	**ctg** α	**cos** α	β
0	0	0	–	1	90
1	0,017	0,017	57,3	1,000	89
2	0,035	0,035	28,6	0,999	88
3	0,052	0,052	19,1	0,999	87
4	0,070	0,070	14,3	0,998	86
5	0,087	0,087	11,4	0,996	85
6	0,105	0,105	9,51	0,995	84
7	0,122	0,123	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,12	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,15	0,982	79
12	0,208	0,213	4,71	0,978	78
13	0,225	0,231	4,33	0,974	77
14	0,242	0,249	4,01	0,970	76
15	0,259	0,268	3,73	0,966	75
16	0,276	0,287	3,49	0,961	74
17	0,292	0,306	3,27	0,956	73
18	0,309	0,325	3,08	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,75	0,940	70
21	0,358	0,384	2,61	0,934	69
22	0,375	0,404	2,48	0,927	68
23	0,391	0,424	2,36	0,921	67
24	0,407	0,445	2,25	0,914	66
25	0,423	0,466	2,15	0,906	65
26	0,438	0,488	2,05	0,899	64
27	0,454	0,510	1,96	0,891	63
28	0,469	0,532	1,88	0,883	62
29	0,485	0,554	1,80	0,875	61
α	**cos** β	**ctg** β	**tg** β	**sin** β	β

α	**$\sin\alpha$**	**$\text{tg}\,\alpha$**	**$\text{ctg}\,\alpha$**	**$\cos\alpha$**	**β**
30	0,5	0,577	1,73	0,866	60
31	0,515	0,601	1,66	0,857	59
32	0,530	0,625	1,60	0,848	58
33	0,545	0,649	1,54	0,839	57
34	0,559	0,675	1,48	0,829	56
35	0,574	0,700	1,43	0,819	55
36	0,588	0,727	1,38	0,809	54
37	0,602	0,754	1,33	0,799	53
38	0,616	0,781	1,28	0,788	52
39	0,629	0,810	1,24	0,777	51
40	0,643	0,839	1,19	0,766	50
41	0,656	0,869	1,15	0,755	49
42	0,669	0,900	1,11	0,743	48
43	0,682	0,933	1,07	0,731	47
44	0,695	0,966	1,04	0,719	46
45	0,707	1	1	0,707	45
α	**$\cos\beta$**	**$\text{ctg}\,\beta$**	**$\text{tg}\,\beta$**	**$\sin\beta$**	**β**

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Глейзер Г. И. История математики в школе: 6–8 классы. – М.: Просвещение, 1981.

2. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2010.

3. Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. – М.: ООО «Астрель», 2007.

4. Сергеев И. Н., Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. – М.: Наука, 1990.

5. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.

6. Кунгожин А. М., Кунгожин М. А., Байсалов Е. Р., Елиусизов Д. А. Математические олимпиады: Азиатско-Тихоокеанская, Шелковый путь. – М.: МЦНМО, 2017.

Список фотоснимков, использованных в иллюстрациях на шмуцтитулах

1. Урочище Торыс. Долина шаров, п-ов Мангистау – 18 стр.

2. Дворец Мира и Согласия, г. Нур-Султан – 62 стр.

3. Жилой комплекс «Гранд Алатау», г. Нур-Султан – 92 стр.

4. Административный комплекс «Изумрудный квартал», г. Нур-Султан – 147 стр.

5. Гостиница «Казахстан», г. Алматы – 229 стр.